Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 101/102 (1933)

Heft: 7

Artikel: Statistisch-mathematische Auswertung systematischer Betonuntersuchungen

Autor: Bendel, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-83039

Band 102 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 7

Statistisch-mathematische Auswertung systematischer Betonuntersuchungen.

Von Ing. Dr. L. BENDEL, Luzern.

Für die Seeverlad- und Kieshandels-A.-G. Luzern hatte ich rund 75 000 Untersuchungen an Zement, Kiessand und Beton systematisch durchzuführen. Als ordnendes Element für die Auswertung dieser Grosszahl-Forschung wurde die statistische Mathematik herangezogen. Im folgenden sind einige wenige Auswertungsergebnisse beschrieben.

DREIDIMENSIONALE DARSTELLUNG.

Diese Methode ist bis heute in der Betonforschung noch nicht angewandt worden. Zwei Beispiele sind deshalb hier wiedergegeben:

a) *Einfluss der Aenderung der Normenfestigkeit des Zementes auf die Betondruckfestigkeit.*

Fabrikationstechnisch ist es ausgeschlossen, dass eine Fabrik Zement mit stets gleichbleibender Normenfestigkeit liefern kann. Es ist daher untersucht, wie gross der Einfluss einer Aenderung der Zementnormenfestigkeit auf die Betondruckfestigkeit ist. Es wurde Zement der gleichen Zementfabrik verwendet, wobei die Versuche das erste Mal mit Zement von 690 kg/cm² und das zweite Mal von 509 kg/cm² Normenfestigkeit durchgeführt wurden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abb. 1 wiedergegeben, für deren Ermittlung 700 Probekörper gemacht worden sind. Als Kies und Sand diente quarzhaltiges Reussmaterial, dessen Kornzusammensetzung beinahe der Fullerkurve entsprach. Um die Versuchsergebnisse möglichst übersichtlich wiederzugeben, wurde von der üblichen Darstellung mit Abszisse und Ordinate abgewichen und dafür die dreidimensionale Darstellung gewählt. Auf der Horizontalen sind die Wassermengen aufgetragen, die auf 500 l Sand 0/10 mm und 500 l Kies 6/25 mm genommen wurden. Auf der Schiefen sind die Zementmengen eingetragen, die auf die oben angegebene Kies-Sand-Menge genommen wurden; auf der Senkrechten sind die erhaltenen Betondruckfestigkeiten für die beiden Zement-Normenfestigkeiten angeschrieben. Das Alter der Probekörper war 28 Tage.

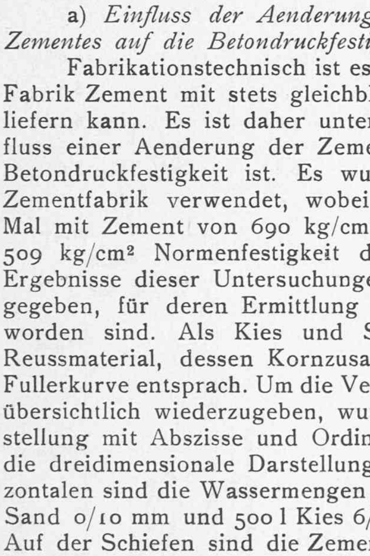


Abb. 1. Druckfestigkeit in Funktion von Zement- und Wassermenge, gestrichelt für Zementnormenfestigkeit 509 kg/cm² nach 28 Tagen, voll für 690 kg/cm².

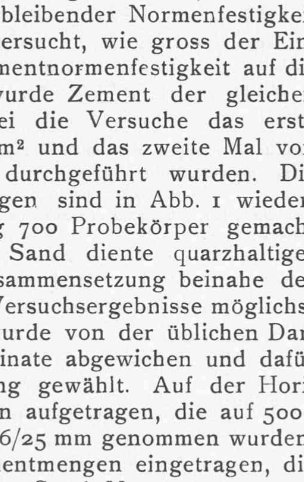


Abb. 2. Kiessandbedarf in Funktion von Zement- und Wassermenge, gestrichelt für 3 mt Stampfarbeit pro m³ Beton, voll für 15 mt/m³.

Aus Abb. 1 geht folgendes hervor: Aendert sich die Normenfestigkeit des zur Betonherstellung verwendeten Zementes, so ändert sich auch die Betondruckfestigkeit, und zwar wird der Unterschied zwischen den Betondruckfestigkeiten um so kleiner, je mehr Wasser zur Herstellung des Beton gewählt wird. Zu der gleichen Feststellung kommt man, wenn man die bestehende erdfeuchte Normenprüfung des Zementes mit dem Vorschlage der plastischen Normenprüfung vergleicht.

b) *Kiessandbedarf.*

Die Abhängigkeit des Kiessandraumgewichtes von der im Kiessand vorhandenen Feuchtigkeit (sog. Naturfeuchtigkeit) ist im Jahre 1887 von Taylor festgestellt worden. Versuche über Kiessandraumgewicht, Naturfeuchtigkeit und Kiessandvolumenänderung sind im Bericht des Deutschen Betonvereines 1929 (Bendel, Sandfeuchtigkeitsuntersuche, S. 390) erwähnt. Jene Versuche wurden um 1100 neue Untersuchungen vermehrt, um die Abhängigkeit des Kies- und Sandbedarfes von Zementgehalt, Zementmarke, Zementmenge, Kies-Sand-Art (Gruben-, Fluss- und gebrochenes Material), Kiessandzusammensetzung, Wassermenge, Stampfart und Mischmaschinensystem festzustellen.

Als Beispiel ist Abb. 2 gewählt, die den Kies- und Sandbedarf zeigt in Abhängigkeit einerseits von der Zement- und Wassermenge und andererseits von der Stampfarbeit. Aus dieser Abbildung geht hervor, dass bei Beton mit kleinem Zementgehalt der Bedarf an Kiessand für 1 m³ Beton um so grösser wird, je grösser man die Wassermenge wählt. Diese Erscheinung ist damit zu erklären, dass das Wasser als „Schmiermittel" das Ineinanderverschlüpfen von Sand und Kies begünstigt. Bei Beton mit viel Zementgehalt wird aber der Bedarf an Kiessand umso kleiner, je grösser die Wassermenge gewählt wird.

Abb. 3 zeigt eine systematische Untersuchungsreihe, die gemacht wurde, um den Einfluss der Naturfeuchtigkeit auf den Sand- und Kiesbedarf für 1 m³ Beton festzulegen.

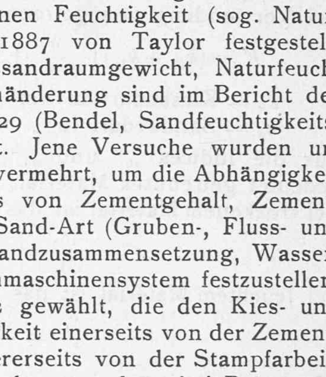
Abb. 3. Kiessandbedarf.

Drehofenzement, Normenfestigkeit 601 kg/cm², Raumgewicht 1,25 kg/dm³. Kiessand 0 bis 30 mm.

Kurve I: Wassermenge 165 l/m³ fertigen Beton.

Kurve II: Wassermenge 185 l/m³ fertigen Beton.

Konsistenz plastisch. Freifallmischung, Mischdauer 60 sec.



Die Formel für die Berechnung des Kiessandbedarfes lautet:

$$r_{b0} = z_0 + w_0 + k_0\, r_0 \qquad (1)$$

r_b = Raumgewicht des Beton in kg/m³
z = Zementmenge in kg/m³ Fertigbeton
w = Wassermenge in kg/m³ Fertigbeton
k = Kiesbedarf in l/m³ Fertigbeton
r = Raumgewicht des Kiessandes pro l

Index „0" bei Verwendung von trockenem Kiessand,
„ „1" „ „ „ nassem „

Ferner bedeutet

x = Mehrbedarf an Kiessand bei feuchtem gegenüber trockenem Material, in Prozenten.

y = prozentuale Verminderung des Kiessandraumgewichtes infolge des Naturfeuchtigkeitsgehaltes des Kiessandes.

Es ist somit

$$r_{b1} = z_0 (1 + x) + w_0 (1 + x) + k_0 (1 + x) r_0 (1 - y) \quad (2)$$

$$\frac{r_{b_1}}{(1 + x)} = (z_0 + w_0 + k_0 r_0) - k_0 r_0 y = r_{b_0} - k_0 r_0 y \quad (3)$$

Da versuchstechnisch sich ergibt, dass $r_{b_1} \sim r_{b_0}$ ist, so kann geschrieben werden:

$$x = \frac{y}{a - y}, \text{ wobei } a = \frac{r_{b_0}}{k_0 r_0} \text{ ist.}$$

oder: Der Kiessandbedarf (K) in Abhängigkeit der Naturfeuchtigkeit ist

$$K = k_0 \left(\frac{a}{a - y}\right) = k_0 (1 + x) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

y ist praktisch zwischen 0 bis 0,2 zu nehmen und ist eine spezifische Materialeigenschaft (vergleiche: Bendel „Richtlinien für die Aufbereitung, Verarbeitung und Nachbehandlung von Beton“, III. Auflage, Seite 10; ferner: Bendel, Jahrbuch Deutscher Betonverein 1929, Seite 391). Bei Verwendung von getrennten Materialien ist

$$K_g = (k_{k_0} + k_{s_0}) \left(\frac{a'}{a' - y}\right), \text{ wobei } a' = \frac{r_{b_0}}{k_{s_0} r_{s_0}} \text{ ist.} \quad . \quad (5)$$

k_k = Kiesbedarf in l/m³ Fertigbeton

k_s = Sandbedarf in „ „

Für die Indices „0“ und „1“ siehe oben. Der Index „g“ bedeutet getrenntes Material.

Bei trockenem Material ist das Verhältnis von Sand zu Kies

$$\frac{S_0}{K_0} = \frac{k_{s_0} r_{s_0}}{k_{k_0} r_{k_0}}$$

Bei feuchtem Material ist das Verhältnis von Sand zu Kies

$$\frac{S_1}{K_1} = \frac{k_{s_1} r_{s_1} (1 - y)}{k_{k_1} r_{k_1}}$$

(Versuchstechnisch zeigte sich, dass $k_{k_0} r_{k_0} \cong k_{k_1} r_{k_1}$ ist). Aus den letzten Formeln ergibt sich, dass das Kiessandverhältnis $\frac{S_1}{K_1}$ bei feuchtem Material um den Faktor $(1 - y)$ kleiner wird als für $\frac{S_0}{K_0}$ bei trockenem Material; d. h. der *Sand*gehalt muss um den Betrag $\frac{1}{1 - y}$ vermehrt werden, um ein gegebenes Sandkiesverhältnis trotz änderndem Sandfeuchtigkeitsgehalt beizubehalten. Für frisch gewaschenen Splitt schwankt y zwischen 0 und 0,35. Bei den Voruntersuchungen für den Ceneritunnel fand ich, dass für trockenen Splitt 0/12 mm 250 l und für feuchten Splitt 0/12 mm sogar 340 l zu nehmen waren, um im m³ Fertigbeton das gegebene Verhältnis Sand zu Kies sowohl bei Verwendung von feuchtem als auch von trockenem Material innehalten zu können. Auf einer anderen Baustelle ergab sich, dass bei Verwendung von trockenem Material das Verhältnis $\frac{S_0}{K_0} = \frac{1}{2}$ war und bei feuchtem Material stieg es auf $\frac{1}{2,65}$; d. h. der Beton wurde *kiesig* und sehr *schwer* zu verarbeiten. Infolge Verwendung von feuchtem Material wurde dann das Mischungs-Verhältnis $\frac{S_1}{K_1}$ in $\frac{1}{1,5}$ abgeändert, worauf im Fertigbeton das gewünschte $S_1 : K_1$ Verhältnis = 1 : 2 erreicht wurde.

Aus diesen wenigen Beispielen geht hervor, dass die Auflockerung des Sandes für den Bedarf an Kies und Sand von grosser Bedeutung ist. Wenn z. B. die Vorversuche im Laboratorium mit trockenem Kiessand gemacht werden und nachher auf der Baustelle mit feuchtem Material gearbeitet werden muss, so stellen sich nicht unerhebliche Differenzen im tatsächlichen Zementgehalt des Fertigbeton ein.

Parallel mit den Schwankungen des tatsächlichen Zementgehaltes im Beton gehen auch die Schwankungen der Betondruckfestigkeiten, oder mit anderen Worten: im Quellvermögen, dem sogenannten Auflockern des Sandes infolge verschieden grosser Naturfeuchtigkeit, ist eine namhafte Ursache der Streuungen der Betondruckfestigkeiten zu suchen.

STREUUNGSBEREICH DER BETONFESTIGKEITEN.

Der mittlere, wahrscheinliche Streuungsbereich (e_2) ist definiert durch: $e_2{}^2 = \frac{[v\,v]}{n}$ . . . . . . (7)

Es ist n = Anzahl der Untersuchungen, $v = A - m$, A = beobachteter Wert, m = arithmetisches Mittel (vergl. Abb. 4). Für die Praxis wird am besten der Variabilitätskoeffizient genommen; er ist:

$$V = \frac{\pm e_2}{m}\, 100 = \frac{\pm 100 \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}}{\frac{\Sigma A}{n}} \quad . \quad . \quad (8)$$

Korrelationstabelle Nr. 1 gibt Aufschluss über die erhaltenen V von 2300 Laboratoriumsversuchen.

Korrelationstabelle Nr. 1

Variabilitätskoeffizient Sand 0/10 mm (500 l) + Kies 6/25 mm (500 l) Zementmenge in kg	Wassermenge in Litern 165	145	125	105	Mittel
210	9,0 %	8,0 %	10,5 %	15 %	± 10,6 %
160	6,2 %	6,5 %	9,0 %	13,5 %	± 8,8 %
105	4,0 %	4,8 %	5,8 %	11,0 %	± 6,4 %
Mittel	± 6,4 %	± 6,4 %	± 8,4 %	± 13,2 %	± 8,6 %

Abb. 4. Streuungen, Maximal-Minimalwerte. Drehofenzement, Normenfestigkeit: 670 kg/cm² nach 28 Tagen. Freifallmischer, Mischdauer 60 Sekunden. *Probekörper:* Grösse 20/20/20 cm, Alter 28 Tage, Lagerung in feuchter Luft, Anzahl 402.

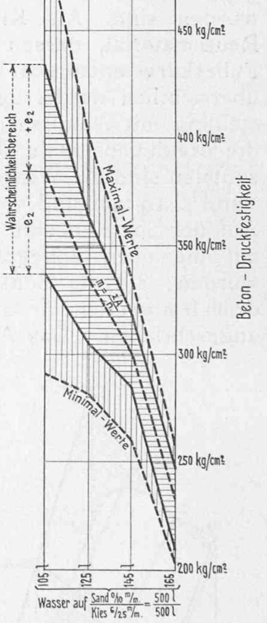
$m = \frac{\Sigma A}{n}$ = arithmetisches Mittel.

A = beobachteter Wert.

n = Anzahl der Beobachtungen.

$v = m - A$.

$e_2 = \sqrt{\frac{[VV]}{n}}$ = Bereich, innerhalb welchem am wahrscheinlichsten die Betondruckfestigkeiten auftreten.



Bei weitern Untersuchungen ergab es sich, dass der Variabilitätskoeffizient sehr stark von der Wahl des Mischmaschinensystems abhängt; ferner konnte festgestellt werden, dass, namentlich bei fetten Mischungen, die Mischdauer auf die gleichmässige Beschaffenheit des Beton einen grossen Einfluss ausübt und dass bei einer Mischdauer von 60 sec die Streuung bei Verwendung von getrennten Materialien durchschnittlich grösser ist als bei der Wahl von ungetrennten Materialien.

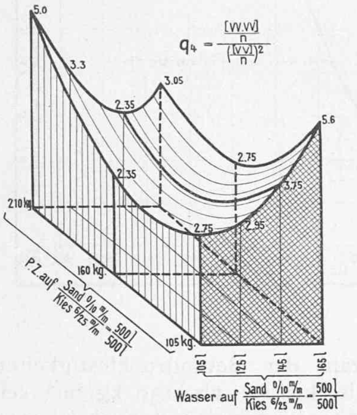
Dann ergab sich weiter, dass Beton aus Kiessand, dessen Zusammensetzung sich der kiesreichen Grenzkurve nähert, wesentlich stärkere Streuungen aufweist als etwas sandreichere Kiessande. Der Grund hierfür mag in der schwereren Verarbeitungsmöglichkeit von kiesreichem Beton als von sandarmem Kiessand liegen.

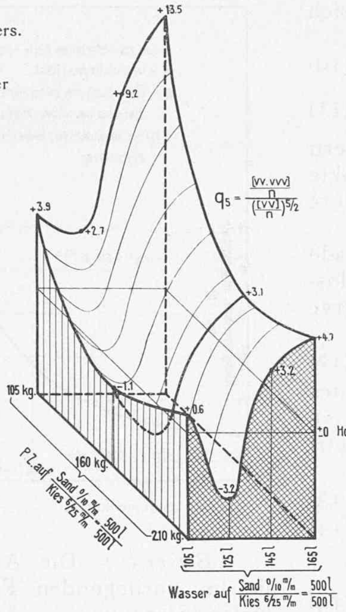
DIE BEDEUTUNG DER OUTSIDERS GEGENÜBER DEM MITTLEREN STREUUNGSBEREICH.

Unter Outsider sind diejenigen Werte zu verstehen, die ausserhalb des mittleren Streuungsbereiches (e_2) liegen. Die Bedeutung der Outsiders gegenüber dem Bereich (e_2) kann auf Grund folgender Ueberlegungen mathematisch erfasst werden:

Abb. 5 (links). Wahrscheinlichkeit von Outsiders.

Abb. 6 (rechts). Grössenordnung für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens positiver oder negativer Outsiders.





Man nehme z. B. zwei Werte $A_{(a)}$ und $A_{(b)}$; der Wert $A_{(a)}$ liege sehr nahe beim arithmetischen Mittel (m), der Wert $A_{(b)}$ weiche hingegen stark davon ab. Man bilde die Differenzen $A_{(a)} - m = v_{(a)}$ bezw. $A_{(b)} - m = v\,(b)$ und nehme für $v_{(a)}$ bezw. $v_{(b)}$ die zweite, dritte, xte Potenz. In diesem Falle wird die Differenz zwischen den Potenzwerten $(v_b^x - v_a^x)$ um so grösser, je höher die Potenz x genommen wurde. Es ergibt sich also, dass Outsiderwerte um so grössere Bedeutung bekommen, je grösser die Potenz x genommen wird. Bringt man die Werte v^x in Beziehung zum mittleren Streuungsbereich e_2, so lässt sich folgende praktisch verwendbare Formel anschreiben:

$$q_x = \frac{[v_x]^{1/n}}{e_2^{\,x}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

n = Anzahl der beobachteten Werte.

Wird für x eine ungerade Zahl gewählt, so kann q_x positiv oder negativ ausfallen; wird für x eine gerade Zahl gewählt, so kann q_x nur positiv werden. Nachfolgend wird $x = 4$ und $x = 5$ gewählt und die Deutung von q_4 bezw. von q_5 kritisch behandelt.

Treten Outsiders auf, deren v gross ist, so wird q_x ebenfalls gross, oder mit anderen Worten: Je grösser q_x ist, um so grösser ist die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Outsiders. Zur Ermittlung von q_4 wurden 3200 Untersuchungsergebnisse verwendet. Diese Versuche bezogen sich auf die Druckfestigkeit in Abhängigkeit von Zementmenge, Wassergehalt, Kies-Sand-Zusammensetzung, Mischdauer und Mischmaschinensystem. Abb. 5 zeigt, dass einerseits bei sehr trockenem und zementreichem und anderseits bei sehr nassem und zementarmem Beton die Wahrscheinlichkeit des Auftretens extremer Outsiders am grössten ist. Bei plastischem Beton erhält man für q_4 die geringsten Werte.

Die Formel q_x für $x = 4$ gibt wohl an, ob Werte auftreten, die stark extremal zum arithmetischen Mittel liegen, man erhält aber keine Auskunft darüber, ob die Outsiders wahrscheinlicher positives oder negatives Vorzeichen haben. Auch ist im Betonbau die Feststellung, ob es wahrscheinlich ist, dass eine einseitige negative Asymmetrie zu erwarten sei, von allergrösster Wichtigkeit. Zur Feststellung, ob die Outsiders wahrscheinlich positiv oder negativ auftreten, wird Formel q_x mit x gleich einer ungeraden Zahl gewählt, z. B. $x = 3$ oder $x = 5$. Die zur Verfügung stehenden 3200 Einzelbeobachtungen wurden sowohl für $x = 3$ oder $x = 5$ verarbeitet. Aus Abb. 6 geht hervor, dass bei der Wahl von Gussbeton die Wahrscheinlichkeit sehr gross ist, dass einzelne Werte auftreten, deren Druckfestigkeit wesentlich grösser ist als das arithmetische Mittel.

Chemische Untersuchungen über die Zementmengenverteilung werden zurzeit an grössern Versuchsreihen vorgenommen. Daraus hoffe ich, Klarheit zu erlangen, ob eine Kies-Sand-Entmischung eintrete oder ob die ungleiche Verteilung der Zementmenge die Schuld an der Streuung der Ergebnisse trage. Die übrigen Versuche zeigten, dass für jedes Mischmaschinensystem verschiedene q_4 bezw. q_5 Kurven gefunden wurden. Es ist also möglich, mit Hilfe der q_4 und q_5 Kurven Schlüsse zu ziehen, wie zuverlässig ein Mischmaschinensystem für die Lieferung von gleichmässig gemischtem Beton ist.

HÄUFIGKEITSFORSCHUNG.

Bei der Häufigkeitsforschung wird der Quotient eingeführt:

$$r\,H = \frac{\text{Anzahl der Werte im mittleren Streuungsbereich}}{\text{Anzahl der Beobachtungen}}$$

$r\,H$ = relative Häufigkeit.

Korrelationstabelle Nr. 2 gibt eine Uebersicht aus 4000 Untersuchungsergebnissen am Freifallmischer.

Korrelationstabelle Nr. 2

Häufigkeit der Betondruckfestigkeiten im mittleren Streuungsbereich e_2 (relative Häufigkeit)

Zementmenge in kg	Wassermenge in Litern 165	145	125	105	Mittel
210	71 %	74 %	63 %	67 %	69 %
160	76 %	74 %	63 %	67 %	68 %
105	73 %	74 %	71 %	70 %	72 %
Mittel	73 %	74 %	66 %	68 %	70 %

D. h. es kann angenommen werden, dass 70 % der zu erwartenden Betondruckfestigkeiten im Streuungsbereich (e_2) liegen. Nachrechnungen der Festigkeitsergebnisse von Beton, der zur Herstellung von Staumauern verwendet wurde und bei dem die Betonerzeugung sich über die Zeit von zwei bis drei Jahren erstreckte, ergaben Zahlen von 65 bis 72 %.

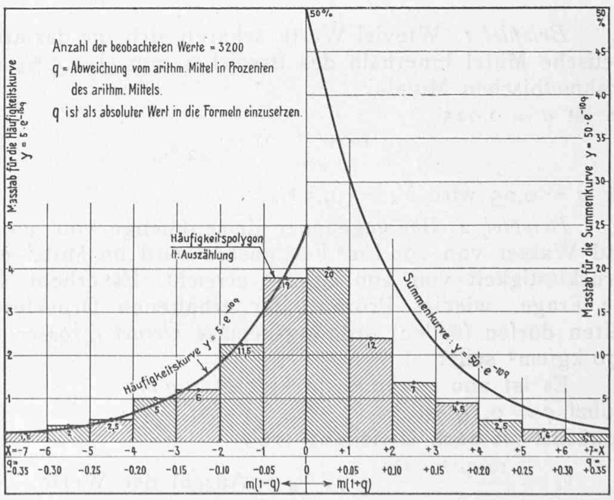


Abb. 7. Häufigkeitspolygon, Häufigkeitskurve, Summenkurve.

Abb. 7 zeigt eine empirisch gefundene Häufigkeitskurve von Betondruckfestigkeiten. Die Kurve ist das Mittel aus 2500 systematisch durchgeführten Bauplatzuntersuchungen. Die empirisch gefundene Häufigkeitskurve soll nun in ein Verteilungsgesetz gekleidet werden.

Um die Form der mathematischen Gleichung finden zu können, wird graphisch festgestellt, in welchem Masstab Abzisse und Ordinate gezeichnet werden müssen, um zunächst eine lineare Gleichung zu erhalten. Es ergaben sich folgende Formen:

$$\text{Form 1} \quad [\log \log y] = b + a\,[\log x] \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\text{oder} \quad \text{Form 2} \quad \left[\frac{y - y_0}{x - x_0}\right] = (b + 2\,c\,x_0) + c\,[x - x_0] \quad (11)$$

Hierbei bedeuten die Grössen in den eckigen Klammern die Abzisse und Ordinate der aufzuzeichnenden Punkte und die Koeffizienten die Steigung der Geraden und ihre Abschnitte auf der Y-Axe.

Form 1. Wenn im verzerrten Masstab eine Gerade erhalten wird, wie nach Form 1, so kann hieraus geschlossen werden, dass im wahrheitsgetreuen Masstab die Kurve die Form hat

$$Y = f(x,\ a,\ b) = a\,e^{-b\,x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Es ist zweckmässig, eine Transformation des Argumentes vorzunehmen durch Wahl einer vermittelnden Funktion (z). Für die vorliegende Betonhäufigkeitskurve konnte gesetzt werden:

$$z = f(x) = 0{,}71\,x^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\text{oder} \quad Y = a\,e^{-b\,[f(x)]^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\text{Für} \quad a = 5$$

$$b = 1$$

$$\text{ergibt sich} \quad Y = 5\,e^{-z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Da aber die gesuchte Formel der Betonhäufigkeitskurve so dargestellt sein soll, dass sie durch Einsetzen der Prozente der Abweichung vom arithmetischen Mittel ($= \pm\,q$, siehe Abb. 7) benützt werden kann, wird eine einfache Transformation der Abszisse notwendig. Man setze:

$$x = 20\,q$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (13) und (15)

$$Y_1 = 5\,e^{-10\,q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\text{a})$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass q als absoluter Wert einzusetzen ist.

Um die *Summenkurve* zu finden, wird das Integral gebildet.

$$y_2 = \int y_1\,dq = 5 \int e^{-10\,q}\,dq = 50\,e^{-10\,q} + C$$

für $q = 0$ ergibt sich: $y_2 = 50$; $C = 0$.

$$\text{Somit ist:} \quad y_2 = 50\,e^{-10\,q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

q ist mit seinem absoluten Wert einzusetzen.

Will man die Anzahl Werte kennen, die *innerhalb* des Streuungsbereiches $m\ (1 \pm q)$ liegen, so ergibt sich folgende Formel:

$$Y_3 = 100 - 2\,(50\,e^{-10\,q}) = 100\,(1 - e^{-10\,q}) = \frac{100\,(e^{10\,q} - 1)}{e^{10\,q}} \quad (16')$$

Beispiel 1. Wieviel Werte scharen sich um das arithmetische Mittel innerhalb des Bereiches von $\pm\,2{,}5\,\%$ des arithmethischen Mittels?

Es ist $q = 0{,}025$

$$y_3 = \frac{100\,(e^{0{,}25} - 1)}{e^{0{,}25}} = 22\,\%$$

für $q = 0{,}05$ wird $Y_3 = 39{,}5\,\%$.

Beispiel 2. Bei gegebener Zementmenge von 300 kg und Wasser von 190 l/m³ Fertigbeton wird im Mittel eine Druckfestigkeit von 200 kg/cm² erreicht. Es erhebt sich die Frage, wieviel Prozent der erhaltenen Druckfestigkeiten dürfen (sollen) ordnungsgemäss *kleiner (grösser)* als 170 kg/cm² sein?

Es ist $200 - 170 = 30$ kg/cm² $= q\,m$

wobei $q = 0{,}15$ ist.

Zunächst ist nach Gleichung (16′):

$$y_3 = \frac{100\,(e^{1{,}5} - 1)}{e^{1{,}5}} = 78\,\% = \text{Anzahl der Werte,}$$

die *innerhalb* des Bereiches $m\ (1 \pm q)$ liegen. Da Formel (16′) ein symmetrisches Verteilungsgesetz wiedergibt, so errechnet sich die zulässige Anzahl Werte, die *kleiner* sein dürfen als 170 kg/cm² zu:

$$\frac{100 - y_3}{2} = 50\,e^{-1{,}5} = 10{,}8\,\%$$

Und die Anzahl Werte, die *grösser* als 170 kg/cm² sein sollen, ist somit

$$Y_4 = \frac{100 + y_3}{2} = \frac{100 + 78}{2} = 89\,\% \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

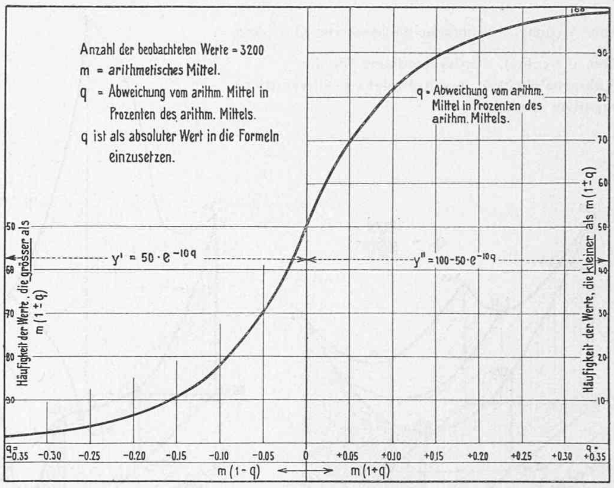


Abb. 8. Summenkurve.

Beispiel 3. Die Anzahl der Betondruckfestigkeiten, die im vorliegenden Falle kleiner als 150 kg/cm² sein dürfen (Streuung $= -\,25\,\%$), berechnet sich nach Gl. (16):

$$Y = 50\,e^{-2{,}5} = 4{,}5\,\%$$

Beispiel 4. Gleichung (12) kann auch abgeleitet werden als Sonderfall der Gauss'schen Fehlerkurve:

$$Y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$N =$ Umfang des Kollektivgegenstandes $=$ gesamte Betondruckfestigkeiten $= 100\,\%$; ferner ist

$$\sigma = \text{Streuung} = \sqrt{\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,y\,dt} = \pm\,12{,}5\,\% = 100\,q.$$

Für $q = 0{,}125$ errechnet sich die relative Häufigkeit im Bereich $m\ (1 \pm 0{,}125)$ zu:

$$y_3 = \frac{100\,(e^{1{,}25} - 1)}{e^{1{,}25}} = 71{,}5\,\% = r \cdot H.$$

Nach Korrelationstabelle Nr. 2 wurde die relative Häufigkeit zu 70 % gefunden. Daraus ergibt sich, dass die Formeln (16) und (16′) mit der Praxis gut übereinstimmende Werte liefern.

Die *Summenkurve* in Abb. 8 ist folgendermassen gefunden worden:

Nach Formel (16) ist: $y_2 = 50\,e^{-10\,q}$. Für $q = 0$ ergibt $y_2 = 50\,\%$.

Für den Ast $q =$ minus gilt $Y = 50\,e^{-10\,q}$ . . . (19)

Für den Ast $q =$ positiv gilt $Y = 100 - 50\,e^{-10\,q}$ (19a)

wobei q jeweils als absoluter Wert in die Formel (19a) einzusetzen ist.

Form 2. (Vergleiche Gleichung (10) und (11). Aus Gl. (11) ergibt sich, dass die allgemeine Form der gesuchten Verteilungsfunktion sein muss:

$$Y = f(x,\ a,\ b,\ c) = a + A b + B c \quad . \quad . \quad (20)$$

wobei $A = f_1\,(x) = x$ und $B = f_2\,(x) = x^2$ ist.

Mit Hilfe der Gauss'schen Normalgleichung berechnet sich:

$$[AA]\,b + [AB]\,c + [Aa] - [AY] = 0$$

$$[BB]\,b + [BB]\,c + [Ba] - [BY] = 0 \quad . \quad . \quad (21)$$

hieraus ergibt sich

$$Y = 47 - 16{,}2\,x + 1{,}4\,x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Die Kontrolle wurde gemacht, indem folgende Momente gebildet wurden:

$$\int f(x, b, c)\ dx \quad = \int (a + bx + cx^2)\ dx \ =$$

$$\text{Flächeneinheit} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\int f(x, a, b, c)\ xdx = \int (a + bx + cx^2)\ xdx =$$

$$\text{Statisches Moment} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\int f(x, q, b, c)\ x^2 dx = \int (a + bx + cx^2)\ x^2 dx =$$

$$\text{Trägheitsmoment} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

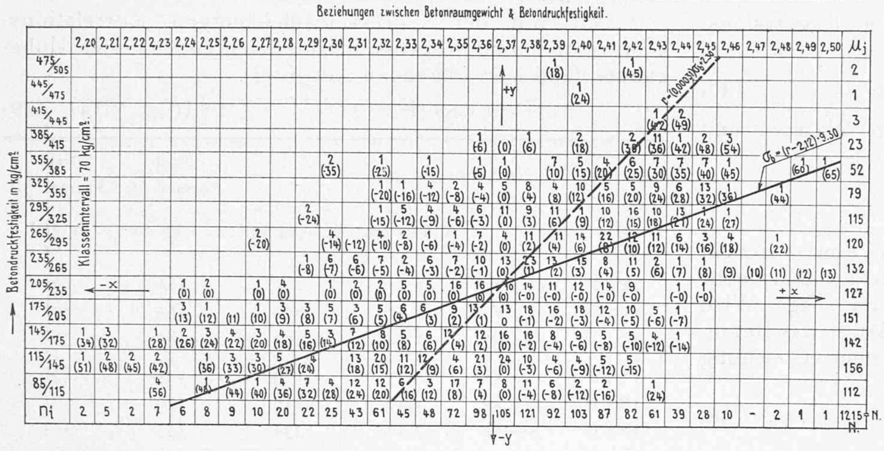


Abb. 9. Beziehungen zwischen Betonraumgewicht und Betondruckfestigkeit.
r = Betonraumgewicht, σ_b = Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen.
Eingeklammerte Werte bedeuten das Koordinatenprodukt ($x \cdot y$).

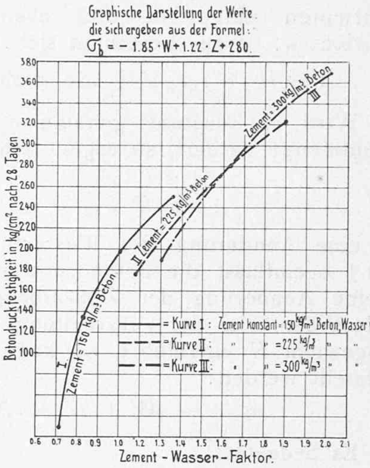


Abb. 10. Graphische Darstellung der Werte nach Formel (36).

Diese Momente ergeben drei Gleichungen mit den drei Unbekannten a, b, c; hieraus berechnet sich wiederum annähernd: $Y = 47 - 16{,}2\,x + 1{,}4\,x^2$
x ist mit dem absoluten Wert einzusetzen; die Kurve ist symmetrisch in Bezug auf $x = 0$.

Vorteilhaft nimmt man eine Transformation des Koordinatensystemes vor, in dem wie früher gesetzt wird:

$$q = \frac{0{,}5\,x}{10}$$

Y gibt wiederum nur die Werte an, die *ausserhalb* des Bereiches von $m\,(1 + q)$ liegen. Für die Werte *innerhalb* des Bereiches $m\,(1 \pm q)$ gilt die Form:

$$Y = 6\,(108\,q - 187\,q^2 + 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Für $q = 0{,}15$ errechnet sich $Y = 78\,\%$; nach Gleichung (16) wurde $Y = 78\,\%$ gefunden.

Die oben abgeleiteten Formeln beziehen sich auf symmetrische Kurven. In Wirklichkeit ist die Betonhäufigkeitskurve leicht asymmetrisch. Zur Auffindung des mathematischen Ausdruckes für dieses Verteilungsgesetz wird zweckmässig für die vermittelnde Funktion (z) selber eine asymmetrische Kurve gewählt; z. B. $z = \log\left(\frac{x_0}{x}\right)$ (vergleiche Fechner oder Kummer, „S. B. Z.", Bd. 101, S. 123). Gute, brauchbare Resultate ergibt für den vorliegenden Fall

$$z = a\,e^{-(x - x_0)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

AUSWERTUNG MITTELS DER KORRELATION.

Bei funktionellem Zusammenhang $y = f(x)$ ist einem bestimmten Wert x ein bestimmter Wert y zugeordnet. Im Betonbau kommt es sehr oft vor, dass mit einer Erscheinung X sehr wahrscheinlich eine grössere Anzahl Ereignisse Y verbunden sind. Mit diesen wahrscheinlichkeitstheoretischen, sog. stochastischen Zusammenhängen befasst sich die Korrelationsrechnung. Im Falle der stochastischen Verbundenheit von x mit y erscheint also auch y nach Festlegung des Wertes x als eine zufällige Veränderliche, die verschiedene Werte mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten annehmen kann.

Der Zusammenhang von Y mit X kann aber mehr oder weniger stramm sein; eine Aufgabe der Korrelationsrechnung ist daher, Masszahlen für die Strammheit stochastischer Zusammenhänge aufzustellen. Einen wichtigen Einblick in diesen Zusammenhang gibt der Parameter

$$\gamma_{1/0} = \frac{\Sigma x_n\,y_n}{\sqrt{\Sigma x_n^2\;\Sigma y_n^2}} = \text{Korrelationskoeffizient.} \qquad (28)$$

y_n, $x_n = X_{\min}$ (Arithm. Mittel) [1]).

Nachfolgend sind einige wichtige Ergebnisse näher geschildert: Bis jetzt wurde eine Anzahl *empirischer* Formeln für die Festigkeitsvoraussage im Beton bekannt gegeben (z. B. Bolomey, Féret, Graf usw.). Zum ersten Male ist es mir mit Hilfe der Grosszahlforschung gelungen, auf *mathematischem* Wege Formeln zur Festigkeitsvoraussage von Beton aufzustellen.

So wurde z. B. aus 1250 Untersuchungen bei konstant bleibendem Kiessandgemisch gefunden:

$$\Delta\,\sigma_b = \frac{\mu_{1/1}}{\mu_{2/0}}\,\Delta\frac{Z}{W} = \frac{33{,}9}{(0{,}398)^2}\,\Delta\frac{Z}{W} \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und $\quad \Delta\frac{Z}{W} = \frac{\mu_{1/1}}{\mu_{0/2}}\,\Delta\,\sigma_b = \frac{33{,}9}{90^2}\,\Delta\,\sigma_b\,;$

Hieraus ergibt sich für σ_b als Mittelwert:

$$\sigma_b = \left(\frac{Z}{W} - 0{,}15\right) 210 = Z_3 \quad . \quad . \quad (30)$$

und $\quad \frac{Z}{W} = (\sigma_b + 62)\,\frac{42{,}5}{10^4} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$

Ferner wurde gefunden:
Gleichung für Maximalwerte:

$$\sigma_{b\,\max} = (Z/W - 0{,}2) \cdot 250 = Z_1 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Gleichung für Minimalwerte:

$$\sigma_{b\,\min} = (Z/W - 0{,}1) \cdot 180 = Z_2 \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Es ergibt sich: $Z_1 - Z_3 = 40\,Z/W - 18$,
$Z_3 - Z_2 = 30\,Z/W - 14$.

Folgerung: Somit ist $(Z_1 - Z_3) > (Z_3 - Z_2)$, d. h. es besteht eine *positive Asymmetrie*; mit andern Worten:

Bei Betrachtung der Gesamtheit der Ergebnisse kommt man zum Schlusse, dass wahrscheinlicher Werte auftreten, die grösser als das arithmetische Mittel sind.

Ferner ist $Z_1 - Z_2 = (70\,Z/W - 32)$ = Streuungsbereich zwischen minimaler und maximaler Betondruckfestigkeit.

Durch Kombination der Gleichungen Z_1, Z_2 und Z_3 ergibt sich für die grössten Outsiderwerte σ_{b_0}

$$\sigma_{b_0} \cong (1 \pm 0{,}16)\,Z_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

d. h. die Maximal- und Minimalwerte weichen für *Laboratoriumsversuche* vom arithmetischen Mittel um $\pm$ 16 % ab. Auf der *Baustelle*, wo Beton mit verschiedenen Mischmaschinensystemen und verschiedener Mischdauer hergestellt wird, wo ferner die Normenfestigkeit der gleichen Zementmarke Schwankungen unterworfen ist, ergab sich aus 1621 Probekörpern während einer Beobachtungsperiode von drei Monaten, dass die Streuung der Maximal- und Minimalwerte, ausgedrückt in Prozenten des arithmetischen Mittels, $\pm$ 35 % betrug.

In einem weiteren Beispiel ist die Aufstellung der neuen Gleichung:

$$\sigma_b = -\,a\,W + b\,Z + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

mit Hilfe der Regressionsgleichungen behandelt.

Es bedeutet:
σ_b = Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen
Z = Zementmenge in kg/m³ Beton
W = Wassermenge in l/m³ Beton.

Zu diesem Zwecke werden Korrelationstabellen aufgestellt. Aus den Korrelationstabellen ergeben sich die Regressionsgleichungen. Es werden auch die Korrelations-

[1]) Für die Theorie siehe F. Bauer: „Korrelationsrechnung" und Rietz: „Handbuch der mathematischen Statistik".

koeffizienten aufgestellt und ebenso die Regressionskoeffizienten; daraus berechnet sich:

$$\sigma_b = -1{,}85\,W + 1{,}22\,Z + 280 \text{ (siehe Abb. 10)} \quad . \quad . \quad (36)$$

Wird σ_b konstant genommen, aber Wasser- und Zementmenge variiert, so ergibt sich

$$\frac{\varDelta Z}{\varDelta W} = \frac{1{,}85}{1{,}22} \sim 1{,}5, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

d. h. eine Aenderung des *Wasser*zusatzes zum Mischgut um 1 l beeinflusst die Betondruckfestigkeit 1,5 Mal mehr als eine Aenderung der *Zement*beigabe um 1 kg. Wird als Mass der Güte der Verarbeitung des Beton das Betonraumgewicht R eingeführt, so kann die neue Gleichung aufgestellt werden:

$$\sigma_b = -aW + bZ + cR + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Es bedeutet:

σ_b = Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen,
W = Wassermenge in l/m³ fertigen Beton,
Z = Zement in kg/m³ fertigen Beton,
R = Raumgewicht des 28 Tage alten Beton in kg/m³ (siehe Korrelationstabelle Abb. 9).

Mit Hilfe der Regressionsgleichungen, Korrelationskoeffizienten und Regressionskoeffizienten für vier Unbekannte fand man folgenden Ausdruck:

$$\sigma_b = -1{,}52\,W + 1{,}00\,Z + 1100\,(R - 2{,}14) \quad (39)$$

Nach Formel 39				Nach Formel 36	Nach Formel 30
W	Z	R in kg/dm³	σ_b = kg/cm²	σ_b = kg/cm²	kg/cm²
150 l	150 kg	2,37	175	180	195
150 l	225 kg	2,41	294	285	276
150 l	300 kg	2,44	402	385	366
180 l	150 kg	2,37	129	145	130
180 l	225 kg	2,40	247	230	221
180 l	300 kg	2,42	334	335	313
210 l	225 kg	2,39	180	190	166
210 l	300 kg	2,40	266	265	258

Aus Gleichung (39) geht hervor: Wird der Beton um soviel mehr gestampft, dass das Raumgewicht des Beton um 0,01 kg/dm³ zunimmt, so nimmt die zu erwartende Betondruckfestigkeit um 11 kg/cm² zu.

Zweiter (engerer) Wettbewerb für den Neubau des Kollegiengebäudes der Universität Basel.

Unter den Verfassern der im ersten Wettbewerb (Bd. 100, S. 78* und 91*) preisgekrönten und angekauften Projekte ist ein zweiter Wettbewerb veranstaltet worden, für den die in jenem Urteil niedergelegten Richtlinien massgebend waren, nebst der ausdrücklichen Forderung, dass sich die Bewerber bemühen mögen, ein „Bauwerk zu schaffen, das kein reiner Zweckbau ist, sondern die Bedeutung der Universität als erste Bildungstätte zum Ausdruck bringt und zur Umgebung, soweit sie historisch wertvoll ist, in keinem störenden Widerspruch steht."

Gerade im Hinblick auf diesen überwiegend negativen Wunsch ist nun auch das Ergebnis negativ ausgefallen: nach Ansicht des Preisgerichts ist ihm nicht genügend Rechnung getragen worden, und der Verfasser des hinsichtlich Grundriss und Organisation gutgeheissenen erstprämierten Entwurfes soll nun dessen Aeusseres so umgestalten, dass