Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 101/102 (1933)

Heft: 8

Inhaltsverzeichnis

Band 101 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 8

Ueber das Knicken kreisringförmiger Scheiben.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

Wenn eine volle Kreisscheibe vom Halbmesser a in ihrer Ebene am Rande durch gleichmässig verteilte Radialdrucke belastet wird, so knickt sie bei einer gewissen Höhe der Belastung aus. Ist der Rand eingespannt und ist der Knickvorgang radialsymmetrisch, so hat der Knickdruck den Wert $p = 14{,}682 \dfrac{E h^2}{3(1-\nu^2)a^2}$ während er bei freiem Rand durch $p = 4{,}20 \dfrac{E h^2}{3(1-\nu^2)a^2}$ gegeben ist.[1]) Für nicht radialsymmetrische Vorgänge ergeben sich grössere Knicklasten, sodass praktisch nur der symmetrische Fall in Betracht kommt. Man findet diese Ergebnisse in dem Buch von A. Nadai: Elastische Platten (Berlin 1925) oder im „Handbuch der Physik" Bd. VI (Berlin 1928).

Der Fall einer durchlochten Platte scheint bis jetzt nicht behandelt zu sein. Man weiss, wie sehr ein Loch den Spannungszustand einer Scheibe beeinflusst; es scheint von Interesse, auch den Einfluss auf die Knickfestigkeit festzustellen. Auch die ringförmige Scheibe, die grössern Lochdurchmessern entspricht, bietet Interesse, da sie als Versteifungsrippe bei Röhren und Gefässen eine Rolle spielt.

Im folgenden wird das Knickproblem der kreisringförmigen Scheibe behandelt. Es zeigt sich, dass in dem wichtigsten Falle des Druckes am Aussenrand und spannungsfreien Innenrandes sich die Rechnungen ohne allzugrosse Mühe durchführen lassen. Das Hauptziel der Untersuchung ist die Abhängigkeit der Knicklast vom Lochdurchmesser.

Bezeichnungen:

Halbmesser von Aussen- und Innenrand a, bezw. b, $\mu = b/a$
Halbe Scheibendicke h, Scheibenmittelfläche horizontal,
E, $\nu = \frac{1}{3}$ Zugmodul und reziproke Poisson'sche Zahl des Materials,
p_1, p_2 radiale Druckspannung am Aussen- und Innenrand,
r, φ Polarkoordinaten eines Punktes der Mittelebene der Scheibe,
w Ordinate dieses Punktes in der ausgeknickten Lage,
G und S Biegungsmoment und vertikale Schubkraft pro Längeneinheit längs der Schnittkurve $r =$ konst.

1. *Der radialsymmetrische Spannungszustand in der ebenen Scheibe.*

Ist u die radiale Verschiebung eines Punktes der Mittelebene, so sind die Dehnungen in radialer Richtung und normal dazu

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \qquad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

Das Hooke'sche Elastizitätsgesetz gibt für die Radialspannung σ_r und die Ringspannung σ_t die Beziehungen

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\,\sigma_t\right] \qquad \frac{u}{r} = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu\,\sigma_r\right]$$

Eliminiert man hieraus u, so erhält man die Verträglichkeitsbedingung

$$\sigma_r - \nu\,\sigma_t = \frac{d}{dr}(r\,\sigma_t) - \nu\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r).$$

Dazu tritt die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r) - \sigma_t = 0$$

[1]) Bezeichnungen siehe nachstehend.

woraus $\dfrac{d}{dr}\left[r\dfrac{d}{dr}(r\,\sigma_r)\right] = \sigma_r\,,$

und dies ergibt die Lösung

$$\sigma_r = \alpha_1 + \frac{\beta_1}{r^2} \quad \text{und} \quad \sigma_t = \alpha_1 - \frac{\beta_1}{r^2}\,. \quad . \quad . \quad (1)$$

Da am Rand σ_r mit $-p_1$ bezw. $-p_2$ übereinstimmen muss, so wird

$$\alpha_1 = -\frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{a^2 - b^2} \qquad \beta_1 = \frac{(p_1 - p_2)\,a^2 b^2}{a^2 - b^2}\,. \quad . \quad (2)$$

Aus diesen bekannten Formeln folgt, dass für $p_2 = 0$ und verschwindenden Lochhalbmesser die Spannung am Lochrand den Wert $-p_1$, der der undurchlochten Scheibe entspricht, um 100 % überschreitet.

2. *Die Differentialgleichung des Knickproblems.*

Die ebene Gleichgewichtsform wird für diejenigen kritischen Werte von p_1, p_2 labil, für die sich die Möglichkeit einer zweiten, ausgebogenen Gleichgewichtsform ergibt (Verzweigungswerte). Die Differentialgleichung der gebogenen Platte lautet[2])

$$\varDelta\varDelta w = \frac{q}{D} \quad \text{mit} \quad \varDelta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

$$D = \frac{2\,E h^3}{3(1-\nu^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Biegungsmoment G und Schubkraft S sind dabei gegeben durch[2])

$$G = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right], \qquad S = -D\frac{\partial}{\partial r}\varDelta w \quad (4)$$

q ist die spezifische Belastung, normal zur (horizontal gedachten) Platte.

In unserem Fall ist nun eine äussere Last normal zur Plattenebene nicht vorhanden. Aber durch die Verbiegung werden die in der Mittelebene wirkenden Kräfte etwas geneigt und geben so vertikal gerichtete Komponenten, deren Resultante pro Flächeneinheit die Belastung q liefert.

Auf das in Abb. 1 gezeichnete Scheibenelement wirkt in der Mittelfläche längs AB die Kraft $2h\,\sigma_r\,r\,d\varphi$, die zur Horizontalen um den kleinen Winkel $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ geneigt ist, sodass ihre nach unten gerichtete Vertikalkomponente $2h\,\sigma_r\,r\,d\varphi\,\dfrac{\partial w}{\partial r}$ beträgt. Auf das Randstück CD wirkt nach oben eine analoge Komponente, nur gebildet für den um dr nach aussen verschobenen Bogen.

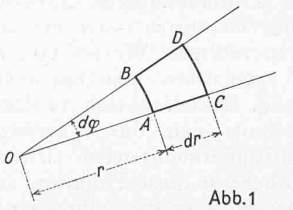

Abb. 1

Man erhält daher als Ueberschuss nach oben

$$\left(2h\,\sigma_r\,r\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r+dr} d\varphi - \left(2h\,\sigma_r\,r\frac{\partial w}{\partial r}\right)_r d\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(2h\,\sigma_r\,r\frac{\partial w}{\partial r}\right) dr\,d\varphi \quad (5)$$

Auf das Randstück AC wirkt die Kraft $2h\,\sigma_t\,dr$, die um den Winkel $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$ geneigt ist und die die Vertikalkomponente $2h\dfrac{\sigma_t}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\,dr$ ergibt. Der Ueberschuss der Vertikalkraft längs BD über diese ist $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(2h\dfrac{\sigma_t}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}\right) dr\,d\varphi$. Addiert man hierzu den Ausdruck (5) und dividiert durch die Grösse $r\,d\varphi\,dr$ des Flächenelementes, so erhält man als Vertikalbelastung pro Flächeneinheit

$$q = \frac{2h}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_r\,r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{2h}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sigma_t\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right).$$

[2]) *Nadai* loc. cit. § 8, § 16.