Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 103/104 (1934)

Heft: 20

Artikel: Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmässig erwärmten Rohren

Autor: Stodola, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83332

Band 104 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 20

Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmässig erwärmten Rohren.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Nachfolgende Betrachtungen bilden einen Beitrag zur Richtigstellung irrtümlicher Auffassungen, die in den Lösungen für die Wärmespannungen ungleichmässig erwärmter Rohre in letzter Zeit aufgetaucht sind. Das Wesentliche des Sachverhaltes kommt am klarsten im folgenden übersichtlichen Fall zum Ausdruck.

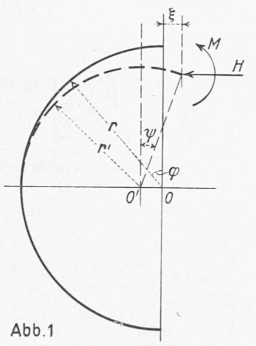

Abb. 1

Es sei ein Ring mit dem mittlern Halbmesser r, der Dicke h, der axialen Länge b in seiner untern Hälfte auf der Temperatur Null, in der äussern Faser der obern Hälfte auf der Temperatur t_2, in deren innerer Faser auf der Temperatur t_1 erhalten, mit linearem Zwischenverlauf. Schneiden wir den Ring gemäss Abb. 1 durch eine senkrechte Diametralebene und spannen wir die linke Hälfte im unteren Endpunkt ein, so würde sich der obere Quadrant zu einem Kreisbogen mit dem Halbmesser r' und dem Winkel $\frac{\pi}{2} + \psi$ verformen. Um den alten Zusammenhang wieder herzustellen, müssen wir eine Umfangskraft H und ein Moment M anbringen, deren positiver Sinn in Abb. 1 eingetragen ist. Für die äussere und innere Faser dieses Quadranten, für den wir die bei Biegung übliche Annahme ebener Querschnitte einführen, gelten die Beziehungen:

$$\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\left[r' + \frac{h}{2}(1+\beta\, t_2')\right] = \frac{\pi}{2} r_2 (1 + \beta\, t_2) \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}+\psi\right)\left[r' - \frac{h}{2}(1+\beta\, t_1')\right] = \frac{\pi}{2} r_1 (1 + \beta\, t_1) \qquad (2)$$

worin $r_2 = r + h/2$; $r_1 = r - h/2$; $t_2' = (t_m + t_2)/2$, $t_1' = (t_m + t_1)/2$ mit $t_m = (t_2 + t_1)/2$, und β die Wärmedehnungszahl bedeuten. Führen wir noch $\Delta t = t_2 - t_1$ ein, so ergibt die Auflösung von (1) und (2)

$$\psi = \left(\frac{\pi}{2}\beta\frac{r}{h}\Delta t\right)/(1 + \beta\, t_m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$r - r' = \beta\, r\left[\left\{1 - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{r}\right)^2\right\}\frac{r}{h}\Delta t - t_m\right] \quad . \quad . \quad (4)$$

Die durch H und M bewirkte Verformung des Halbkreises besteht bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung, wie auch der bei dünnen Rohren unbedeutenden, durch die Normalkraft erzeugten Spannung aus der Winkeländerung

$$\alpha = \frac{\pi r}{J E}(M + H r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und der waagrechten Auslenkung des Endpunktes

$$\xi = \frac{\pi r^2}{J E}\left(M + \frac{3}{2} H r\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Unbekannten M und H sind aus den Bedingungen

$$\alpha = \psi;\quad \xi = r'(1 + \psi) - r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zu bestimmen. Man erhält zunächst

$$H r = \frac{2 J E}{\pi r^2}(\xi - r\psi);\quad M = \frac{J E}{\pi r}\psi - H r \quad . \quad (8)$$

sodann das biegende Moment im Winkelabstand φ: $M_\varphi = M + H r(1 - \cos\varphi)$

$$= \frac{J E \beta}{h}\left[\frac{\Delta t}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\Delta t\left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{r}\right)^2\right) - \frac{h}{r} t_m\right\}\cos\varphi\right] \quad . \quad (9)$$

Die hieraus folgende Umfangspannung enthält wie ersichtlich einen unveränderlichen, und einen mit $\cos\varphi$ veränderlichen Anteil. Die zum gegenteiligen Ergebnis führende Ableitung von Konejung[1]) beruht mithin auf einem Irrtum. Aber auch die ebenfalls auf eine Konstanz der Umfangsspannungen führende, mathematisch glänzende Dissertation von Schau[2]) muss angefochten werden, obschon die Anschauung Unrecht hat zu glauben, dass schon der Hinweis auf einen auf schmaler Zone hoch erhitzten Ring genüge, die These von Schau ad absurdum zu führen. Jede Verteilung des Wärmestromes kann nämlich in eine Fourierreihe längs des Umfanges zerlegt werden. Wenn wir aus dieser das Glied $q_n = A_n \cos n\varphi$ herausgreifen und den Ring in $2n$ gleiche Abschnitte teilen, wo im ersten die Aussenfaser, im zweiten die Innenfaser die heissere ist u. s. f., so verbiegen sich diese freien Abschnitte derart, dass die Winkel gegen den alten Umfang an den Enden je gleich und entgegengesetzt sind. Man kann sie mithin zu einem neuen Ringe mit gewelltem Umfange spannungsfrei zusammenfügen. Die Ableitungen Schau's sind also für alle $n \gtreqless 2$ streng richtig, nur bei $n = 1$ versagen sie gänzlich, und auch die Inbetrachtnahme der im Rohr gleichzeitig auftretenden Axialspannungen ändert hieran, wie man nachweisen kann, nichts.

Herr Dr. Schau, dem ich diese Ueberlegungen und Gl. (8) vorlegte, war so freundlich, den Fall $n = 1$ einer Revision zu unterziehen, die zur Feststellung führte, dass die These von der Unveränderlichkeit der Umfangspannungen nicht aufrecht erhalten werden könne. Die berichtigten Formeln, zu denen er gelangt ist, werden von ihm demnächst veröffentlicht werden.

Im übrigen ist es überraschend, dass es einen Sonderfall gibt, wo die Spannungen längs des Umfanges dennoch fast ganz unveränderlich bleiben. Dieser Fall folgt aus Gl. (9), wenn wir darin $(^1/_8)\,(h/r)^2$ neben eins vernachlässigen und die Bedingung

$$\frac{\Delta t}{h} = \frac{t_m}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

einhalten, indem dann M_φ sich auf $J E \beta\, \Delta t/2h$ reduziert. Wir können also die eine Hälfte des Ringes auf eine beliebig hohe Mitteltemperatur t_m erhitzen — wird dabei ein Δt gemäss Gl. (9) eingestellt, bleiben die Umfangspannungen unveränderlich.

Bei der Anwendung von Gleichung (9) auf Rohre wird man unter Voraussetzung eines der Rohrlänge nach unveränderlichen Temperaturfeldes die Umfangs-Biegespannung nicht nach Formel $\sigma_b = M_\varphi\, \eta/J$ rechnen, sondern wegen der verhinderten Querkontraktion im Nenner den Faktor $(1 - \nu)$ anbringen, mit ν als dem Reziproken der Querdehnungszahl. Die für andere Winkel der heissen Zone leicht anzupassende Gleichung berücksichtigt die Wirkung der beiden Komponenten q_0 und q_1, die nach Schau getrennt zu behandeln sind. Für alles übrige sei auf seine bevorstehende Veröffentlichung verwiesen.

[1]) In: „Wärme", Bd. 53 (1930), S. 893.

[2]) „Zeitschrift für Dampf-Untersuchungs- und Versicherungs-Gesellschaft", Band 57 (1932), Nr. 8 bis 11.