

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 9

**Artikel:** Die spannungsoptische Untersuchung der Berührung zweier Kreiszyylinder  
**Autor:** Rajnfeld, Seweryn  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-83269>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**



2. Im Diagrammblatt Abb. 3 sind ausser der theoretischen, parabolischen Normaldruckverteilung längs der Berührungsfläche die gemessenen Normaldrücke aufgetragen. Die Uebereinstimmung ist eine sehr gute, wenn man die sehr heikle Spannungsbestimmung in unmittelbarer Nähe der Berührungsfläche berücksichtigt. — Die Hertz'sche Theorie ergibt also die Verteilung der Normalspannung richtig.

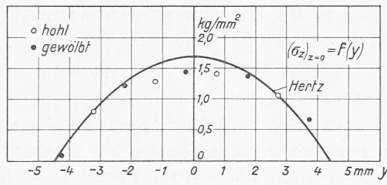


Abb. 3.

3. Das Diagramm Abb. 4 zeigt die Verteilung der Schubspannungen (Reibungen) längs der Berührungsfläche, die von Hertz vernachlässigt wurden.

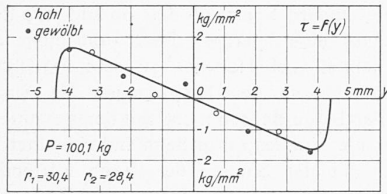


Abb. 4.

Wie es sein sollte, ist die Reibung in der Symmetrielinie und in den Endpunkten der Kontaktfläche gleich Null. Auf beiden Seiten der Symmetrielinie hat sie entgegengesetztes Vorzeichen. Die Werte der Schubspannungen sind beträchtlich und erreichen ebenso hohe Beträge wie die Normaldrücke. Sogar für höchst fein geschliffene Glasflächen ist von Kleinheit der Reibung keine Rede. Für andere Materialien und andere Oberflächenbeschaffenheiten werden diese Werte noch höher sein. Man kann sich diese Spannungen aus der verschiedenen Deformation der beiden Berührungsflächen und dadurch vorhandene Rutschendenz entstanden denken.

Die Schubspannung wurde jeweilen nach bekannter Formel aus den Werten der beiden Hauptspannungen und ihren Neigungen gegen die Flächennormale an der betreffenden Berührungsstelle berechnet. Die bezüglichen Messungen beanspruchen keine allzugrosse Genauigkeit.<sup>2)</sup>

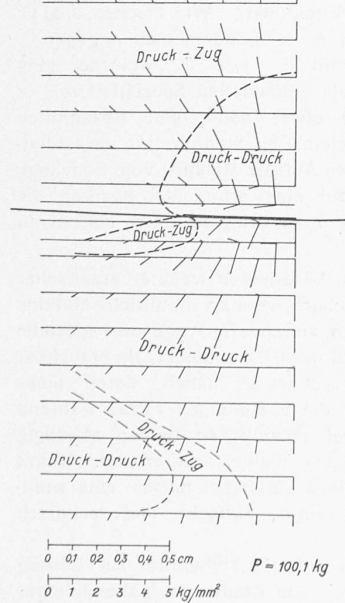


Abb. 5.

4. Das Diagrammblatt Abb. 5 zeigt die Hauptspannungsverteilung in der Nähe der Berührungsfläche. In den einzelnen Punkten sind die grossen und, wo angängig, auch die kleinen Halbaxen der Spannungselipsen massstäblich aufgetragen. In der Umgebung der Kontaktfläche sind die Spannungen am grössten. In Entfernungen, die grösser als 3b sind, können sie nach Boussinesq ausgerechnet werden, indem man die Berührungsstelle als punktförmig betrachtet:

$$\sigma_r = \frac{2 P \cos \varphi}{\pi e r}$$

In diesen Abständen macht sich also die Art und Belastung der Berührungsfläche nicht mehr bemerkbar.

In den gestrichelt eingezeichneten Linien, den sogenannten Nulllinien, wird eine Hauptspannung, ihr Vorzeichen wechselnd, zu Null. Sind z. B. auf der einen Seite

<sup>2)</sup> Auf die Verhältnisse bei der Rollreibung können interessante Anwendungen gemacht werden.

der Nulllinie beide Hauptspannungen Drücke, so ist auf der andern Seite eine Hauptspannung ein Zug.

Der gewölbte Zylinder wird durch eine einfache Nulllinie in einen Druck-Druck-Kern, der an die Berührungsstelle grenzt, von dem Rest der Scheibe, einem Zug-Druck-Gebiet, getrennt.

Im Hohlzylinder ist die Nulllinie eine Schleife von kompliziertem Verlauf. Das Druck-Druck-Gebiet ist weiter ausgedehnt als im gewölbten Zylinder. In der Nähe des unbelasteten Randes herrscht Druck-Druck. Zwischen den beiden Gebieten ist ein Keil mit Zug-Druckbeanspruchung vorhanden.

5. Das Diagramm Abb. 6 stellt die Grösse der Kontaktfläche als Funktion der Belastung dar. Es ist eine deutliche Abweichung von der Hertz'schen Theorie bemerkbar, indem die gemessene Berührungsfläche um 16 bis 50% grösser ist als die gerechnete. Die grössten Abweichungen treten bei kleinen Lasten auf. Der Einfluss der Grösse der Poisson'schen Zahl auf die Grösse der Hertz'schen Fläche ist beinahe bedeutungslos. Der

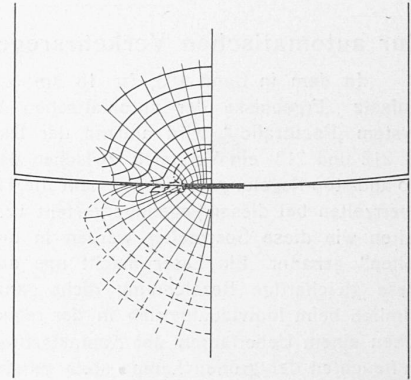


Abb. 7.

Elastizitätsmodul kommt in der Formel von Hertz unter der Wurzel vor. Auch eine grosse Aenderung desselben kann die Hertz'sche Kurve mit den gemessenen nicht zur Deckung bringen. Da aber nicht zu vermuten ist, dass die Reibungskräfte an der Berührungsstelle die Hertz'sche Fläche vergrössern, so wird die Auffassung von Föppl<sup>3)</sup> und M. Brillouin<sup>4)</sup> nahegelegt, wonach für die Oberfläche und das Innere des Körpers verschiedene Elastizitätsmodul einzusetzen sind.

Nach meinen Messungen scheint der Elastizitätsmodul an der Oberfläche rund 1,5 bis 2 mal kleiner als der „totale“ Elastizitätsmodul einzusetzen zu sein.

6. Das Trajektorienbild Abb. 7 ist für den Voll- und Hohlzylinder völlig verschieden und weicht von dem von M. T. Huber und R. Fuchs<sup>5)</sup> bestimmten ab. Dagegen

stimmt es für den Hohlzylinder mit jenem überein, das von diesen Autoren für die Berührung einer Kugel mit einer Ebene angegeben worden ist. Die Trajektorien sind dünn ausgezogen, wenn die Hauptspannung von der betreffenden Richtung ein Druck-, dick, wenn sie ein Zug ist; die gestrichelten Linien deuten an, dass die Hauptspannungen so klein sind, dass sie nur nach Richtungen, nicht aber nach Grösse bestimmbar sind.

Zusammenfassung.

Die Formel von Hertz ergibt eine um 15 bis 50% zu kleine Kontaktfläche und dementsprechend zu hohe Normaldrücke. Rechnet man dagegen mit der wahren Kontaktfläche und parabolischer Normaldruckverteilung, so dass die Resultierende der Normaldrücke die äussere Last

<sup>3)</sup> Wied. Ann. Bd. 63, 1897; Vorlesungen über technische Mechanik Bd. 5, 1918; Drang und Zwang, Bd. 2, 1928.

<sup>4)</sup> Ann. de chimie et de physique, Bd. 13, 1898.

<sup>5)</sup> Fuchs: Phys. Z. Bd. 14, 1913; Huber und Fuchs: Phys. Z. Bd. 15, 1914.

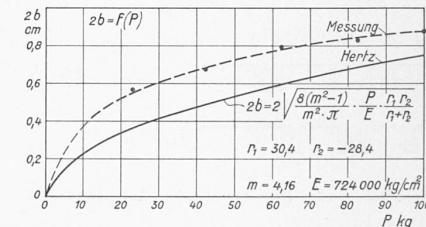


Abb. 6.

ergibt, so erhält man die richtigen Werte für die Normaldrücke. Auch bei der allerbesten Bearbeitung treten, wenn die Krümmungsradien der beiden Zylinder verschieden sind, Schubspannungen (Reibungen) von der Grössenordnung der Normaldrücke auf. Es scheint wahrscheinlich, dass der Elastizitätsmodul der Oberflächenschicht 1,5 bis 2 mal grösser als der totale Elastizitätsmodul ist. Die Hauptspannungen im Innern des Körpers werden durch die Formeln von Hertz gut approximiert. Die bis jetzt veröffentlichten Trajektorienbilder entsprechen nicht den Tatsachen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. F. Tank für die liebenswürdige Leitung der Arbeit, wie auch den Herren Professoren M. ten Bosch, Dr. W. Brunner und Dr. G. Polya für ihre wertvolle Hilfe zu danken. Ebenso spreche ich der Schweizerischen Volkswirtschafts-Stiftung für die Subventionierung des Photoelastischen Laboratoriums meinen besten Dank aus.

**Zur automatischen Verkehrsregelung.**

In dem in Band 103, Nr. 18 am 5. Mai 1934 erschienenen Aufsatz „Ergebnisse der automatischen Verkehrsregelungsanlage System „Pneutrafic““ wird anhand der Diagramme Abb. 1 und 2 (S. 212 und 213) ein Vergleich zwischen der individuellen und der Go-and-stop-Regelung gezogen, indem die Haltezeiten bei jener den Sperrzeiten bei dieser gegenübergestellt werden. Sowohl jene Haltezeiten wie diese Sperrzeiten werden in den Diagrammen „Wartezeiten“ genannt. Ein Leser macht uns darauf aufmerksam, dass diese gleichartige Bezeichnung nicht ganz korrekt ist. Während nämlich beim Individualbetrieb in der registrierten Zeitspanne zwischen einem Ueberfahren der Kontaktschwellen und dem nächsten Aufleuchten der grünen Lampe stets mindestens ein Fahrzeug gewartet hat, braucht dies während der Sperrzeiten bei der damit verglichenen Go-and-stop-Regelung nicht der Fall zu sein, dann nämlich, wenn die gesperrte Fahrtrichtung gerade von keinem Fahrzeug beansprucht wird. Dann ist die betreffende Sperrzeit keine Wartezeit.

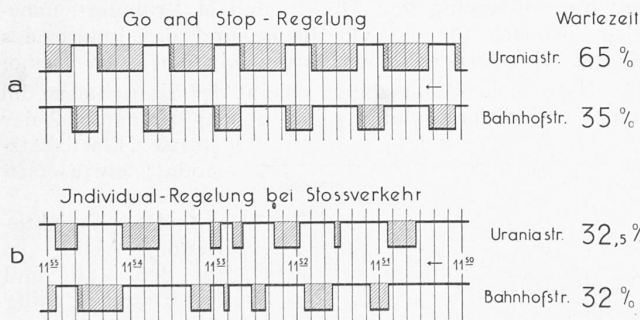


Abb. 1. Sperrzeiten, bezw. Haltezeiten gemäss chronographischer Aufzeichnung.

Unser Korrespondent ficht deshalb die aus den Diagrammen über das Verhältnis der Wartezeiten bei den beiden Regelungen gezogenen Schlüsse an. Betrachten wir etwa die Verhältnisse bei Stossverkehr auf der Uraniastrasse bei Individualbetrieb (Abb. 1b) und bei Go-and-stop-Betrieb (Abb. 1a). Im Mittel mögen an einem Punkt der Uraniastrasse *c* Fahrzeuge in der Sekunde in beiden Richtungen vorüberfahren. Ist sie *t* sec lang gesperrt, so haben in dieser Zeit *n = c t* Fahrzeuge anzuhalten. Deren letztes wartet *t/n* sec, das zweitletzte *2 t/n* sec..., das erste *t* sec. Zusammen warten sie also

$$\frac{t}{n} (1+2+\dots+n) = \frac{n+1}{2} t = \frac{c t + 1}{2} t \text{ sec.}$$

Die totale Wartezeit aller in einem gegebenen Zeitintervall auf der Uraniastrasse angehaltenen Fahrzeuge wird damit

$$W = \sum \frac{c t_i + 1}{2} t_i = \frac{1}{2} \sum t_i + \frac{c}{2} \sum t_i^2,$$

wenn *t<sub>i</sub>* die *i*-te der in dem Zeitintervall gelegenen Sperrzeiten ist. Nehmen wir das Intervall zwischen 11 h 50' 20" und 11 h 54' 40". Bei dem Go-and-stop-Betrieb von Abb. 1a ist *t<sub>i</sub>* = 32 sec und damit *W* = 80 + 2560 c. In der selben Zeitspanne waren bei der Individualregelung die Haltezeiten nacheinander 20, 4, 18, 8, 8, 26 sec. Mit diesen Werten wird *W'* = 42 + 772 c. Um *W'* mit *W* vergleichen zu können, muss man eine Annahme über die Verkehrsfrequenz *c*

bei dem vorliegenden Stossverkehr treffen. Mit *c* = 1/16, 1/8, 1/4, 1/2 wird das Verhältnis *W*:*W'* beziehungsweise 2,7; 2,9; 3,1; 3,2. Das auf den Diagrammen angegebene Verhältnis der „Wartezeiten“ 65:32,5 = 2 ist also jedenfalls viel kleiner als das Verhältnis der wirklichen Wartezeiten. Im Fall des Stossverkehrs unterschätzen demnach die Diagramme den wartezeitverkürzenden Einfluss der Individualregelung erheblich.

Anders bei schwachem Verkehr, wo sich der Einwand unseres Korrespondenten geltend macht. Sobald nämlich die Zeitabstände zwischen dem Eintreffen zweier aufeinanderfolgenden Fahrzeuge die Grössenordnung der Sperrzeiten erreichen oder gar übertreffen, ist es nicht mehr ohne grobe Fehler zulässig, eine regelmässige Fahrzeugfolge anzunehmen. Das Eintreffen eines Fahrzeugs wird dann zu einem relativ seltenen Ereignis, das sehr wohl während der einen oder andern Sperrzeit des Go-and-stop-Betriebes ausbleiben kann, sodass eine Sperrzeit überhaupt nicht mehr oder nur zu einem Bruchteil auch Haltezeit zu sein braucht. Ohne Rücksicht hierauf wird nun in den Diagrammen die Summe der Sperrzeiten bei Go-and-stop-Betrieb nicht mit der gesamten Zeit verglichen, während der die Uraniastrasse beim Individualbetrieb gesperrt war, sondern nur mit der Summe der durch wartende Fahrzeuge registrierten Sperrzeiten, also der eigentlichen Haltezeiten des Individualbetriebes. Bei schwachem Verkehr wird daher durch die in den Diagrammen aufgeführten Prozentzahlen die günstige Wirkung der Individualregelung stark übertrieben. Eine Weiterführung der Vergleichsdiagramme über die Zeiten ausgesprochen schwachen Verkehrs (zwischen 20 und 8 Uhr) ist denn auch unterblieben. Natürlich ist vor allem bei stärkerem Verkehr, auf den die automatische Regelung ja gemünzt ist, der Effekt des Individualbetriebs von Interesse.

Der Entscheid darüber, wann die in den Diagrammen bei Stossverkehr, wie gesagt, ungenügend zum Ausdruck kommende Ueberlegenheit der Individualregelung es rechtfertigt, ihr vor der starrereren, aber nach der Schätzung unseres Korrespondenten viermal billigeren Go-and-stop-Regelung den Vorzug zu geben, ist Sache der Verkehrspolizei.

**Zum Problem der rotierenden Scheibe.**

Ing. Alexander Fischer, Prag, macht uns darauf aufmerksam, dass die beiden neuen Exponentialprofile von Dr. J. Malkin, behandelt in Bd. 103, Nr. 2, S. 15\* (am 13. Januar 1934) in der von Fischer im Jahre 1922 in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, Heft 9/10, S. 47 angegebenen Lösungsklasse  $y = y_0 [1 - \beta (r/r_0)^m]^n$  im Keim enthalten sind (*y* = Scheibendicke in der Entfernung *r* vom Mittelpunkt). Wie Fischer a. a. O. erwähnte, gelangt man speziell für  $r_0^m = n$ , indem man *r<sub>0</sub>* gegen ∞ streben lässt, zum Exponentialprofil  $y = y_0 e^{-\beta r^m}$ . Fischer ging allerdings nur auf den von Stodola behandelten Spezialfall *m* = 2 (die Scheibe gleicher Festigkeit) etwas näher ein. Bekanntlich hängt die Gestalt der Differentialgleichung Stodolas für die Radialverschiebung (Gl. (4) in dem zitierten Aufsatz Malkins) vom Scheibenprofil ab; das Bestreben, sie auf eine erforschte, nämlich die sogenannte hypergeometrische Form zu bringen, führte Fischer zu der genannten Lösungsklasse.

Dieser Hinweis auf die zum Ausarbeiten weiterer praktischer Lösungen anregende Arbeit Fischers vermag natürlich Malkins Verdienst keineswegs zu schmälern, auf andern Wege zwei spezielle Exponentialprofile (mit *m* = 4/3 und *m* = 2/3) entdeckt, als brauchbar erkannt und vollständig durchgerechnet zu haben, deren eines zu geschlossenen Ausdrücken für die Spannungen führt, während das andere diese zwar von zwei unendlichen Reihen abhängig macht, die Malkin aber in handlicher Weise tabelliert hat. Damit hat er das geliefert, was die Technik verlangen muss: eine wohlbestimmte und doch anpassungsfähige, einfache und technisch realisierbare Lösung.

Bei dieser Gelegenheit sei auf ein Hilfsmittel zur Lösung des Scheibenproblems (und allgemein von Randwertaufgaben linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung) hingewiesen, das von A. Fischer entwickelte „Integralrelief“. Es dient dazu, die rechnerische Bestimmung der beiden Integrationskonstanten wie auch die darauffolgende numerische Berechnung des partikulären Integrals in Funktion der Variablen auf nomographischem Wege zu umgehen. (Vergleiche HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslowakischen Republik, 1933, Heft 1/2).