

Zeitschrift:	Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber:	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band:	103/104 (1934)
Heft:	22
Artikel:	Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz
Autor:	Kryloff, Niklaus / Bogoliuboff, Niklaus
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-83220

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz. — Eisen-Beton-Verbundkonstruktionen Alpha. — Das neue Krankenhaus von Colmar. — Theoretische Wartezeiten bei einer Bausparkasse. — Mitteilungen: Die neue deutsche Wettbewerbsordnung. Der Braunkohlen-Abbau in Hostens bei Bordeaux. Neue Wege zu billiger

Spitzenkraft. Eisenbahnfedern und ihre Fertigung. Autofähre über den Firth of Forth, Schottland. — Nekrolog: Max Carstanjen. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Lignum schweizerische Arbeitsgemeinschaft für das Holz. — Elektrotechnische Abteilung der E. T. H. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 103

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 22

Ueber einige Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihren Anwendungen auf die Theorie der nicht-linearen Resonanz.

Von Prof. Dr. NIKLAUS KRYLOFF u. Dr. NIKLAUS BOGOLIUBOFF, Kieff.¹⁾

Schwingungsfähige Systeme, bei denen die „elastische“ Kraft nicht dem Hookeschen Gesetz gehorcht, oder die Reibung der Geschwindigkeit nicht proportional ist, erlangen in der Technik immer grössere Bedeutung. Der folgende Aufsatz ist ein erster Versuch, die von den Verfassern zur Untersuchung derartiger Schwingungen ausgearbeiteten Methoden der Nicht-linearen Mechanik anhand des einfachsten Falls eines harmonischen Störungen unterworfenen nicht-linearen Systems von einem Freiheitsgrad zu popularisieren. Es werden Verfahren angegeben zur Auffindung der ungedämpften Eigenschwingungen solcher Systeme, sowie der erzwungenen Schwingungen in der Nähe der Resonanz. Diese tritt nicht nur, wie im linearen Fall, bei Übereinstimmung der Eigenfrequenz mit der Störfrequenz selber ein, sondern zudem bei Koinzidenz mit einem Unterton der harmonischen Störung. Für die stationären Lösungen wird eine Stabilitätsbedingung hergeleitet. Die Wichtigkeit der folgenden Merkmale wird erläutert: steigende und fallende Reibungscharakteristik, aktive und passive Nicht-Linearität. Verschiedene „krumme Resonanzen“ werden gezeigt. Als Anwendungsbeispiel wird zum Schluss auf einen Flugmotor hingewiesen, dessen Kurbelwelle, mit der Propellerwelle durch eine „LZ“-Kupplung verbunden, gefährlichen Drehschwingungen ausgesetzt sein kann.

§ 1. Die nicht-linearen, in verschiedenen Problemen der Technik angetroffenen Schwingungen ziehen in der letzten Zeit besondere Aufmerksamkeit auf sich.²⁾ Dies ist einer Reihe von Umständen zu verdanken, wie z. B. der Verwendung von elastischen Systemen in der Technik, bei denen die rücktreibende Kraft der Deformation nicht proportional ist. Elastische Systeme solcher Art mit „nicht-linearer“ Charakteristik treten bei der Verwendung von Stoffen auf, die dem Hooke'schen Gesetz offenkundig nicht gehorchen (Gummi, Beton, Gusseisen usw.), ferner bei der Einführung spezieller Konstruktionen, die in die Charakteristiken ein Element der Nicht-Linearität tragen (z. B. die sog. nicht-linearen Federn) usw. Ausserdem erscheint die Nicht-Linearität mechanischer Systeme oft als nicht-lineare Abhängigkeit der Reibungskräfte von der Geschwindigkeit (trockene Reibung).

Die Eigenschaften der nicht-linearen mechanischen Systeme sind im allgemeinen sehr wenig erforscht, was die Möglichkeiten ihrer praktischen Anwendung einengt. Dies gilt besonders hinsichtlich eines so wichtigen technischen Phänomens, wie der Resonanz, die bei nicht-linearen Systemen unter völlig anderen Bedingungen verläuft und sich tief von der Resonanz linearer Systeme unterscheidet.

Der Grund für die verhältnismässig geringe Erforschtheit der nicht-linearen Schwingungen liegt am Fehlen eines passenden mathematischen Apparates, was sich seinerseits aus den Schwierigkeiten erklärt, die bei den Versuchen einer auch nur qualitativen Auflösung der nicht-linearen Differentialgleichungen auftauchen, denn die bezüglichen numerischen und graphischen Verfahren sind im Allgemeinen aus verständlichen Gründen nicht zu gebrauchen.

Die Ausarbeitung von dieser schwierigen und wichtigen Frage angemessenen mathematischen Methoden erscheint deshalb unerlässlich, umso mehr als auch die experimentelle Erforschung gestützt auf eine vorgängige Theorie produktiver wird, die es erlaubt, das zu untersuchende Phänomen, wenn auch nur grosso modo, vorherzusehen. Diese Methoden sind von den Verfassern des vorliegenden Aufsatzes in einer Reihe von (teilweise noch ungedruckten) Arbeiten³⁾ gegeben worden. Zusammen machen sie die

Darstellung der Lehre aus, der die Verfasser die Bezeichnung „Nicht-Lineare Mechanik“ darum beilegen, weil diese Methoden speziell im Hinblick auf nicht-lineare Schwingungen verschiedener Art geschaffen worden sind und deshalb in einer Reihe von angewandten Wissenschaften Verwendung finden.

Es ist klar, dass diese Methoden auch auf verschiedene Probleme der Bau-Mechanik anwendbar sind, insbesondere auf die Theorie der Fundamente, das Studium von Rahmen-Konstruktionen usw. In diesem Aufsatz werden die Methoden der Nicht-linearen Mechanik in ihrer Anwendung auf Systeme von einem Freiheitsgrad auseinandergesetzt, wobei die Darstellung, für Ingenieure bestimmt, als ein Versuch der Popularisierung dieser Methoden erscheint und darum recht elementar gehalten ist, mitunter sogar zum Schaden der mathematischen Strenge.

§ 2. Indem wir uns dem Studium der Resonanzerscheinungen in Systemen mit einem Freiheitsgrade zuwenden, wollen wir uns der Einfachheit halber auf den Fall einer harmonischen Störungsfunktion (einer sinusoidalen äusseren Kraft) beschränken. Dann wird der Gegenstand unserer Untersuchung eine Differentialgleichung der folgenden allgemeinen Gestalt sein⁴⁾:

$$\ddot{x} + p(x) = F \cos \alpha t - f(x), \dots \quad (1)$$

worin $p(x)$ die rücktreibende Kraft und $f(x)$ die Reibung — irgend eine Funktion der Geschwindigkeit — bedeuten. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall, wo im Augenblick des Störbeginns das System sich in einem der Ruhe nahen Zustand befindet, d. h. wo die anfänglichen Werte von x, \dot{x}, \ddot{x} ... sehr klein sind.⁵⁾ Wie aus den Untersuchungen der Verfasser hervorgeht, findet (wie auch physikalisch einleuchtet) Resonanz bei „annähernder“ Übereinstimmung der Störfrequenz und der Frequenz einer der Harmonischen der Eigenschwingung statt, d. h. wenn ω (die Eigenfrequenz) sich α/p nähert, wo p eine ganze Zahl ist. Der linearen Theorie zufolge, auf die man sich in Ermangelung eines passenden mathematischen Apparates häufig beschränkt, tritt Resonanz nur bei $p = 1$ auf.

Indessen hat die Praxis trotzdem gewisse Vorstellungen über das Auftreten von Resonanz beim Zusammenfallen der Störfrequenz mit Frequenzen der höheren Harmonischen.⁶⁾ Dieser, übrigens streng begründbare Vorgang wird durch die Bemerkung unmittelbar klar, dass die von der Störkraft geleistete Arbeit von der Form

$$\dot{x}(t) F \cos \alpha t dt \dots \quad (2)$$

ist, sodass die über eine hinreichend lange Zeitspanne gemittelte zugeführte Arbeit nur dann von Null verschieden ist und so den Reibungsverlust nur dann zu kompensieren vermag, wenn α angenähert mit einer der harmonischen Frequenzen der Funktion $x(t)$ zusammenfällt. In der Tat wird, wenn $x(t) = \sum_n A_n \sin(\lambda_n t + \varphi_n)$, offenbar

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \cos \alpha t dt = \sum_n \lambda_n A_n \frac{\sin[(\lambda_n - \alpha)T + \varphi_n] - \sin \varphi_n}{2(\lambda_n - \alpha)T} + \sum_n \lambda_n A_n \frac{\sin[(\lambda_n + \alpha)T + \varphi_n] - \sin \varphi_n}{2(\lambda_n + \alpha)T}.$$

⁴⁾ Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

⁵⁾ Es wird sich eine stabile Amplitude einstellen, auch wenn diese Anfangsbedingungen nicht erfüllt sind. Sind sie erfüllt, so wird sich die kleinste stabile Amplitude einstellen (siehe weiter unten). Der Beweis dieser Behauptung würde hier zu viel Raum beanspruchen.

⁶⁾ Davon spricht z. B. J. Baker, Transactions A. S. M. E., 1. c. S. 162.

¹⁾ Aus dem Russischen übersetzt von K. H. Grossmann.

²⁾ Vgl. z. B. den Aufsatz „Forced vibrations with non-linear spring constants“ von J. P. Den Hartog und S. J. Mikina, Transactions A. S. M. E. 1932, APM-54-15, S. 157 ff.

³⁾ Vgl. den Literaturnachweis am Ende des Aufsatzes.

Infolgedessen kann bei grossem T der „mittlere“ Wert des Ausdrucks (2), d. h.

$$\frac{F}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \cos \alpha t dt,$$

nur dann nicht sehr klein sein, wenn α sich einer der Frequenzen λ_n nähert. Wenn also nicht eine dieser Frequenzen wenigstens annähernd mit der Störungsfrequenz zusammenfällt, d. h. bei Abwesenheit von Resonanz, wird im Mittel jene Arbeitszufuhr nicht vorhanden sein, die im Resonanzfall das Anwachsen der Schwingungsamplitude ermöglicht.

Sagen wir nun, im Hinblick auf die Untersuchung der Gl. (1), Einiges über die ungedämpften Eigenschwingungen

$$\ddot{x} + p(x) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

In vielen praktisch wichtigen Fällen⁷⁾ bietet die Untersuchung solcher Schwingungen keine Schwierigkeit und ist bekannt.

§ 3. Nehmen wir z. B. den in der Praxis sehr häufigen Fall, wo die Störkraft mit genügender Genauigkeit durch ein kubisches Polynom dargestellt werden kann:

$$p(x) = n^2 x + \beta x^2 + \gamma x^3 \quad \dots \quad (4)$$

Mit den Ansatz $x = z(w)$, $w = \omega t + \psi$, $\psi = \text{konst}$, wobei die Funktion $z(w)$ hinsichtlich der Variablen w die Periode 2π besitzt, bekommen wir offenbar:

$$\omega^2 z'' + p(z) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Benutzen wir zur Bestimmung der Funktion z und der Frequenz ω die folgenden Zerlegungen:

$$z = a z_0 + a^2 z_1 + a^3 z_2 + \dots; \quad \omega^2 = \nu_0 + a \nu_1 + a^2 \nu_2 + \dots, \quad (6)$$

wobei wir den Funktionen z_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), die Bedingung der Periodizität (mit der Periode 2π) auferlegen. Bei Einsetzung der Reihen (6) in der Gl. (5) und Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von a erhalten wir die folgenden Beziehungen:

$$\nu_0 z_0'' + n^2 z_0 = 0, \quad \dots \quad (7)$$

$$\nu_0 z_1'' + n^2 z_1 = -\beta z_0^2 - \nu_1 z_0'' \quad \dots \quad (8)$$

Der Gleichung (7) genügen $z_0 = \cos w$; $\nu_0 = n^2$.

Eingesetzt in (8): $(z_1'' + z_1)n^2 = -\frac{\beta}{2}(1 + \cos 2w) + \nu_1 \cos w$.

Dieser Beziehung genügen die Werte: $z_1 = -\frac{\beta}{2n^2} + \frac{\beta}{6n^2} \cos 2w$, $\nu_1 = 0$.

Auf diese Weise kann man beliebig viele Glieder der Reihen (6) bestimmen. Hört man z. B. bei der dritten Potenz von a auf, bekommt man:

$$x = -\frac{\beta}{2n^2} a^2 + a \cos(\omega t + \psi) + \frac{\beta}{6n^2} a^2 \cos 2(\omega t + \psi) + \left(\frac{\gamma}{3^2 n^2} + \frac{\beta}{48 n^4} \right) a^3 \cos 3(\omega t + \psi), \quad (9)$$

worin

$$\omega^2 = n^2 + \left(\frac{3}{4} \gamma - \frac{5}{6} \frac{\beta^2}{n^2} \right) a^2, \quad \psi = \text{konst}. \quad (10)$$

Analog verfährt man offenbar, wenn $p(x)$ ein Polynom von höherem als dritten Grade ist.

§ 4. In andern, praktisch wichtigen Fällen erscheint $p(x)$ als eine gebrochene Linie. $p(x)$ hat z. B. für die in Abb. 1 skizzierte nicht-lineare Feder den in Abb. 2 gezeichneten Verlauf. Es ist

für $x > 0$: $p(x) = h + n^2 x$, für $x < 0$: $p(x) = -h + n^2 x$, und aus der Differentialgl. (3) der ungedämpften Eigenschwingung wird:

⁷⁾ Die von den Verfassern ausgearbeiteten Methoden sind auf freie Schwingungen allgemeiner Art anwendbar, worauf hier jedoch nicht eingetreten werden kann.

$$\ddot{x} + n^2 x = \begin{cases} -h, & x > 0 \\ +h, & x < 0 \end{cases} \quad \dots \quad (11)$$

Zur Zeit t_0 nehme x den positiven Höchstwert A an. ($t = t_0$: $x = A$, $\dot{x} = 0$). Dann schreibt sich die Lösung von (11):

$$x = -\frac{h}{n^2} [1 - \cos n(t - t_0)] + A \cos n(t - t_0), \quad \text{solange } \cos n(t - t_0) \geq \frac{h}{An^2 + h},$$

d. h. solange $-s_n \leq t - t_0 \leq s_n$, $s_n = \frac{1}{n} \arccos \frac{h}{An^2 + h}$.

Für $x < 0$ ist die Bewegung offenbar ein Spiegelbild derjenigen für $x > 0$:

$$x(t) = -x(2s_n + 2t_0 - t).$$

x ist also eine periodische Funktion von t mit folgender Periode T und Frequenz ω :

$$T = 4s_n = \frac{4}{n} \arccos \frac{h}{An^2 + h}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi n}{2 \arccos \frac{h}{An^2 + h}}$$

Nun sei die Funktion $y(w, a)$ folgendermassen definiert:

$$y(w, a) = x(t_0 + \frac{w}{\omega}).$$

y ist also eine periodische Funktion von w mit der Periode 2π . Offenbar gilt: $y(w, a) > 0$, für $-\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}$;

$y(w, a) < 0$, für $\frac{\pi}{2} < w < \frac{3\pi}{2}$; $y(w, a) = -y(\pi - w, a)$.

Bemerken wir noch, dass

$$y(w, a) = y(-w, a). \quad \dots \quad (12)$$

und

$$\max_{0 \leq w \leq 2\pi} |y(w, a)| = y(0, a) = A. \quad \dots \quad (13)$$

Da der Zusammenhang zwischen x und y auch so formuliert werden kann:

$x(t) = y(\omega t + \psi, a)$, $\psi = -\omega t_0$, so wird aus (11)⁸⁾:

$$\omega^2 y''(w, a) + h^2 y(w, a) = \begin{cases} -h, & -\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2} \\ h, & \frac{\pi}{2} < w < \frac{3\pi}{2} \end{cases}. \quad (14)$$

Betrachten wir nun die Fourier-Entwicklung von $y(w, a)$. Wegen (12) enthält sie nur cosinus-Terme:

$$y(w, a) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} y(w, a) \cos m w dw \right) \cos m w.$$

Zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten multiplizieren wir Gl. (14) mit $\cos m w$. Partielle Integration ergibt, da $y'(0, a) = y'(\pi, a) = 0$:

$$(n^2 - m^2 \omega^2) \int_0^{\pi} y \cos m w dw = -h \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos m w dw - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos m w dw \right\} = -\frac{2h}{m} \sin \frac{m\pi}{2}$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cos m w dw = a$

setzen:

$$\omega^2 = n^2 + \frac{4h}{\pi a} \quad \dots \quad (15)$$

und

$$y = a \cos w + \frac{4}{\pi} h \sum_{m=3,5,7}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m(m^2 \omega^2 - n^2)} \cos m w \quad \dots \quad (16)$$

Die Eigenfrequenz ω ist somit grösser als n und nimmt mit wachsendem a monoton ab.

Nach (13) nimmt y den maximalen Wert A für $w=0$ an. A lässt sich daher unmittelbar aus (16) unter Berücksichtigung von (15) berechnen, oder, einfacher, aus der Beziehung: $\frac{h}{An^2 + h} = \cos \frac{\pi n}{2 \omega}$,

die aus dem Verschwinden von x für $t = t_0 + T/4$ folgt.

⁸⁾ Striche bedeuten Ableitungen nach w .

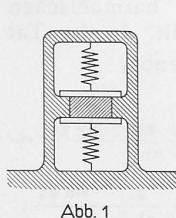


Abb. 1

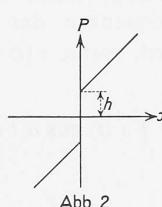


Abb. 2

