**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung

**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

**Band:** 103/104 (1934)

**Heft:** 23

**Artikel:** Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz

**Autor:** Kryloff, Niklaus / Bogoliuboff, Niklaus

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-83224

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 25.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

INHALT: Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz. — Die Verlegung der Bahnlinie Wylerfeld-Bern an die Lorrainehalde. — Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. — Das Schweizerhaus in der Pariser Cité Universitaire. — Mitteilungen: Lagerspiele für hohe Drehzahlen. Römische Funde und Ausgrabungen in Trier. Das Comité Permanent International des Architectes. Undurchsichtiges Glas. Dolder-Wellenbad in Zürich. Eine Schwebebahn in das Claridengebiet (Kt. Glarus). — Schweiz. Vereinigung für Gesundheitstechnik. — Schweiz. Verband für die Materialprüfungen der Technik. — Schweizerischer Rhone-Rheinschiffahrtsverband, Sektion Ostschweiz.

Band 103 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 23

# Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz.

Von Prof. Dr. NIKLAUS KRYLOFF u. Dr. NIKLAUS BOGOLIUBOFF, Kieff.

(Schluss von Seite 257.)

§ 7. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den für die Anwendungen besonders wichtigen quasi-linearen Fall und machen wir ausserdem folgende in praktischen Problemen gewöhnlich erfüllten Voraussetzungen: Die äussere erregende Kraft und die Reibungskraft sind so klein (oder dann die Frequenz $\alpha/p$ so gross), dass im Laufe einer Zeitspanne von der Grössenordnung $\frac{2\pi p}{\alpha}$ die Grössen $\Theta$ und $a$ sich nur sehr wenig verändern können, da ja unter der gemachten Voraussetzung $\omega \sim \frac{\alpha}{p}$ auch die auf der rechten Seite von (32) figurierende Differenz $\omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2}$ klein ist.

Dank der Quasi-Linearität haben wir in erster Annäherung $y = a \cos w$, sodass wir in den Gl. (32)

$$y_w' \, y_{wa}'' - y_{w^2}'' \, y_a' = a$$

setzen können. Mitteln wir nun die Gl. (32) über den Zeitabschnitt $\frac{2\pi p}{\alpha}$, indem wir (auf Grund der getroffenen Annahme) bei der Integration die Grössen $a$, $\Theta$, $\dot{a}$, $\dot{\Theta}$ als konstant behandeln:

$$a \frac{\alpha}{p^2} \dot{\Theta} = - \frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} \left\{ \left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) y_{w^2}'' + F \cos \alpha t - f\left( \frac{\alpha}{p} y_w' \right) \right\} y_a' \, dt,$$

$$a \frac{\alpha}{p} \dot{a} = \frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} \left\{ \left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) y_{w^2}'' + F \cos \alpha t - f\left( \frac{\alpha}{p} y_w' \right) \right\} y_w' \, dt.$$

Tauschen wir die Integrationsvariable $t$ gegen $w = \frac{\alpha t + \Theta}{p}$ und beachten wir die folgenden, aus (20) fliessenden Beziehungen:

$$\frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_{w^2}'' \, y_w' \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} y_{w^2}'' \, y_w' \, dw = 0,$$

$$\frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_{w^2}'' \, y_a' \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} y_{w^2}'' \, y_a' \, dw = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} y_w'^2 \, dw,$$

$$\frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_a' \, F \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_a' \, F \cos (pw - \Theta) \, dw = \frac{F}{2} \frac{\partial g_p(a)}{\partial a} \cos \Theta,$$

$$\frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} y_w' \, F \cos \alpha t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_w' \, F \cos (pw - \Theta) \, dw = - \frac{F}{2} p \, g_p(a) \sin \Theta.$$

Berücksichtigen wir noch, dass im Rahmen der quasi-linearen Theorie

$$\frac{\alpha}{2\pi p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} f\left( \frac{\alpha}{p} y_w' \right) y_a' \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left( \frac{\alpha}{p} y_w' \right) y_a' \, dw =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left( - \frac{\alpha}{p} a \sin w \right) \cos w \, dw =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial w} \left[ \int_0^{\sin w} f\left( - \frac{\alpha}{p} a \, \zeta \right) d\zeta \right] dw = 0,$$

so bekommen wir:

$$\left. \begin{aligned} 2a \frac{\alpha}{p^2} \dot{\Theta} &= \left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{2\pi} y_w'^2 \, dw - F \frac{\partial g_p(a)}{\partial a} \cos \Theta \\ 2a \frac{\alpha}{p^2} \dot{a} &= - F g_p(a) \sin \Theta - \frac{\Phi(a)}{p} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

wobei

$$\Phi(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left( \frac{\alpha}{p} y_w' \right) y_w' \, dw \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Immer im Rahmen der quasi-linearen Theorie kann man ausserdem $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{2\pi} y_w'^2 \, dw = a$ und

$$\Phi(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left( \frac{\alpha}{p} a \sin w \right) a \sin w \, dw \quad . \quad . \quad (35)$$

setzen. Die Gl. (32) nehmen dann folgende endgültige Form an:

$$\left. \begin{aligned} 2a \frac{\alpha}{p^2} \dot{\Theta} &= \left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) a - F \frac{\partial g_p(a)}{\partial a} \cos \Theta \\ 2a \frac{\alpha}{p^2} \dot{a} &= - \left\{ F g_p(a) \sin \Theta + \frac{\Phi(a)}{p} \right\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (36)$$

Da $y(w, a)$ definitionsgemäss Gl. (22) befriedigt, gelten dabei die oben abgeleiteten Formeln:

$$g_1(a) = a, \; g_p(a) \underset{p=2,3\ldots}{=} \frac{1}{p^2 \omega^2 - n^2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(a \cos w) \cos p w \, dw \cong$$

$$\frac{1}{(p^2 - 1) n^2} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(a \cos w) \cos p w \, dw.$$

Indem wir zur Ermittlung der stationären Lösungen in den Gleichungen (36) $a =$ konst, $\Theta =$ konst. setzen, erhalten wir:

$$\left( \omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right) a - F \frac{\partial g_p(a)}{\partial a} \cos \Theta = 0 \quad . \quad . \quad (37)$$

$$F p \, g_p(a) \sin \Theta + \Phi(a) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Die diesen Lösungen entsprechenden stationären Schwingungen erscheinen demnach, wie oben angezeigt, in der Gestalt ungedämpfter Eigenschwingungen von der Frequenz $\alpha/p$, deren Amplitude und Phase sich aus (37) und (38) bestimmen. Wir sehen also, dass die stationären Schwingungen mit einem Unterton der erregenden Frequenz synchronisiert sind und demgemäss die Perioden $2\pi p/\alpha$ besitzen.

Bemerken wir übrigens, dass in Gl. (38) die Grösse

$$W_1 = - \pi p \, g_p F \sin \Theta = \int_0^{2\pi} F \cos (p w - \Theta) \, y_w'(w, a) \, dw =$$

$$\frac{\alpha}{p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} F \cos \alpha t \cdot y_w' \left( \frac{\alpha t + \Theta}{p}, a \right) dt = \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} F \cos \alpha t \cdot \dot{x} \, dt$$

die von der erregenden Kraft während der Schwingungsperiode geleistete Arbeit ist.

Die Grösse $W_2 = \pi\, \Phi(a) =$

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha}{p} y_w'\right) y_w'\, dw = \frac{\alpha}{p} \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} f\left(\frac{\alpha}{p} y_w'\right) y_w'\, dt = \int_0^{\frac{2\pi p}{\alpha}} f(\dot{x})\, \dot{x}\, dt$$

aber stellt die in der selben Zeitspanne verbrauchte Energie dar. Die in der Form $W_1 = W_2$ darstellbare Gleichung (38) drückt somit nichts anderes aus als die *Energiebilanz*. Ebenso kann die Gl. (37) als die Bedingung der *Phasenbalance* angesehen werden.[10])

§ 8. Die Wichtigkeit des Studiums der stationären Schwingungen wird durch den Umstand verdoppelt, dass in allen jenen wichtigen Fällen, *wo die Charakteristik der Reibung keine „fallenden" Teile hat,* d. h. wenn die Reibungswärme $\Phi(a)$ zusammen mit der Schwingungsamplitude wächst, *jede Schwingung sich der stationären asymptotisch nähert,* wie man mathematisch, von den Gl. (36) ausgehend, beweisen kann. Ausserdem kann man zeigen, dass *wenn das System sich bei Wirkbeginn der erregenden Kraft in Ruhe befindet, die geweckte Schwingung sich jenem stabilen stationären Regime nähern wird, das die kleinste Amplitude aufweist.* Dies geschieht in grossen Zügen folgendermassen: Die Schwingungsamplitude selber führt eine Schwingbewegung mit einer gewissen „langsamen" Schlagfrequenz um ihren stationären (den kleinstmöglichen stabilen) Betrag aus, wobei sich die Schwingungsausschläge dank der dämpfenden Wirkung der Reibung ständig vermindern; die Schwankung der Amplitude erlischt sozusagen; das selbe geschieht mit der Phase. In dieser Beziehung vollzieht sich der Uebergangsprozess qualitativ wie im linearen Fall.

Es ist indessen zu bemerken, dass das soeben Gesagte nur dann richtig ist, wenn die Reibungscharakteristik keine fallenden Teile hat; andernfalls können die Amplitudenschwingungen bei der Resonanz überhaupt nicht erlöschen, sondern werden im Gegenteil erzeugt. Dieser Umstand allein gibt eine klare Vorstellung von der Gefährlichkeit der Resonanz in Konstruktionsteilen von fallender Reibungscharakteristik. Uebrigens werden in der Radiotechnik, Akustik und einer Reihe anderer angewandter Disziplinen, wo die Resonanzerscheinungen als nützlich angesehen werden, fallende „Reibungs"charakteristiken in weitem Masse ausgenützt, wobei in gewissen Amplitudenbereichen die „Reibung" sogar negativ wird.[11])

§ 9. Indem wir uns nun der Betrachtung der Gl. (37) und (38) zuwenden, bemerken wir, dass

$$\sin\Theta = \frac{\Phi(a)}{F p\, g_p(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Dem entsprechen zwei Werte für den cosinus:

$$\cos\Theta = -\sqrt{1 - \left[\frac{\Phi(a)}{F p\, g_p(a)}\right]^2} = -u(a) \quad \text{und}$$

$$\cos\Theta = +\sqrt{1 - \left[\frac{\Phi(a)}{F p\, g_p(a)}\right]^2} = +u(a), \quad . \quad (40)$$

die, in Gl. (37) eingesetzt, zwei Gleichungen liefern:

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 = \omega^2 + \frac{F}{a} \frac{\partial g_p(a)}{\partial a}\, u(a), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2 = \omega^2 - \frac{F}{a} \frac{\partial g_p(a)}{\partial a}\, u(a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen sind die stationären Amplituden. Ihr Sinn wird sich am leichtesten aus einer Skizze erschliessen, in der wir $\alpha$ in Funktion von $a$ auftragen. Wir erhalten so die sogenannten „krummen Resonanzen", die den Zusammenhang zwischen der stationären Amplitude und der erregenden Frequenz $\alpha$ darstellen (Abb. 4 und 5).

[10]) Diese aus der Radiotechnik übernommene Ausdrucksweise rührt davon her, dass $\Theta$ in den Anwendungen, z. B. in dem unten angeführten Beispiel, gewöhnlich als Differenz zweier Winkel auftritt.

[11]) Die Anwendung der Methoden der Nicht-linearen Mechanik auf Probleme dieser Art bildet den Gegenstand einer im Technisch-Theoretischen Staatsverlag, Moskau, erschienenen Abhandlung der Verfasser: „Méthodes nouvelles de la Mécanique Non-Linéaire dans leur application à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampe, Partie première". 250 S.

Zur Untersuchung der Stabilität irgend einer bestimmten stationären Amplitude verfahren wir wie üblich. Sei $\Theta_0$ die $a_0$ entsprechende Phase. In den Gl. (36):

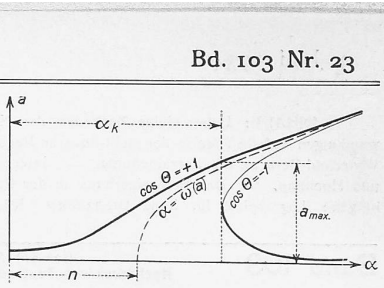


Abb. 4

$$\left.\begin{aligned} 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot{\Theta} &= Q(a, \Theta), \quad Q(a, \Theta) = \left(\omega^2 - \frac{\alpha^2}{p^2}\right)a - F\frac{\partial g_p}{\partial a}\cos\Theta \\ 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot{a} &= R(a, \Theta), \quad R(a, \Theta) = -F g_p \sin\Theta - \frac{\Phi(a)}{p} \end{aligned}\right\} (43)$$

setzen wir $a = a_0 + \varepsilon, \quad \Theta = \Theta_0 + \delta,$

wo $\varepsilon$ und $\delta$ gewisse, von erster Ordnung unendlich kleine Grössen sind, und erhalten bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$Q_a'\,\varepsilon + Q_\theta'\,\delta - 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot{\delta} = 0$$

$$R_a'\,\varepsilon - 2a\frac{\alpha}{p^2}\dot{\varepsilon} + R_\theta'\,\delta = 0$$

Die Stabilitätsbedingung fordert, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$x^2 - (R_a' + Q_\theta')\,x + (R_a'\,R_\theta' - Q_a'\,R_\theta') = 0$$

negative Realteile haben, dass also erstens $-(R_a' + Q_\theta') = \frac{\Phi'}{p} > 0$ ist — was wegen der als steigend vorausgesetzten Reibungscharakteristik zutrifft — und dass zweitens

$$R_a'\,Q_\theta' - Q_a'\,R_\theta' > 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Diese Bedingung lässt sich anders formulieren. Die Gl. (43) besagen nämlich für $a = a_0$ und $\Theta = \Theta_0$:

$$Q(a_0, \Theta_0) = 0, \qquad R(a_0, \Theta_0) = 0.$$

In der ersten dieser Gleichungen tritt die unabhängige Variable $\alpha$, der $a_0$ und $\Theta_0$ entsprechen, explizite auf. Die Differentiation der beiden Gleichungen nach $\alpha$ liefert:

$$Q_a'\frac{da}{d\alpha} + Q_\theta'\frac{d\Theta}{d\alpha} = -Q_\alpha'$$

$$R_a'\frac{da}{d\alpha} + R_\theta'\frac{d\Theta}{d\alpha} = 0$$

$$\therefore \quad (R_a'\,Q_\theta' - Q_a'\,R_\theta')\frac{da}{d\alpha} = Q_\alpha'\,R_\theta' = F g_p \cos\Theta\,\frac{2a\alpha}{p^2}.$$

Die Stabilitätsbedingung (44) ist somit folgender Bedingung äquivalent:

$$\frac{da}{d\alpha} < 0, \text{ wenn } g_p\cos\Theta < 0; \quad \frac{da}{d\alpha} > 0, \text{ wenn } g_p\cos\Theta > 0. \quad (45)$$

§ 10. Betrachten wir den Fall der Hauptresonanz ($p = 1$) genauer. Setzen wir

$$k(a) = \frac{1}{a^2\alpha}\,\Phi(a) = \frac{2}{\pi a \alpha}\int_0^{\pi} f(\alpha a \sin w)\sin w\, dw.$$

Bei linearer Reibung

$$f(\dot{x}) = k\,\dot{x}$$

wird $k(a)$ offenbar der konstante Reibungskoeffizient $k$ sein.

Bemerken wir nun, dass die beiden Gl. (41) und (42) in eine einzige vereinigt werden können:

$$[(\omega^2 - \alpha^2)^2 + k^2\alpha^2]\,a^2 = F^2, \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

die formal die selbe Gestalt wie die entsprechende Gleichung für das bekannte lineare System hat. Der prinzipielle Unterschied wird durch die Abhängigkeit der Frequenz $\omega$ von der Amplitude $a$ hineingebracht.

Nehmen wir als Beispiel den Fall, wo $\omega^2 = n^2 + \lambda a^2$, $\lambda > 0$. Dann erhalten wir bei Abwesenheit von Reibung ($k = 0$):

$$\alpha^2 = n^2 + \lambda a^2 + \frac{F}{a}\cos\Theta = -1$$

$$\text{und} \quad \alpha^2 = n^2 + \lambda a^2 - \frac{F}{a}\cos\Theta = +1.$$

Wir haben demgemäss die „krumme Resonanz" von Abb. 4; die dick ausgezogenen Teile entsprechen stabilen Amplituden.

Da sich die Schwingung mit der kleinstmöglichen stabilen Amplitude einstellen wird (wenn, wie vorausgesetzt, das System sich vorher in Ruhe befand), so wird, wie aus Abb. 4 hervorgeht, die Amplitude sogar bei Abwesenheit von Reibung begrenzt sein.

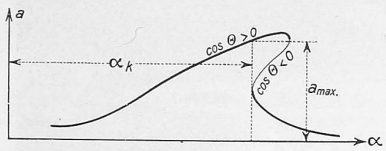

Abb. 5

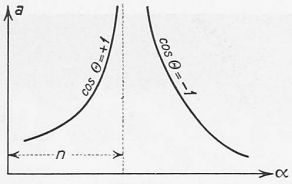

Abb. 6

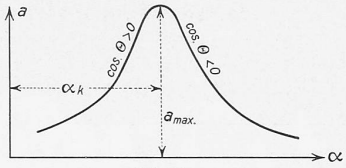

Abb. 7

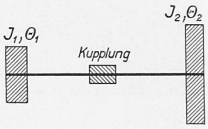

Abb. 8

Zur Bestimmung des kritischen Wertes $\alpha_k$ haben wir die Gleichungen

$$\frac{\partial\left(n^2 + \lambda a^2 + \frac{F}{a}\right)}{\partial a} = 0, \qquad \alpha_k^2 = n^2 + \lambda a^2 + \frac{F}{a}.$$

Aufgelöst:

$$\alpha_k^2 = n^2 + 3\lambda\left(\frac{F}{2\lambda}\right)^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Die maximale Amplitude bei Resonanz wird

$$a_{\max} = \left(\frac{F}{2\lambda}\right)^{1/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Was die Reibung betrifft, so beschränken wir uns darauf, ihren Einfluss in Abb. 5 anzudeuten.

Derartige Fälle, wo die Amplitude sich sogar bei Abwesenheit von Reibung allein kraft der Nicht-Linearität beschränkt, werden wir Fälle *aktiver Nicht-Linearität* nennen. Offenbar ist es bei der Konstruktion nicht-linearer Kupplungen äusserst vorteilhaft, wenn sich die Nicht-Linearität als aktiv erweist, denn dann wird es nicht nötig sein, die Reibung zu vergrössern. Die Fälle hingegen, wo die Nicht-Linearität für sich allein ohne Reibung die Schwingungsamplituden nicht zu beschränken vermag, werden wir Fälle *passiver Nicht-Linearität* nennen.

Passiv-nicht-linear ist z. B. die Feder von Abb. 1 (S. 256). In der Tat ist für sie, wie wir sahen, $\omega^2 = n^2 + \frac{4}{\pi}\frac{h}{a}$, sodass die Gl. (41), (42) liefern:

$$\alpha^2 = n^2 + \left(\frac{4}{\pi}h + F\right)\frac{1}{a}, \quad \cos\Theta = -1$$

und

$$\alpha^2 = n^2 + \left(\frac{4}{\pi}h - F\right)\frac{1}{a}, \quad \cos\Theta = +1.$$

Folglich werden für $F > \frac{4}{\pi}h$

die krummen Resonanzen die Gestalt von Abb. 6 annehmen, ganz wie im linearen Fall. Die maximale Amplitude wird unendlich und bei

$$\alpha^2 = n^2 \qquad \text{„erreicht“}.$$

Untersuchen wir jetzt den Einfluss der Reibung, die wir der Einfachheit halber linear annehmen wollen. Wir erhalten auf Grund der Gl. (46)

$$\left[(n^2 - \alpha^2)\,a + \frac{4}{\pi}h\right]^2 + k^2\alpha^2 a^2 = F^2.$$

$$\therefore a = -\frac{\frac{2}{\pi}h\,(n^2-\alpha^2)}{(n^2-\alpha^2)^2 + k^2\alpha^2} + \sqrt{\frac{F^2}{(n^2-\alpha^2)^2 + k^2\alpha^2} + \frac{\frac{4}{\pi^2}h^2\,(n^2-\alpha^2)^2}{[(n^2-\alpha^2)^2 + k^2\alpha^2]^2}}$$

Die krumme Resonanz wird die in Abb. 7 schematisch dargestellte Form haben. Zur Bestimmung von $\alpha_k$ und $a_{\max}$ haben wir die folgenden Beziehungen:

$$a_{\max}^2 = \frac{F^2}{k^2\alpha_k^2 + \frac{k^4}{4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

$$\alpha_k^2 = n^2 - \frac{k^2}{2} + \frac{4}{\pi}\frac{h}{a_{\max}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Gl. (49), welche die maximale Amplitude bestimmt, ist übrigens genau die selbe wie bei den gewöhnlichen linearen Schwingungen. Aus (49) und (50) folgt:

$$\left(\frac{\alpha_k}{n}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{k}{2n}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\frac{4}{\pi}h}{F}\right)^2\right] + \left(\frac{\frac{4}{\pi}h}{F}\right)\frac{k}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{2n}\right)^2\left[1 - \left(\frac{\frac{4}{\pi}h}{F}\right)^2\right]}. \quad (51)$$

Ist speziell

$$\left(\frac{k}{2n}\right)^2 \ll 1,$$

so bekommen wir die vereinfachten Formeln:

$$a_{\max} = \frac{F}{nk}, \quad \left(\frac{\alpha_k}{n}\right)^2 = 1 + \frac{k}{n}\frac{\frac{4}{\pi}h}{F}.$$

In diesem Fall besteht somit die Rolle der Nicht-Linearität bloss in einer Verschiebung der kritischen Resonanzfrequenz und nicht, wie vorhin, in einer Verminderung der Resonanzamplitude.

§ 11. Wie die erhaltenen Ergebnisse anzuwenden sind, sei etwa am Beispiel der Drehschwingungen der Kurbelwelle eines Flugmotors kurz angedeutet. Schematisch ist das Schwingungssystem auf Abb. 8 skizziert. Bezeichnen $I_1$ und $I_2$ die Trägheitsmomente der Kurbel-, bzw. Propellerwelle, $M(\Theta)$ das von der relativen Verdrehung $\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$ abhängige Drehmoment der Kupplung, $\chi$ den Koeffizienten der zu $\dot{\Theta}$ proportional vorausgesetzten Dämpfung, $E_1(t)$ und $E_2(t)$ die störenden Kräfte, so folgt aus

$$I_1\,\ddot{\Theta}_1 + \chi\,\dot{\Theta} + M(\Theta) = E_1(t)$$

und

$$I_2\,\ddot{\Theta}_2 - \chi\,\dot{\Theta} - M(\Theta) = E_2(t)$$

mit

$$\chi\frac{I_1 + I_2}{I_1\,I_2} = k \quad \text{und} \quad \frac{I_1 + I_2}{I_1\,I_2}M(\Theta) = p(\Theta):$$

$$\ddot{\Theta} + k\,\dot{\Theta} + p(\Theta) = F\cos\alpha\,t,$$

wenn von $\frac{E_1}{I_1} - \frac{E_2}{I_2}$ nur die Grundschwingung $F\cos\alpha\,t$ berücksichtigt wird. Für die „L. Z. Kupplung“ der Luftschiffe „Graf Zeppelin“ hat das Moment $M$ in Abhängigkeit von $\Theta$ den Charakter von Abb. 2 (S. 256). Wir haben also den Fall der nicht-linearen Feder von Abb. 1, die, wie wir sahen, den für die Arbeit der Welle ungünstigen Charakter der passiven Nicht-Linearität aufweist. Die Einsetzung der Wellen- und Kupplungsdaten des im Jahre 1929 zu Schaden gekommenen „Graf Zeppelin“[12]) in die Formeln (51) und (49) wäre von Interesse.

Zum Schlusse weisen wir auf die Möglichkeit hin, *mit Hilfe der dargelegten Methode den passenden Typ einer nicht-linearen Kupplung zwecks Abschwächung der Resonanz rationell auszuwählen,* was sich als ein sehr aktuelles Problem der modernen Technik erweist.

*

Als Arbeiten der Verfasser auf dem Gebiete der Nicht-linearen Mechanik und ihrer Anwendungen seien im Anschluss hieran noch folgende erwähnt:

1. „*Quelques exemples d'oscillations non linéaires*“. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 194, p. 957 (14/III, 1932).

2. „*Sur le phénomène de l'entraînement en radiotechnique*“. Ebenda, t. 194, p. 1064 (21/III, 1932).

3. „*Les phénomènes de démultiplication de fréquence en radiotechnique*“. Ebenda, t. 194, p. 1119 (29/III, 1932).

4. „*Sur quelques propriétés générales des résonances dans la mécanique non linéaire*“. Ebenda, t. 197, p. 903 (23/X, 1933).

5. „*Problèmes fondamentaux de la Mécanique non Linéaire*“. Revue générale des Sciences (N° du 15/I, 1933).

6. „*Recherches sur la stabilité dynamique des machines synchrones*“ (russisch, mit einem französischen Résumé), 100 S., Kieff 1932.

7. „*Recherches sur la stabilité longitudinale des avions*“ (russisch, mit einem französischen Vorwort), 60 S., Kieff 1932.

8. „*Recherches sur la stabilité statique et la stabilité dynamique des machines synchrones*“. Rapport N° 14 à la 3me Section du Congrès International d'Electricité, Paris, 1932.

9. „*Problèmes fondamentaux de la Mécanique non Linéaire*“ (russisch). Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, N° 4, 1933.

10. „*Fundamental Problems of the non linéar méchanics.* Congrès International des Mathématiciens, Zurich, 1932.

11. „*Méthodes nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampe. Partie première. Etude des régimes stationnaires dans le cas de l'absence des forces extérieures périodiques*“. N° 7 der Sammlung wissenschaftlicher Abhand-

[12]) Vgl. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1929, 18. Heft, S. 465 fg.

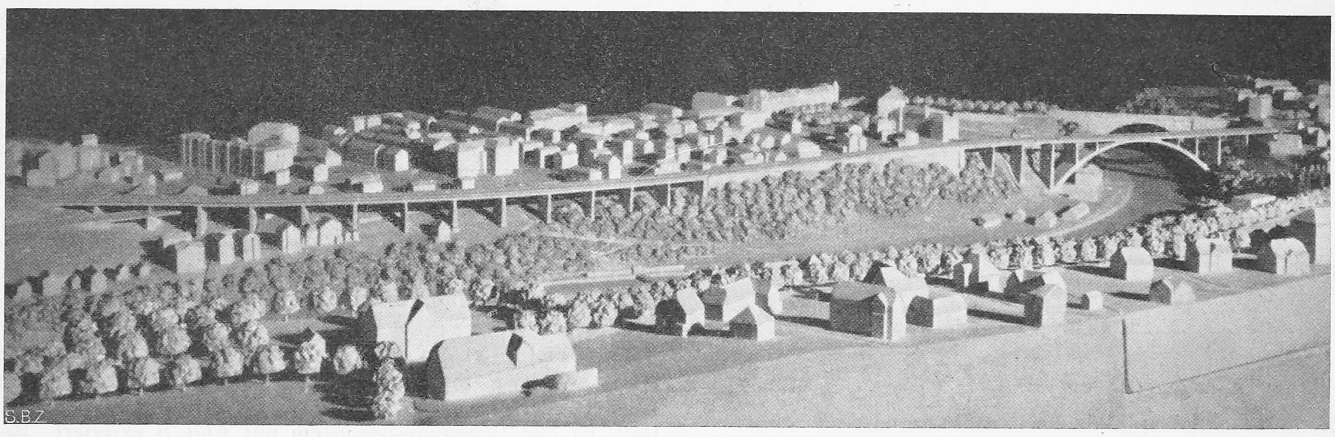


Abb. 7. Modellansicht der Lorrainhalde mit Viadukt über die Talwegmulde (links), geschlossenem Bauwerk (Mitte, vergl. Querschnitt B) und Aareübergang (rechts), dahinter die Lorraine-Strassenbrücke.

lungen von Prof. Dr. N. Kryloff und Dr. N. Bogoliùboff (russisch, mit einem französichen Vorwort), 250 S., Moskau (im Druck).

12. „*Méthodes nouvelles de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant*". 100 S. (im Druck).

13. „*Les méthodes symboliques de la Mécanique non Linéaire dans leur application à l'étude de résonance dans l'oscillateur*" (russisch, im Druck), Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1934.

14. Theory of Vibrations from the standpoint of the Non-linear Mechanics with Applications to some Engineering Problems (in Vorbereitung).

## Die Verlegung der Bahnlinie Wylerfeld-Bern an die Lorrainehalde.

Von Ing. A. BÜHLER, Sektionschef für Brückenbau der S.B.B., Bern.

Bei der Abstimmung am 20. November 1932 über die Botschaft des Stadtrates an die Gemeinde Bern, betreffend die neue Zufahrtslinie der S. B. B. vom Wylerfeld zum Hauptbahnhof Bern, wurde die Vereinbarung zwischen der Generaldirektion der S. B. B. und der Einwohnergemeinde Bern vom 15. Juli 1932 gutgeheissen; der Verwaltungsrat der S. B. B. hat ihr am 26. Juni 1933 zugestimmt. Darnach wird der Bau einer neuen viergeleisigen Linie in Aussicht genommen, die bei der alten Waffenfabrik auf dem Wyler von der jetzigen Linie abzweigt, sich hierauf gegen den Rand des aareseitigen Lorraineplateau hinzieht und sodann über die Aare und Schützenmatte hinweg zum gegenwärtigen Hauptbahnhof führt. Dies ist mit wenigen Worten umschrieben das Ergebnis langjähriger Vorstudien, sowie der zwischen Bahnverwaltung und städtischen Behörden gepflogenen Verhandlungen. [Vergl. frühere Studien in „S.B.Z." Bd. 96, S. 4 u. S. 288, Juli u. Nov. 1930. Red.]

Im Sinne der genannten Vereinbarung oblag es der Bahnverwaltung, die Brückenbauten so auszugestalten, dass sie in städtebaulicher Beziehung sich möglichst gut in die gegebenen Verhältnisse einpassen werden; die Linienverlegung stellt sich nämlich in der Hauptsache als eine ununterbrochene Folge von Brücken mit einer Länge von 1100 m dar. Mit diesen Studien wurde die Sektion für Brückenbau bei der Generaldirektion der S. B. B. betraut und ihr als Berater Arch. H. Klauser (Bern) beigegeben. Zur Abklärung einer Reihe baulicher Fragen und Einzelheiten wurden einige Ingenieurbureaux und Stahlbaufirmen beigezogen, sodass die Voranschläge in kurzer Zeit so eingehend ausgearbeitet werden konnten, wie dies bei derartigen Linienverlegungen kaum oft geschehen ist.

Aber auch in ästhetischer Beziehung sind alle Anstrengungen unternommen worden, um zu einem Ergebnis zu kommen, das den gestellten Anforderungen gerecht wird. Aus rund 50 verschiedenen Brückenanordnungen wurden diejenigen ausgewählt und in Bildern und Modellen dargestellt, bei denen die technischen, wirtschaftlichen und ästhetischen Forderungen als am besten erfüllt angesehen werden durften.

Die massgebenden Organe der Bahnverwaltung haben schliesslich nach eingehenden Erwägungen einem massiven Bauwerk den Vorzug gegeben. Bei diesem kann das erforderliche Schotterbett auf die ganze Brückenlänge ohne weiteres durchgeführt werden, was auch zur Schalldämpfung nötig ist. Diesen Vorschlägen haben der Gemeinderat der Stadt Bern, die Stadtausbau-Kommission und auch der Baudirektor des Kantons Bern einhellig beigestimmt. Die als beste Lösung der Linienverlegung an die Lorrainehalde angesehene Anordnung sieht eine kleine Verschiebung des Tracé gegenüber dem Vorprojekt der Vereinbarung mit der Stadt Bern vor, und zwar in dem Sinne, dass die Linie von der eigentlichen Steilhalde weg und etwas mehr auf das Lorraineplateau gelegt würde. Im Hinblick auf die umfangreichen Vorarbeiten und die für schweizerische Verhältnisse grossen Bauwerke rechtfertigen sich einige Angaben über die zu erstellenden Brücken. Eine allgemein gehaltene Darstellung der Entwürfe dürfte ferner darum erwünscht sein, weil bei einer spätern Ausschreibung der Arbeiten auch

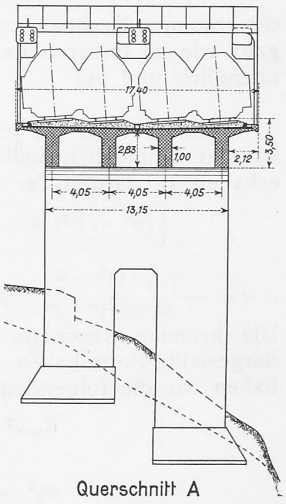


Abb. 2. Querschnitt durch den Viadukt über die Talwegmulde. Masstab 1 : 500.

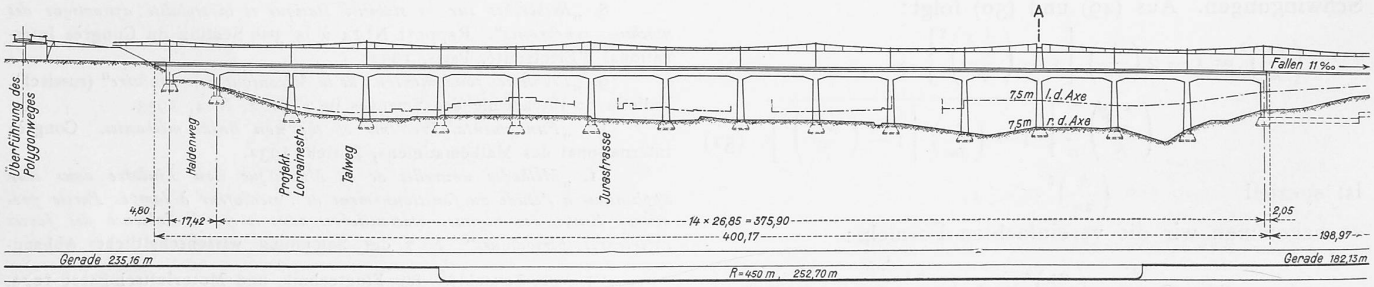


Abb. 1. Projektierter Viadukt über die Talwegmulde, Masstab 1 : 2500, mit Terrainlinien je 7,5 m rechts und links der Axe.