Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 101/102 (1933)

Heft: 19

Artikel: Berechnung mehrstöckiger kontinuierlicher Rahmen durch die Methode der algebraischen Momentenverteilung

Autor: Fornerod, M.F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83085

Band 102

Nr. 19

Berechnung mehrstöckiger kontinuierlicher Rahmen durch die Methode der algebraischen Momentenverteilung.

Von Ing. M. F. FORNEROD, Zürich.

1. Einleitung. Diese Arbeit erklärt eine Methode, die sich bei der Berechnung von statisch vielfach unbestimmten Systemen als nützlich und äusserst zeitsparend erwiesen hat. Die Methode stammt von Prof. *Hardy Cross* von der Universität Illinois, U. S. A.

Die Hauptidee war, eine Methode zur Untersuchung komplizierter sowie einfacher statisch unbestimmter Systeme zu finden, die das Aufschreiben von analytischen Beziehungen und Lösen von Gleichungen unnötig macht. Einfache arithmetische Operationen führen zum Ziel. Ein Hauptvorteil der Methode ist ferner, dass sie eine Methode der sukzessiven Annäherung ist, d. h. man kann den Prozess der Momentenverteilung frühzeitig abbrechen, wenn man durch grobe Annäherung Einsicht in die Grössenordnung der Momente erhalten hat, und kann alsdann allfällige Aenderungen am Projekt vornehmen, ohne viel Zeit für eine genaue Lösung vergeudet zu haben. Ebenso kann umgekehrt der Prozess bis zur beliebig erwünschten Genauigkeit fortgesetzt werden. Die Konvergenz der Resultate ist meistens sehr stark (vgl. Abschnitt 9).

2. Voraussetzungen.

Wird ein ein- oder mehrstöckiger kontinuierlicher Rahmen belastet, so bewegen sich seine Knotenpunkte; diese Bewegungen bestehen aus einer Rotation und einer Translation. Ist das Tragwerk nicht zum vornherein gegen seitliche Verschiebung festgehalten, so ist diese seitliche Bewegung nur bei horizontaler oder stark unsymmetrischer Belastung, sowie bei stark unsymmetrischen Rahmen von einer Grössenordnung, die berücksichtigt zu werden verdient. In den weitaus meisten Fällen kann von der Berücksichtigung der Translation abgesehen werden. Wir wollen im folgenden in erster Linie die Momente infolge der Rotation der Knotenpunkte ermitteln, d. h. voraussetzen, dass sich die Knotenpunkte während der Momentenverteilung nicht translatorisch bewegen. Die Momente infolge translatorischer Bewegung, sei es infolge äusserer, horizontaler Kräfte, sei es infolge einer gedachten Festhaltekraft, lassen sich mit der Momentenverteilungs-Methode leicht berechnen, doch soll dies einem besonderen Abschnitte vorbehalten bleiben. Der Einfluss der Normal- und Querkräfte auf die Bewegung der Knotenpunkte kann im folgenden füglich vernachlässigt werden, er kann aber, wenn nötig, nach Abschnitt 13 berücksichtigt werden.

3. Definitionen.

1) Die „Einspannmomente M" eines Stabes sind die Momente an den Enden des Stabes, wenn diese Enden fest eingespannt wären.

2) Die „Steifigkeit" s ist das Moment am Ende eines Stabes (auf starren Stützen), das nötig ist, um an diesem Ende eine Dehnung 1 hervorzurufen, wenn das andere Ende fest eingespannt ist.

3) Wenn ein Ende eines Stabes (auf starren Stützen) gedreht wird, während das andere Ende fest eingespannt ist, nennen wir das Verhältnis des Momentes am eingespannten Ende zum Drehmoment den „Fortpflanzungs-Faktor" λ.

4. Knotenpunkt-Rotation.

Gewöhnlich werden die an einem Knotenpunkt zusammenkommenden Stäbe herausgeschnitten; nachher wird im Knotenpunkt die Kontinuität durch Einführung verschiedener Kräfte wieder hergestellt. Wir wollen nun umgekehrt die Stäbe nicht vom Knotenpunkt trennen, aber am Knotenpunkt ein „Festhaltemoment" einführen, das seine Rotation verhindert. Anstatt nun wie bei den üblichen analytischen Methoden die eingeführten Kräfte als Unbekannte in einem System von simultanen Gleichungen aufzuschreiben, wollen wir die eingeführten Festhaltemomente durch Verteilen und Fortpflanzen miteinander ins Gleichgewicht bringen. Jedem Schritt in diesem Vorgehen entspricht eine bestimmte physikalische Veränderung am untersuchten Rahmensystem, die man sich leicht vorstellen kann, während bei der Lösung von Gleichungen das Tragwerk selbst ganz vergessen wird und viele unwichtige Einflüsse unter dem Namen eines τ oder δ mitgeschleppt werden.

Wir wollen uns nun sämtliche Knotenpunkte am Tragwerk gegen Rotation festgehalten denken (z. B. durch Anziehen einer Schraube). An einem solchen festgehaltenen Knotenpunkt besteht nun in jedem belasteten Stab das vorher definierte „Einspannmoment". Die algebraische Summe dieser Einspannmomente ist nicht gleich Null, sondern gleich einem Moment, das wir benötigen, um den Knotenpunkt festzuhalten. Wir nennen es „unverteiltes Moment". Wenn wir nun einen Knotenpunkt loslassen (die Schraube lösen), während die andern festgehalten bleiben, so dreht sich dieser in die Gleichgewichtslage, in der die Summe aller Momente am Knotenpunkt gleich Null ist. Die Momente in den anstossenden Stabenden ändern sich. Die Summe dieser durch das „Loslassen" verursachten Aenderungen, „Verteilmomente" genannt, muss gleich dem unverteilten Moment sein. Das „unverteilte Moment" wurde also durch das „Loslassen" in einer gewissen Proportion auf die einzelnen Stäbe *verteilt*. Da alle Stabenden gleich grosse Drehungen erfahren, ist leicht einzusehen, dass sich nach obiger Definition der „Steifigkeit" *das unverteilte Moment auf die einzelnen Stäbe proportional ihrer Steifigkeit verteilt.*

Die Drehung des losgelassenen Knotenpunktes verursacht auch Momente in den andern noch fest eingespannten Enden der anstossenden Stäbe. Diese sind gleich den Verteilmomenten multipliziert mit dem oben definierten Fortpflanzungsfaktor am gedrehten Ende des Stabes.

5. Momentenverteilung. Die Methode ist folgende:

a) Alle Knotenpunkte werden gegen Rotation festgehalten gedacht und die Momente an den Enden der Stäbe für diesen Zustand werden berechnet (Einspannmomente) und angeschrieben;

b) In einem Knotenpunkt beginnend wird das unverteilte Moment (= algebraische Summe der Einspannmomente) proportional der Steifigkeit s der Stäbe verteilt;

c) Man multipliziert das auf einen Stab entfallende Verteilmoment mit dem Fortpflanzungsfaktor dieses Stabendes und schreibt das Resultat am andern Ende des Stabes an;

d) Die Operationen unter b) und c) werden nacheinander an allen Knotenpunkten vorgenommen, wobei man vorteilhaft zuerst die Knotenpunkte mit dem grössten unverteilten Moment berücksichtigt.

e) Dieses Vorgehen b) bis d) wird fortgesetzt und wiederholt, bis die fortzupflanzenden Momente klein genug sind, um vernachlässigt werden zu dürfen;

f) Alle Momente — Einspannmomente, Verteilmomente, fortgepflanzte Momente — werden an jedem Stabende addiert, um das wahre Moment zu erhalten.

Auf diese Art werden sukzessive alle Knotenpunkte von ihrem Zwangsmoment befreit, bis das ganze Tragwerk in den Ruhezustand des Gleichgewichtes übergeführt ist: alle Knotenpunkte sind „equilibriert".

6. *Ausgangswerte M, s und λ.*

Für den meist vorkommenden Fall von konstantem Trägheitsmoment innerhalb der Stablänge ist die Steifigkeit s proportional $^J/_l$ des Stabes. Der Fortpflanzungsfaktor λ beträgt für diesen Fall $+ \frac{1}{2}$. Für die Einspannmomente M bestehen einfache, bekannte Ausdrücke. Die Methode ist allgemein und lässt sich bei variablem Trägheits-Moment in gleicher Weise anwenden. Die Ermittlung der Ausgangswerte für diesen letzten Fall wird im Abschnitt 12 gegeben.

7. *Vorzeichen.*

Es ist wichtig, von Anfang an eine Vorzeichenregel zu beachten und konsequent beizubehalten. Um die Methode allgemein zu halten und das Vorzeichen eines Momentes an einem Stabende unabhängig von der Richtung dieses Stabes zu definieren, wird folgende Regel aufgestellt:

Ein *positives* Moment am Ende eines Stabes dreht den anstossenden Knotenpunkt *im Uhrzeigersinn*. — In Abb. 1 sind einige Beispiele schematisch dargestellt.

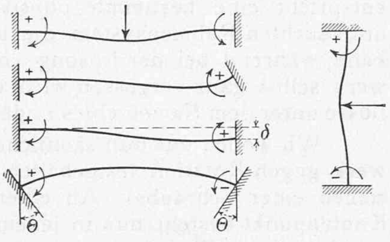

Abb. 1. Vorzeichen der Momente.

Die Einspann-Momente, die Verteil-Momente und die fortgepflanzten Momente werden in einem dem Tragwerk entsprechenden Schema mit ihren algebraischen Werten eingeschrieben. Es ist ratsam, dabei folgende Regeln zu beobachten: Von der Normallage des Zeichenblattes ausgehend, werden an einem horizontalen Stab die Momente am linken Ende *unter* dem Stab, jene am rechten Ende *über* dem Stab angeschrieben. Für einen vertikalen Stab gilt das selbe, wenn man das Blatt um 90° im Uhrzeigersinn dreht. — Für die angenommene Vorzeichenregel gilt folgendes: Die algebraische Summe aller Momente an einem „equilibrierten" Knotenpunkte ist gleich null. — Alle Verteilmomente an einem Knotenpunkte, die durch ein und denselben Verteilvorgang entstehen, haben gleiches Vorzeichen; ihre Summe ist entgegengesetzt gleich dem unverteilten Moment. — Fortgepflanzte Momente haben das selbe Vorzeichen wie die sie verursachenden Verteilmomente.

8. *Beispiel.*

Im folgenden Beispiel (Abb. 2) wurde ein beliebiges Rahmentragwerk mit geraden Stäben von konstantem Trägheitsmoment gewählt. Die Steifigkeiten s sind proportional den $\frac{J}{l}$ Werten und werden durch die Zahlen in Stabmitte dargestellt. Die Summe der Steifigkeiten der in einem Knotenpunkte zusammenstossenden Stäbe wird im Knotenpunkt eingeschrieben.

1) Zuerst werden die Einspannmomente in allen Stäben angeschrieben. Für dieses Beispiel wurden sie willkürlich angenommen wie folgt:

Knotenpunkt A: 0
„ B: in BA 0, in BC + 100
„ C: in CB — 100, in CF — 80, in CD + 200, in CG — 50
„ F: + 60
„ G: + 50
„ D: in DC — 100, in DE 0
„ E: in ED 0, in Konsole + 10.

2) Die Verteiloperation beginnt im Knotenpunkt mit dem grössten unverteilten Moment, also B oder D. Wir beginnen in B, wo ein unverteiltes Moment von + 100 vorliegt. Dieses unverteilte Moment + 100 wird im Verhältnis 2 : 4 auf BA und BC verteilt. Wir erhalten also folgende Verteilmomente:

BA: 2 : 6 × 100 = 33,33 und BC: 4 : 6 × 100 = 66,67

Nach den oben angegebenen Regeln haben diese Verteilmomente gleiche, aber dem unverteilten Moment entgegengesetzte Vorzeichen, also hier: — 33,33 und — 66,67. Nachdem diese Zahlen an den für sie bestimmten Kolonnen eingeschrieben sind (Abb. 2) werden Abschlusslinien unter, bzw. über die Zahlen gesetzt, um anzudeuten, dass vorher eine Verteiloperation stattgefunden hat, die den Knotenpunkt equilibriert, bzw. $\Sigma M = 0$ gemacht hat.

3) Nun wird die Hälfte von — 66,67, also — 33,34 in BC nach C fortgepflanzt und dort eingeschrieben. Ebenso wird die Hälfte von — 33,33, also — 16,67 in BA nach A fortgepflanzt.

4) In gleicher Weise wie hier für Knotenpunkt B im Einzelnen angegeben, equilibriert man nun Knotenpunkt D, der das nächst grösste unverteilte Moment (— 100) hat: (—100) · 5:8 = 62,50 in DC und (—100) · 3:8 = 37,50 in DE. Horizontale Abschlusslinien werden in D gezogen und die Verteilmomente 62,50 und 37,50 werden mit dem selben Vorzeichen und der Hälfte ihres Wertes fortgepflanzt nach C mit + 31,25 und + 18,75.

5) Diese Operationen werden an allen Knotenpunkten vorgenommen und wiederholt, z. B. hier in folgender Reihenfolge: B, D, F, E, C, B, F, C . . . Diese Reihenfolge kann willkürlich gewählt werden, man wählt jedoch mit Vorteil jene Knotenpunkte zuerst, die das grösste unverteilte Moment haben. Kommt man zu einem bereits vorher equilibrierten Knotenpunkt zum zweiten oder dritten Mal zurück, so werden nur jene Momente equilibriert, die unter (bzw. über) der letzten Abschlusslinie stehen. — Wir wollen nun in der oben angegebenen Reihenfolge weiterfahren.

Knotenpunkt E: Unverteiltes Moment (+ 18,75 + 10,00) = + 28,75.
Verteilmomente: — 28,75; 0.
Fortgepflanzte Momente: $\frac{1}{2}$ (— 28,75) = — 14,37.

Knotenpunkt F: Unverteiltes Moment + 60,00. Das Gelenk hat keine Steifigkeit. Das Moment wird verteilt zwischen Stab FC und dem Gelenk im Verhältnis 2 : 0, d. h. alles entfällt auf den Stab; Verteilmoment = — 60,00, fortgepflanztes Moment in C = — 30,00.

Knotenpunkt C: Unverteiltes Moment — 62,09

	Verteilmoment	Fortgepflanztes Moment
BC: + 62,09 : 12 × 4 =	+ 20,70	+ 10,35
FC: + 62,09 : 12 × 2 =	+ 10,36	+ 5,18
DC: + 62,09 : 12 × 5 =	+ 25,85	+ 12,92
GC: + 62,09 : 12 × 1 =	+ 5,18	+ 2,59

Knotenpunkt B: Unverteiltes Moment = + 10,35
Verteilmomente: BC: — 10,35 : 6 × 4 = — 6,91
BA: — 10,35 : 6 × 2 = — 3,44
Fortgepflanzte Momente: BC: $\frac{1}{2}$ (— 6,91) = — 3,45
BA: $\frac{1}{2}$ (— 3,44) = — 1,72

Knotenpunkt F: Unverteiltes Moment + 5,18
Verteilmomente: — 5,18 und 0
Fortgepflanzt: $\frac{1}{2}$ (— 5,18) = — 2,59 nach C

Knotenpunkt C: Unverteiltes Moment — 3,45 — 2,59 = — 6,04

	Verteilmoment	Fortgepflanztes Moment
BC: + 6,04 : 12 × 4	+ 2,02	+ 1,01
FC: + 6,04 : 12 × 2	+ 1,00	+ 0,50
DC: + 6,04 : 12 × 5	+ 2,52	+ 1,26
GC: + 6,04 : 12 × 1	+ 0,50	+ 0,25

Die folgenden Operationen werden nicht mehr im Einzelnen aufgeführt. In den Knotenpunkten A und C sind die Stäbe fest eingespannt. Die Momente müssten also im Verhältnis 2 : ∞, bzw. 1 : ∞ verteilt werden, d. h. alle Momente entfallen auf das Widerlager und keine auf den Stab. Alle Momente, die an diesen Punkten anlangen, bleiben unwiderruflich dort und können am Schlusse addiert werden.

9. *Konvergenz der Resultate.*

An der Anzahl der Abschlusslinien erkennt man die Zahl der an einem Knotenpunkt durchgeführten Verteil-Operationen. An den nachfolgenden fortgepflanzten Momenten ist die erreichte Genauigkeit ersichtlich. Wir haben in diesem Beispiel die Operationen absichtlich lange fortgesetzt, um die Konvergenz der Resultate darzutun. Im

Maximum wurden vier Verteiloperationen pro Knotenpunkt ausgeführt, bis die fortgepflanzten Momente kleiner als 0,01 wurden. Aus Tabelle I ist die Konvergenz der Resultate an einigen Stellen ersichtlich.

Tabelle 1. Konvergenz der Resultate.

Sukzessive Mom. am Knotenpunkt	1. Verteil-Operation	2. Verteil-Operation	3. Verteil-Operation	4. Verteil-Operation
Kn. pkt. C : in BC	— 112,64	— 114,07	— 114,21	— 114,23
in DC	+ 257,10	+ 259,62	+ 259,87	+ 259,91
Kn. pkt. B : in BC	+ 33,33	+ 36,77	+ 37,10	+ 37,13
Kn. pkt. D : in DC	+ 37,50	— 23,16	+ 23,15	+ 23,15

Man erkennt, dass für die meisten praktischen Zwecke die Rechnung schon nach der zweiten Verteiloperation hätte beendet werden können. Auch würde man die mitgeführten Dezimalstellen reduzieren.

10. Variationen.

Für bestimmte Zwecke oder bestimmte Tragwerke kann die Methode der Momentenverteilung in Einzelheiten nach Bedürfnis variiert werden. Die dargestellte Durchführung ist allgemein und wird unter den auf Seite 223 gemachten Voraussetzungen stets zum Ziele führen. Eine kleine Erleichterung kann noch erreicht werden, wenn gelenkige Knotenpunkte von vornherein equilibriert werden, indem die Steifigkeit der anschliessenden Stäbe $^3/_4$ so gross angeschrieben wird, als sie berechnet wurde (allgemein $s_a = \frac{\lambda_a}{\beta}$). Dann braucht man keine Momente mehr gegen das Gelenk fortzupflanzen. Ebenso kann natürlich ein beliebiger Einspannungsgrad berücksichtigt werden.

11. Anwendungsgebiet.

Die Methode der sukzessiven Verteilung kann auch auf andere Knotenpunktkräfte (Normal- und Querkräfte) oder direkt auf Knotenpunktrotationen angewendet werden. So können schnelle Schätzungen von Kräften in komplizierten Tragwerken ermittelt werden. Sehr gut eignet sich die Verteilmethode für die Berechnung von Nebenspannungen in den Knotenpunkten von gegliederten Trägern. Vom einfachen durchlaufenden Balken bis zum komplizierten Stockwerkrahmen lässt sich die Methode gleich gut gebrauchen. Einflüsse von Temperaturschwankungen, Setzungen oder äusserer Kräfte werden gleich behandelt. Auch Einflusslinien für bewegliche Belastung können leicht berechnet werden, indem ein Einheitseinspannmoment verteilt wird. Die wahren Momente einer Laststellung sind proportional dem wahren Einspannmoment.

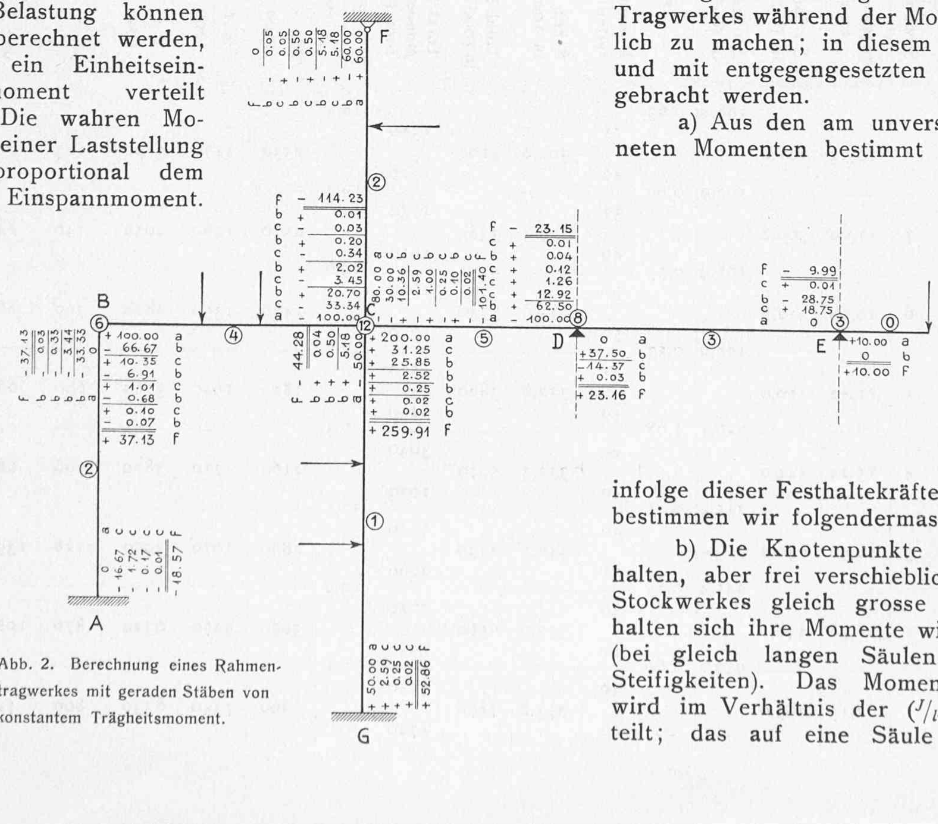

Abb. 2. Berechnung eines Rahmentragwerkes mit geraden Stäben von konstantem Trägheitsmoment.

12. Variables Trägheitsmoment.

An die Nomenklatur von Dr. Ing. E. Suter in seinem Werk „Die Festpunktmethode" anschliessend, können wir für jeden Stab die E-fachen Werte

$$\left.\begin{aligned} \alpha_a &= \frac{1}{l}\,\Sigma_0^l\, w\, z' \\ \alpha_b &= \frac{1}{l}\,\Sigma_0^l\, w\, z \\ \beta &= \frac{1}{l^2}\,\Sigma_0^l\, w\, z\, z' \end{aligned}\right\}$$

berechnen, wobei $w = \frac{\Delta S}{J}$, z den Abstand der Lamelle ΔS vom Stabende a, z' vom Stabende b bedeutet.

Die *Fortpflanzungsfaktoren* λ ergeben sich wie folgt:

$$\lambda_a = \frac{1}{\frac{\alpha_a}{\beta} - 1}\,; \qquad \lambda_b = \frac{1}{\frac{\alpha_b}{\beta} - 1}\,;$$

Die *Steifigkeiten* der Stabenden a und b berechnen sich folgendermassen:

$$s_a = \frac{1}{\alpha_a - \alpha_b\,\lambda_b}\,; \qquad s_b = \frac{1}{\alpha_b - \alpha_a\,\lambda_a}\,;$$

Zur Berechnung der *Einspannmomente* ermittelt man zuerst die Lastdrehwinkel im frei aufliegenden Stab:

$$\alpha_{a_0} = \frac{1}{l}\,\Sigma_0^l\, M_0\, w\, z' \qquad \text{und} \qquad \alpha_{b_0} = \frac{1}{l}\,\Sigma_0^l\, M_0\, w\, z$$

Die Lastdrehwinkel im *eingespannten* Stab sind:

$$\tau_{a_0} = \alpha_{a_0} - \alpha_{b_0}\,\lambda_b \quad \text{und} \quad \tau_{b_0} = \alpha_{b_0} - \alpha_{a_0}\,\lambda_a$$

(Diese Winkel können auch durch Setzungen oder Temperaturschwankungen verursacht werden). Die Einspannmomente ergeben sich daraus wie folgt:

$$M_a = s_a\,\tau_{a_0} \quad \text{und} \quad M_b = s_b\,\tau_{b_0}$$

Die Vorzeichen ergeben sich aus der angenommenen Vorzeichenregel: Eine Drehung im Uhrzeigersinn ist positiv.

13. Knotenpunkt-Translation.

Die Voraussetzung für die bisherigen Operationen beim Prozess der Momentenverteilung war ein Tragwerk mit unverschieblichen Knotenpunkten. Obschon diese Voraussetzung in den meisten Fällen zutrifft oder wenigstens ihre Annahme einen Fehler von untergeordneter Grössen-Ordnung verursacht, wollen wir die Methode der Momentenverteilung derart erweitern, dass auch der Einfluss einer translatorischen Bewegung berechnet werden kann.

In einem Tragwerk seien die Knotenpunkte gegen Rotation festgehalten aber seitlich frei verschiebbar. Seitliche, horizontale Kräfte greifen an dem Tragwerk an und bewirken eine seitliche Bewegung. Diese seitlichen Kräfte können äussere Kräfte sein, z. B. Wind- oder Bremskräfte. Sie können aber auch sogenannte Festhaltekräfte sein, die vorübergehend benötigt wurden, um die Knotenpunkte des Tragwerkes während der Momentenverteilung unverschieblich zu machen; in diesem Fall müssen sie erst ermittelt und mit entgegengesetzten Vorzeichen am Tragwerk angebracht werden.

a) Aus den am unverschieblichen Tragwerk errechneten Momenten bestimmt man die Schubkraft in jeder Säule und somit in jedem Stockwerk des Rahmens. Die Gleichgewichtsbedingung — Summe der Schubkräfte in jedem Stockwerk gleich null — ist nun nicht ohne weiteres erfüllt. Die nun ermittelte (von null abweichende) Summe der Schubkräfte ist gleich der gesuchten Festhalte-Kraft im betreffenden Stockwerk. Die Momente infolge dieser Festhaltekräfte oder anderer äusserer Kräfte bestimmen wir folgendermassen:

b) Die Knotenpunkte seien gegen Rotation festgehalten, aber frei verschieblich. Da die Säulenköpfe eines Stockwerkes gleich grosse Bewegungen ausführen, verhalten sich ihre Momente wie die $(^J/_{l^3})$-Werte der Säulen (bei gleich langen Säulen wie die $(^J/_l)$-Werte oder Steifigkeiten). Das Moment des Stockwerkschubes S wird im Verhältnis der $(^J/_{l^3})$-Werte auf die Säulen verteilt; das auf eine Säule entfallende Moment wieder gleichmässig auf Kopf und Fuss der Säule und als Einspannmoment angeschrieben.

c) Wir denken uns nun vorübergehend die Knotenpunkte unverschieblich, aber frei drehbar. In diesem Zustand verteilen wir die unter b) angeschriebenen Momente.

d) Die unter c) verteilten Momente werden fortgepflanzt.

e) Die in jedem Stockwerk infolge der unter d) erhaltenen Momente verursachten neuen (kleineren) Festhaltekräfte werden ermittelt wie unter a).

f) Die Operationen b) bis e) werden beliebig wiederholt, bis die Gleichgewichtsbedingung der Schubkräfte: Summe aller Schubkräfte in den Säulen gleich äussere seitliche Kraft, genügend genau erfüllt ist.

g) Alle Momente an jedem Stabende werden addiert, um das Moment infolge seitlicher Kräfte zu erhalten. Sind vorher Momente infolge äusserer Kräfte am unverschieblich gedachten Tragwerk ermittelt worden, so sind zu diesen die Zusatzmomente infolge seitlicher Kräfte zuzuzählen, um das endgültige Moment am freien Tragwerk zu bekommen.

Diese Verteilungsmethode für Momente infolge seitlicher Kräfte ist eine Methode der sukzessiven Annäherung und unter den eingangs erwähnten Voraussetzungen allgemein gültig. Sollten grosse Normalkräfte auftreten, so ist die Möglichkeit vorhanden, deren Einfluss in die Rechnung miteinzubeziehen, indem die durch vertikale Translation der Knotenpunkte entstehenden Einspannmomente an den horizontalen Stäben zugleich angeschrieben und im Equilibrier-Prozess berücksichtigt werden.

14. Stockwerkrahmen.

Ein besonderes Anwendungsgebiet der Verteilmethode sind sehr hohe, durch Wind beanspruchte Stockwerkrahmen. Hier lässt sich mit Vorteil eine *abgekürzte Verteilmethode* [1]) anwenden, sofern man durch Schätzung die relativen Stockwerk-Translationen als Ausgangswerte nimmt. Hat der Stockwerkrahmen annähernd theoretische Proportionen und Steifigkeiten, d. h. nehmen die Säulensteifigkeiten von oben nach unten annähernd proportional den Momenten $M = S \cdot h$ [2]) zu, so sind die relativen, horizontalen Verschiebungen der Stockwerke annähernd proportional den Stockwerkhöhen h, d. h.:

$$E\delta = \frac{S h^2}{6 s} = \frac{M h}{6 s}; \quad \frac{E\delta}{h} = \text{konst.} \times \frac{M}{s} = \text{konst.}$$

Daraus folgt, dass für diesen Fall die zu schätzenden Einspannmomente in den Säulen angenähert proportional den Säulensteifigkeiten s sind. — Man geht nun folgendermassen vor:

a) Die Steifigkeitszahlen der Säulen werden an Kopf und Fuss als Einspannmomente angeschrieben und alle Knotenpunkte werden equilibriert (waagrechte Rahmenstäbe erhalten keine Einspannmomente).

b) Aus den equilibrierten Knotenpunktmomenten M_0 berechnet man in gewohnter Weise den Stockwerkschub S_0 für jedes Stockwerk und ermittelt nun für jedes Stockwerk das sogenannte „Schubkriterium":

$$\frac{\text{Windschub}}{\text{Berechneter Schub}} = \text{Schubkriterium} = \frac{S}{S_0}$$

c) Wenn nun die Schubkriterien zweier benachbarter Stockwerke *nicht mehr als 10 bis 15 %* voneinander ab-

Gebäude der American Insurance Union, New York.*)

Stockwerk	Stockwerkshöhe in Fuss	Steifigkeiten s: Aeussere Säule A	Innere Säulen B	Innere Säulen C	Horizontale Träger: Oeffnung A-B L = 14,33 ft.	Oeffnung B-C L = 11,12 ft.	Mittl. Oeffnung C-C L = 21,33 ft.
1	22,15	42,98	39,65	59,87	135,85	191,88	293,81
2	18,58	51,52	63,74	107,93	53,60	69,06	—
3	12,96	73,88	91,40	154,78	53,60	69,06	—
4	15,25	62,78	77,67	131,52	135,85	191,88	160,71
5	11,82	37,84	42,91	59,30	28,81	37,12	37,14
6	10,58	42,24	47,89	66,19	28,81	37,12	37,14
7	11,00	40,64	46,07	63,68	28,81	37,12	37,14
8	10,33	35,01	40,41	55,11	28,81	37,12	37,14

*) Dieses Beispiel, sowie die vorhergehenden Angaben sind den „Proceedings of the American Society of Civil Engineers" entnommen.

Berechnungen zur Schätzung der Stockwerks-Deflektionen.

Stockwerk	Stockwerkshöhe in Fuss	Σ s-Säulen in (inches)^3	Σ s-Träger in (inches)^3	r	Momentenverteilung in %	Schub in 1000 Pfd.	Total Moment in 1000 Fuss-Pfd.	Total Säulenmoment in 1000 Fuss-Pfd.	$\frac{E\Theta}{1000}$	Deflektionen in inches: $\frac{E\Theta_D \times h}{1000}$	$\frac{E\Delta}{1000}$	$\frac{E\delta}{1000}$	*Säulen-Einspannmoment in* $\frac{\textit{inch-Pfund}}{10000}$: A	B	C
			168,9	0,65					18,3						
8	10,33	261,0			51 49	300,0	3100	1580 1520		2330	1470	3800	643	743	1012
			168,9	0,60					19,3						
7	11,00	300,8			51 49	307,4	3380	1730 1650		2570	1480	4050	746	848	1173
			168,9	0,55					19,6						
6	10,58	312,6			50 50	315,0	3330	1660 1670		2460	1350	3810	760	864	1193
			168,9	0,57					19,2						
5	11,82	280,0			41 59	322,8	3820	1570 2250		1820	1940	3760	600	681	942
			816,1	1,98					6,5						
4	15,25	544,0			60 40	332,3	5070	3040 2030		2160	1710	3870	796	986	1670
			245,4	0,41					17,1						
3	12,96	640,2			49 51	342,1	4430	2170 2260		2880	1070	3950	1128	1393	2360
			245,4	0,45					19,9						
2	18,58	446,2			40 60	352,9	6560	2620 3940		3050	3270	6320	876	1083	1838
			949,2	2,60					7,5						
1	22,15	285,0			40 60	355,2	7870	3150 4720		990	7340	8330	809	745	1130
			∞	∞					0						

[1]) Von Prof. L. E. Grinter, Texas College Station, U. S. A.

[2]) S = Schub infolge Wind in einem Stockwerk;
S_0 = Schub infolge geschätzter Einspannmomente;
M = Moment infolge Stockwerkschubes S im betr. Stockwerk;
M_0 = Equilibriertes Knotenpunktmoment infolge geschätzter Einspannmomente;
h = Stockwerkhöhe.

weichen, können die endgültigen Momente M einfach durch folgende Proportion ermittelt werden:

$$M = \text{Schubkriterium} \times M_0$$

Häufig werden die zu untersuchenden Stockwerkrahmen keine solchen Steifigkeitsverhältnisse aufweisen, dass die Voraussetzung $\frac{\delta}{h} = \text{konst.}$ zutrifft. Kleinere Abweichungen können aber durch Anbringen und Verteilen von Korrektionsmomenten in den betreffenden Stockwerken beseitigt werden. Das neue Schubkriterium in dem betr. Stockwerk muss nun, wenn die Schätzung der Korrekturmomente gut war, sich von den benachbarten nicht mehr als 10 bis 15 % unterscheiden.

Für Stockwerkrahmen von *unregelmässigerem* Charakter und für solche, deren Säulen an Kopf und Fuss sehr verschieden stark eingespannt sind, ist eine genauere Schätzung der Einspannmomente nach einer anderen, verhältnismässig einfachen Methode angezeigt.

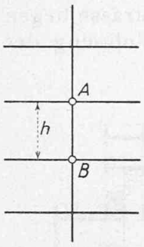

Abb. 3.

Man denke sich den ganzen Stockwerkrahmen auf eine einzige Säule mit entsprechenden horizontalen Stäben konzentriert (Abb. 3). Die Steifigkeit der kombinierten Säule sei gleich der Summe der Steifigkeiten der einzelnen Säulen im betreffenden Stockwerk:

$$s_S^{\text{komb.}} = \Sigma s_S$$

Die Steifigkeit des kombinierten Balkens sei gleich der doppelten Summe der Steifigkeiten der einzelnen Balken des betr. Bodens:

$$s_B^{\text{komb.}} = 2 \Sigma s_B$$

Die gegenseitige Verschiebung der Punkte A und B verursacht durch Rotation und Translation beträgt:

$$\delta = \overbrace{\frac{\Theta_A + \Theta_B}{2} \times h}^{\text{Rotation}} + \overbrace{\frac{\Delta_A + \Delta_B}{2}}^{\text{Translation}} = \frac{\Theta_A + \Theta_B}{2} \times h + \frac{1}{2 E J}\left(\frac{M_A \times h^2}{6} + \frac{M_B \times h^2}{6}\right)$$

$$\delta = \frac{\Theta_A + \Theta_B}{2} \times h + \frac{M_{\text{Total}} \times h}{12 E \Sigma s_{\text{Säulen}}} \qquad M_{\text{Total}} = S h$$

Um den Beitrag infolge Rotation $\left(\frac{\Theta_A + \Theta_B}{2}\right) \times h$ genauer schätzen zu können, werden die Einspannungsverhältnisse der Säulen an Kopf und Fuss in Betracht gezogen. Wir definieren die „Einspannung r" der Säule h im Punkt A folgendermassen:

$$r = \frac{\text{Steifigkeit des kombinierten Balkens in A}}{\text{Summe der Steifigkeiten der komb. Säulen oberhalb u. unterhalb A}}$$

Approximativ verhalten sich die Momente am Säulenkopf zu denen am Säulenfuss der kombinierten Säule wie:

$$\frac{M_{\text{oben}}}{M_{\text{unten}}} = \frac{2 r_{\text{oben}} + r_{\text{unten}}}{2 r_{\text{unten}} + r_{\text{oben}}}$$

Nachdem so die Säulenmomente aller kombinierten Säulen berechnet sind, lassen sich die in den kombinierten Balken auftretenden Momente als die Summe der Säulenmomente oberhalb und unterhalb des Balkens ermitteln.

Daraus folgt:

$$\Theta_A = \frac{M_{\text{Balken}}}{12 E \Sigma s_{\text{Balken}}}$$

wenn angenommen wird, dass der Inflexionspunkt des kombinierten Balkens in der Mitte liegt,

$$E \frac{\Theta_A + \Theta_B}{2} = E\, \Theta_{\text{Durchschnitt}}$$

Endlich:

$$E \delta = E\, \Theta_{\text{Durchschnitt}} \cdot h + \overbrace{\frac{M_{\text{Total}} \times h}{12 \Sigma s_{\text{Säulen}}}}^{E \Delta}$$

δ ist die geschätzte, gegenseitige, seitliche Bewegung im Stockwerk und ist massgebend für die Schätzung der Einspannmomente in den einzelnen Säulen nach der bereits angegebenen Beziehung:

$$M = \frac{6 s \times E \delta}{h}.$$

Die so geschätzten Einspannmomente in den Säulen werden angeschrieben und equilibriert. Die Schubkriterien der einzelnen Stockwerke und die endgültigen Momente werden wie unter c) berechnet. Die endgültigen Momente in den Balken erhält man, indem die Summe der endgültigen Säulenmomente im Verhältnis der M_0-Momente in den Balken verteilt wird.

15. Beispiel für die Berechnung eines Stockwerkrahmens.

Als Beispiel für die Berechnungsweise von Stockwerkrahmen diene ein Teilstück aus dem Rahmentragwerk des Gebäudes der amerikanischen Versicherungsunion, New York (Abb. 4). Dieser Rahmen wurde auch nach einer sog. „exakten" Methode berechnet. Der durchschnittliche Fehler gegenüber den Momenten der Verteilmethode beträgt 2 %, der maximale Fehler 9 %. Daraus erhellt, dass die Approximation der abgekürzten Methode für praktische Zwecke vollauf genügt.

*

Bemerkungen zu Abb. 4, die eine andere Anschreibemethode darstellt als Abb. 2. Die Säulenmomente sind in vertikalen Kolonnen links und rechts der Säule angeschrieben. In den Knotenpunktvierecken sind die Verteilungsprozentzahlen für die entsprechenden Stäbe eingeschrieben. Sie werden proportional den Steifigkeiten der zusammenstossenden Stäbe berechnet. Die in Klammern stehenden Zahlen sind die endgültigen, absoluten Momente in Einheiten von 100 000 inch-Pfund. Man erhält sie durch Multiplikation der unter dem Doppelstrich stehenden relativen Momente M_0 mit dem Schubkriterium des betreffenden Stockwerks (vergl. Seite 227, oben links).

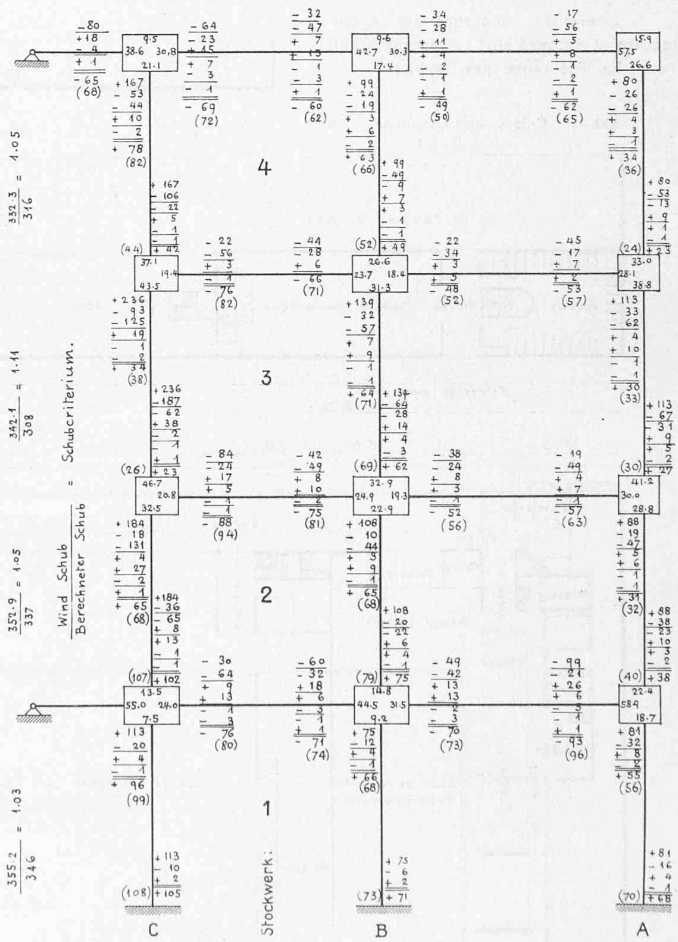

Abb. 4. Berechnung eines Stockwerkrahmens (Teilstück).