

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 20

**Artikel:** Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmässig erwärmten Rohren  
**Autor:** Stodola, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83332>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmässig erwärmten Rohren. — Von Bau moderner Tramwagen in Italien. — Die Tätigkeit der Internationalen Talsperren-Kommission. — Wettbewerb für einen allgemeinen Erweiterungsplan der Stadt Bern und ihrer Vororte. — Wettbewerbe: Kantonales Gymnasium und weitere Bebauung auf der „propriété de Béthusy“ in Lausanne. Stadt-

Casino Basel. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Beilage: WEITERBAUEN Nr. 2: Die funktionelle Stadt. Ueber den Unterschied zwischen anthropomorph und menschlich. Zürcher Kunsthaus. Freunde des Neuen Bauens. Zeitschriftenschau.

## Zur Theorie der Wärmespannungen in dem Umfang nach ungleichmässig erwärmten Rohren.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Nachfolgende Betrachtungen bilden einen Beitrag zur Richtigstellung irrtümlicher Auffassungen, die in den Lösungen für die Wärmespannungen ungleichmässig erwärmter Rohre in letzter Zeit aufgetaucht sind. Das Wesentliche des Sachverhaltes kommt am klarsten im folgenden übersichtlichen Fall zum Ausdruck.

Es sei ein Ring mit dem mittleren Halbmesser  $r$ , der Dicke  $h$ , der axialen Länge  $b$  in seiner untern Hälfte auf der Temperatur Null, in der äussern Faser der obere Hälfte auf der Temperatur  $t_2$ , in deren innerer Faser auf der Temperatur  $t_1$  erhalten, mit linearem Zwischenverlauf. Schneiden wir den Ring gemäss Abb. 1 durch eine senkrechte Diametralebene und spannen wir die linke Hälfte im unteren Endpunkt ein, so würde sich der obere Quadrant zu einem Kreisbogen mit dem Halbmesser  $r'$  und dem Winkel  $\frac{\pi}{2} + \psi$  verformen. Um den alten Zusammenhang wieder herzustellen, müssen wir eine Umfangskraft  $H$  und ein Moment  $M$  anbringen, deren positiver Sinn in Abb. 1 eingetragen ist. Für die äussere und innere Faser dieses Quadranten, für den wir die bei Biegung übliche Annahme ebener Querschnitte einführen, gelten die Beziehungen:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \left[r' + \frac{h}{2}(1 + \beta t_2')\right] = \frac{\pi}{2} r_2 (1 + \beta t_2) \quad (1)$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) \left[r' - \frac{h}{2}(1 + \beta t_1')\right] = \frac{\pi}{2} r_1 (1 + \beta t_1) \quad (2)$$

worin  $r_2 = r + h/2$ ;  $r_1 = r - h/2$ ;  $t_2' = (t_m + t_2)/2$ ,

$t_1' = (t_m + t_1)/2$  mit  $t_m = (t_2 + t_1)/2$ , und  $\beta$  die Wärmedehnungszahl bedeuten. Führen wir noch  $\Delta t = t_2 - t_1$  ein, so ergibt die Auflösung von (1) und (2)

$$\psi = \left(\frac{\pi}{2} \beta \frac{r}{h} \Delta t\right) / (1 + \beta t_m) \quad \dots \quad (3)$$

$$r - r' = \beta r \left[ \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{h}{r} \right)^2 \right\} \frac{r}{h} \Delta t - t_m \right] \quad \dots \quad (4)$$

Die durch  $H$  und  $M$  wirkte Verformung des Halbkreises besteht bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung, wie auch der bei dünnen Rohren unbedeutenden, durch die Normalkraft erzeugten Spannung aus der Winkeländerung

$$\alpha = \frac{\pi r}{J E} (M + H r) \quad \dots \quad (5)$$

und der waagrechten Auslenkung des Endpunktes

$$\xi = \frac{\pi r^2}{J E} \left( M + \frac{3}{2} H r \right) \quad \dots \quad (6)$$

Die Unbekannten  $M$  und  $H$  sind aus den Bedingungen

$$a = \psi; \quad \xi = r' (1 + \psi) - r \quad \dots \quad (7)$$

zu bestimmen. Man erhält zunächst

$$H r = \frac{2 J E}{\pi r^2} (\xi - r \psi); \quad M = \frac{J E}{\pi r} \psi - H r \quad (8)$$

sodann das biegende Moment im Winkelabstand  $\varphi$ :  $M_\varphi = M + H r (1 - \cos \varphi)$

$$= \frac{J E \beta}{h} \left[ \frac{\Delta t}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \Delta t \left( 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{h}{r} \right)^2 \right) - \frac{h}{r} t_m \right\} \cos \varphi \right] \quad (9)$$

Die hieraus folgende Umfangsspannung enthält wie ersichtlich einen unveränderlichen, und einen mit  $\cos \varphi$  veränderlichen Anteil. Die zum gegenteiligen Ergebnis führende Ableitung von Konejung<sup>1)</sup> beruht mithin auf einem Irrtum. Aber auch die ebenfalls auf eine Konstanz der Umfangsspannungen führende, mathematisch glänzende Dissertation von Schau<sup>2)</sup> muss angefochten werden, obschon die Anschauung Unrecht hat zu glauben, dass schon der Hinweis auf einen auf schmäler Zone hoch erhitzten Ring genüge, die These von Schau ad absurdum zu führen. Jede Verteilung des Wärmestromes kann nämlich in eine Fourierreihe längs des Umfangs zerlegt werden. Wenn wir aus dieser das Glied  $q_n = A_n \cos n \varphi$  herausgreifen und den Ring in  $2n$  gleiche Abschnitte teilen, wo im ersten die Aussenfaser, im zweiten die Innenfaser die heissere ist u.s.f., so verbiegen sich diese freien Abschnitte derart, dass die Winkel gegen den alten Umfang an den Enden je gleich und entgegengesetzt sind. Man kann sie mithin zu einem neuen Ringe mit geweltem Umfang spannungsfrei zusammenfügen. Die Ableitungen Schau's sind also für alle  $n \geq 2$  streng richtig, nur bei  $n = 1$  versagen sie gänzlich, und auch die Inbetrachtnahme der im Rohr gleichzeitig auftretenden Axialspannungen ändert hieran, wie man nachweisen kann, nichts.

Herr Dr. Schau, dem ich diese Ueberlegungen und Gl. (8) vorlegte, war so freundlich, den Fall  $n = 1$  einer Revision zu unterziehen, die zur Feststellung führte, dass die These von der Unveränderlichkeit der Umfangsspannungen nicht aufrecht erhalten werden könne. Die berichtigten Formeln, zu denen er gelangt ist, werden von ihm demnächst veröffentlicht werden.

Im übrigen ist es überraschend, dass es einen Sonderfall gibt, wo die Spannungen längs des Umfangs dennoch fast ganz unveränderlich bleiben. Dieser Fall folgt aus Gl. (9), wenn wir darin  $(1/s) (h/r)^2$  neben eins vernachlässigen und die Bedingung

$$\frac{\Delta t}{h} = \frac{t_m}{r} \quad \dots \quad (9)$$

einhalten, indem dann  $M_\varphi$  sich auf  $J E \beta \Delta t / 2h$  reduziert. Wir können also die eine Hälfte des Ringes auf eine beliebig hohe Mitteltemperatur  $t_m$  erhitzten — wird dabei ein  $\Delta t$  gemäss Gl. (9) eingestellt, bleiben die Umfangsspannungen unveränderlich.

Bei der Anwendung von Gleichung (9) auf Rohre wird man unter Voraussetzung eines der Rohrlänge nach unveränderlichen Temperaturfeldes die Umfangs-Biegespannung nicht nach Formel  $\sigma_b = M_\varphi \eta / J$  rechnen, sondern wegen der verhinderten Querkontraktion im Nenner den Faktor  $(1 - \nu)$  anbringen, mit  $\nu$  als dem Reziproken der Querdehnungszahl. Die für andere Winkel der heissen Zone leicht anzupassende Gleichung berücksichtigt die Wirkung der beiden Komponenten  $q_0$  und  $q_1$ , die nach Schau getrennt zu behandeln sind. Für alles übrige sei auf seine bevorstehende Veröffentlichung verwiesen.

<sup>1)</sup> In: „Wärme“, Bd. 53 (1930), S. 893.

<sup>2)</sup> „Zeitschrift für Dampf-Untersuchungs- und Versicherungs-Gesellschaft“, Band 57 (1932), Nr. 8 bis 11.

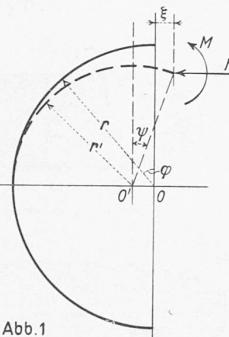


Abb. 1