

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 103/104 (1934)  
**Heft:** 2

## Inhaltsverzeichnis

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe. — Der spezifische Energieverbrauch von Eisenbahn-Schnelltriebwagen in Stromlinienform. — Neuere Stahlkonstruktionen im Hochbau. — Die Riss-Sicherheit von Eisenbetonkonstruktionen. — Wettbewerb für das Bundesbrief-Archiv in Schwyz. — Die Rohrbruch-Katastrophe am Schwarzen See. — Mitteilungen: Die Rohr-Anlage des Hooverdamm-Kraftwerks am Colorado-River. Verderbnis der Bücher von Bibliotheken in

Industriegebieten. Glasseide und -Watte. Basler Rheinhafenverkehr. Grundwasserabsenkung beim Bau des Trockendocks Southampton. Dr. h. c. H. Behn-Eschenburg. Hochfrequenztechnik. Völlig geschweisster Wasserbehälter. Induktive Zugsicherung System „Signum“. Eidgen. Technische Hochschule. — Wettbewerbe: Bebauungsplan Lenzburg. — Nekrolog: Beda Braegger. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

## Band 103

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.  
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 2

### Zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe.

Von Dr. I. MALKIN, Ing., Westinghouse Electric & Manufacturing Company, South Philadelphia Works, Philadelphia, Pa.

Der nachstehende Artikel bringt zwei neue Scheibenprofile mit den zugehörigen Spannungsverteilungen, gekennzeichnet durch Einfachheit der erforderlichen Rechenarbeit.

**1. Einleitung.** Obwohl die Anzahl der bisher bekannten und in der Praxis allgemein benutzten teils graphischen, teils analytischen Verfahren zur Festigkeitsberechnung und Konstruktion von Dampfturbinen-Laufradscheiben nicht gering ist, sieht man sich durch Erwägungen mannigfacher Natur häufig doch gezwungen, nach neuen Lösungen zu forschen. Ausschlaggebend ist hierbei die Forderung, die sonst umständlichen Rechnungsarbeiten möglichst auf ein Minimum zu reduzieren und zu normalisieren, d. h. auf wenige elementare Operationen mit ein für allemal berechneten Normal-Zahlentabellen zurückzuführen. Im Nachstehenden werden zwei neue Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe entwickelt, die der genannten Forderung in hohem Maße genügen. Beide Verfahren sind mit vergleichenden Beispielen belegt.

**2. Die analytische Form des Problems.** Das Problem der rotierenden Scheibe in der von A. Stodola herrührenden Näherungsgestalt ist verschiedener Darstellungsformen fähig.<sup>1)</sup> Einige von ihnen sollen sogleich aufgeführt werden.

Zunächst mögen die Bezeichnungen gelten:  $r$  = Radius,  $y$  = halbe Scheibendicke,  $u$  = Radialverschiebung,  $\sigma_r$  = Radialspannung,  $\sigma_t$  = Tangentialspannung,  $\nu$  = Poissonsche Konstante,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $\mu$  = spezifische Masse,  $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit.

Dann hat man als erste Darstellungsform des Problems das Differentialsystem

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left( \frac{3}{r} + \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right) \frac{d\sigma_r}{dr} + \left[ \frac{2+\nu}{y} \frac{dy}{dr} + r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right) \right] \frac{\sigma_r}{\gamma} + (3+\nu) \mu \omega^2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{d(r y \sigma_r)}{dr} - y \sigma_t + \mu \omega^2 r^2 y = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Eine äquivalente Form ergibt sich, wenn man die Spannungen durch die Radialverschiebung vermagt der Gleichungen

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right). \quad (3)$$

ausdrückt. Durch Einsetzen in (2) folgt dann nämlich

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{du}{dr} + \left( \frac{\nu}{y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{u}{r} + \frac{\mu \omega^2 (1-\nu^2)}{E} r = 0 \quad \dots \quad (4)$$

Eine dritte Darstellungsart ergibt sich, wenn man Gl. (2) mit der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{d\sigma_t}{dr} - \nu \frac{d\sigma_r}{dr} = (1+\nu) \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} \quad \dots \quad (5)$$

kombiniert. Führt man dann eine gewisse Funktion  $S$  durch die Beziehungen

$$y \sigma_r = \frac{S}{r}, \quad y \sigma_t = \frac{dS}{dr} + \mu \omega^2 y r^2. \quad \dots \quad (6)$$

ein, so ist Gl. (2) identisch erfüllt, während Gl. (5) die Form

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right) \frac{dS}{dr} + \left( \frac{\nu}{y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{S}{r} + (3+\nu) \mu \omega^2 y r = 0 \quad \dots \quad (7)$$

annahmt.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Siehe A. Stodola, Dampf- und Gas-Turbinen, 5. u. 6. Auflage, Abschnitte 74 und 181.

<sup>2)</sup> Siehe z. B. A. Föppl, Vorl. über Techn. Mech. Bd. V.

Die Gleichungssysteme (3) und (4) einerseits und (6) und (7) andererseits mögen nun folgender Behandlung unterworfen werden:

Die variablen Koeffizienten der Grundgleichung in einer der Formen (4) oder (7) sind von der zu ermittelnden Funktion ( $\sigma_r$  bzw.  $S$ ) frei. Gesetzt, diese Koeffizienten seien durch eine Beziehung miteinander verknüpft, die eine Integrabilitätsbedingung der in Frage stehenden Differentialgleichung (4) bzw. (7) ist. Da die Koeffizienten nun, wie gesagt, von der zu ermittelnden Funktion frei sind, so ist die Integrabilitätsbedingung nichts anderes als eine Definitionsgleichung für  $y$ . Lässt sich diese integrieren, so hat man eine Lösung des Problems.

Diese Methode erweist sich als die Quelle zweier wichtiger Berechnungsverfahren, die nachstehend entwickelt werden.

**3. Das Erste Exponentialprofil.** Eine Integrabilitätsbedingung der bezeichneten Art ergibt sich unter Benutzung der folgenden elementaren Integrationsmethode von linearen Differentialgleichungen.<sup>3)</sup>

Greifen wir zunächst Gl. (4) ins Auge, so mögen folgende abkürzende Bezeichnungen gelten. Es seien  $P_2$ ,  $P_1$ ,  $P_0$ ,  $P$  die Koeffizienten von  $d^2u:dr^2$ ,  $du:dr$ ,  $u$  und des von  $u$  und dessen Ableitungen freien Gliedes der Differentialgleichung (4):

$$P_2 = 1; \quad P_1 = \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} + \frac{1}{r}; \quad P_0 = \left( \frac{\nu}{y} \frac{dy}{dr} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r}; \\ P = \frac{\mu \omega^2 (1-\nu^2)}{E} r.$$

Wird nun die Gleichung (4) nach den Regeln der partiellen Integration gliedweise integriert, so folgt

$$\int P dr + \int (P_0 - P_1' + P_2'') u dr + (P_1 - P_2') u + P_2 u' = 0 \\ \text{worin } P_1' = dP_1:dr, \text{ usw. Somit ist die Ordnungszahl der Gl. (4) um die Einheit erniedrigt, falls } P_0 - P_1' + P_2'' = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right) = \frac{\nu}{r} \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{dr} \right)$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Profilfunktion  $y$ . Die Lösung lautet

$$y = a e^{-\beta r^1 + \nu} \quad \dots \quad (8)$$

worin  $a$  und  $-\beta$  die beiden Integrationskonstanten sind. Für diese Profilkurve nimmt die ursprüngliche Differentialgleichung (4) die Gestalt

$$P_2 u' + (P_1 - P_2') u + \int P dr = 0$$

oder

$$\frac{du}{dr} + \frac{1 - (1+\nu)\beta r^1 + \nu}{r} u + \frac{\mu \omega^2 (1-\nu^2)}{2E} r^2 = C$$

an, wenn man mit  $C$  eine willkürliche Integrationskonstante bezeichnet.

Betrachtet man nun die reduzierte Gleichung

$$\frac{du}{dr} + \frac{1 - (1+\nu)\beta r^1 + \nu}{r} u - C = 0$$

und setzt für den Augenblick  $C = 0$ , so findet man eines der zwei Integrale der reduzierten Gleichung (4). Dieses erste Integral lässt sich leicht ermitteln zu

$$D \frac{e^{-\beta r^1 + \nu}}{r} \quad \dots \quad (9)$$

worin  $D$  wiederum eine Integrationskonstante ist.

Das partikuläre Integral, das dem Gliede mit  $\omega^2$  in der ursprünglichen Differentialgleichung entspricht, ergibt sich jetzt durch Variation der Konstanten  $D$  im Integral (9). Dieses partikuläre Integral erscheint in endlicher Form,

<sup>3)</sup> Siehe A. Forsyth, Differentialgleichungen, Braunschweig, 1912, p. 101.