Band 102 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 5**

Zur Theorie der rotierenden Scheibe mit Trapez-Querschnitt.

Von Ing. K. G. KARLSON, Stockholm.

Es zeigt sich nicht selten, dass eine in geometrischer Beziehung einfache Form keineswegs auch analytisch leicht zugänglich ist. Ein Scheibenkörper, der von symmetrischen konischen Endflächen begrenzt ist (Abb. 1), hat eine besonders einfache Gestalt, gehört aber in mathematischer Hinsicht nicht zu den fügsamen.

Für durchlochte Scheiben wird bei Benutzung des von Stodola[1]) eingeführten hyperboloidischen Profiles insbesondere die Ermittlung der Randspannungen sehr einfach, wenn ein für allemal für die Einheitscheibe ($R = 1$) Interpolationskurven berechnet werden. Wird nun, aus Herstellungsgründen, das Profil durch Gerade ersetzt, werden die berechneten Spannungswerte etwas beeinflusst, das Ersatzprofil lässt sich aber dem vorausgesetzten so nahe anschliessen, dass diese Abweichungen von der berechneten Beanspruchung praktisch völlig belanglos sind.

Immerhin hat die analytische Untersuchung der Scheibe mit Trapez-Querschnitt theoretisches Interesse. Die Aufgabe wurde schon von Martin[3]) und von Pöschl[2]) (Näherungsmethode nach Ritz) behandelt. Verfasser hatte hingegen anfänglich die (ebenfalls auf hypergeometrischen Reihen fussenden) Abhandlungen von Fischer[4]) und Honegger[5]) übersehen. Da die Auswertung der bei der Anwendung zu benutzenden Grössen schon erledigt war, hat vielleicht ein Vergleich mit den von Honegger berechneten Spannungen einiges Interesse.

Die nachfolgende kleine Studie war das Ergebnis eines Versuches, *geschlossene* analytische Ausdrücke für die Dehnung und die Spannungen zu finden. „Geschlossen" bedeutet freilich nicht, dass auch genaue Zahlenwerte erhältlich sind; die Annäherung lässt sich mit Hilfe der Zahlentafeln 3 und 4 und der analytischen Prüfung der Zahlentafel 1 einigermassen beurteilen.

Zu dem genannten Zwecke wurden in die Differentialgleichung für die Dehnung ξ nach Stodola[6]),

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \left(\frac{d \ln y}{dx} + \frac{1}{x}\right) \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{\nu}{x} \frac{d \ln y}{dx} - \frac{1}{x^2}\right) \xi = -K x \qquad (1)$$

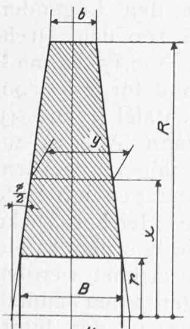

Abb. 1.

wo $K = \dfrac{1 - \nu^2}{E} \mu \omega^2$,

die neuen Veränderlichen

$$z = 1 - \frac{y}{y_0} = \frac{k}{y_0} x \text{ und } \eta = \frac{\xi}{z^n} \quad . \quad . \quad (2)$$

eingeführt. Mit der Abkürzung

$$C = K \left(\frac{y_0}{k}\right)^3, \text{ wo } k = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

(Abb. 1) und somit $\dfrac{k}{y_0}$ eine für den Scheibentypus bezeichnende Konstante ist, schreibt sich Gl. (1):

$$z^{2+n} (1 - z) \frac{d^2\eta}{dz^2} + z^{1+n} [(1 + 2n) - (2 + 2n) z] \frac{d\eta}{dz} - z^{1+n} (n^2 + n - 1 + \nu) \eta - z^n (1 - n^2) \eta = - C z^3 (1 - z).$$

Die Grenzen für die unabhängige Veränderliche z sind 1 und 0; für eine Scheibe gemäss Abb. 1 ist $1 > z > 0$.

Es werde hier n so gewählt, dass das zweite η-Glied verschwindet, also $n = \pm 1$. Wird die Wurzel $n = 1$ benutzt, entsteht nach Kürzung mit z^2 die Gleichung

$$z (1 - z) \frac{d^2\eta}{dz^2} + (3 - 4z) \frac{d\eta}{dz} - (1 + \nu) \eta = - C z (1 - z) \quad (3a)$$

[1]) Siehe Literaturverzeichnis auf Seite 53.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\eta = \eta_0 + \eta_r,$$

wo η_0 irgend eine z-Funktion, die (3a) befriedigt, und η_r die Lösung der reduzierten Gleichung ist. Die Struktur der Gl. (3a) veranlasst, den Ansatz

$$\eta_0 = C (a + b z + c z^2)$$

zu versuchen. Man findet

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{3 (3 + \nu)}{(1 + \nu)(5 + \nu)(11 + \nu)}, \quad b = \dfrac{3 + \nu}{(5 + \nu)(11 + \nu)}, \quad c = - \dfrac{1}{11 + \nu} \\ \text{und also} \qquad \xi_0 = K \left(\dfrac{y_0}{k}\right)^3 (a z + b z^2 + c z^3) \end{array}\right\} \quad . \quad \mathrm{I}$$

Auf x als unabhängige Veränderliche zurückgeführt ist dieses partikuläre Integral mit dem schon von Fischer und Honegger angegebenen identisch.

Die reduzierte Gleichung

$$z (1 - z) \frac{d^2\eta}{dz^2} + (3 - 4z) \frac{d\eta}{dz} - (1 + \nu) \eta = 0 \quad . \quad (3b)$$

ist eine Gauss'sche Differentialgleichung, die Lösung also unter den hypergeometrischen Reihen zu suchen.[7]) Das dritte Element ist $\gamma = 3$, die übrigen Parameter gehen aus $\alpha + \beta + 1 = 4$ und $\alpha \beta = 1 + \nu$ hervor. Mit

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 1{,}5 + \sqrt{1{,}25 - \nu} \\ \beta = 1{,}5 - \sqrt{1{,}25 - \nu} \\ \gamma = 3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sind nicht-identische Lösungen

$$\eta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

und $\eta_2 = z^{1-\gamma} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \alpha, 1 - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z)$,

somit nach Einführung der Substitution (2), die Lösung der reduzierten Gleichung

$$\xi_r = A z F(\alpha, \beta, \gamma, z) + \frac{B}{z} F(1 - \alpha, 1 - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z) \qquad \mathrm{II}$$

wo A und B die Integrationskonstanten sind.

Wenn in einer hypergeometrischen Reihe die Bedingung $\gamma > \beta > 0$ erfüllt ist, lässt sich ihre Summe durch ein bestimmtes Integral

$$F = H \int_0^1 u^{\beta - 1} (1 - u)^{\gamma - \beta - 1} (1 - u z)^{-\alpha} \, du$$

ausdrücken[7]); der Faktor H ist nur von den Parametern abhängig. Beide Glieder der Gl. II genügen dieser Bedingung und mit den Bezeichnungen

$$J_1 = \int_0^1 u^{\beta - 1} (1 - u)^{\gamma - \beta - 1} (1 - u z)^{-\alpha} \, du \quad . \quad . \quad (5)$$

wo das Argument $= z$ ist, und

$$J_2 = \int_0^1 u^{-\beta} (1 - u)^{\gamma - \alpha - 1} [1 - u (1 - z)]^{\alpha - 1} \, du \quad . \quad (6)$$

mit dem Argument $(1 - z)$, kann die vollständige Lösung der Gl. (1) in geschlossener Form, mit z als unabhängige Veränderliche,

$$\xi = A z J_1 + \frac{B}{z} J_2 + \xi_0 \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}$$

geschrieben werden. Hingegen ist es wohl nur ausnahmsweise möglich, den Zahlenwert von ξ *genau* zu berechnen.

Diese Lösung lässt sich auch mit Anwendung der Wurzel $n = - 1$ ableiten.