

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 6

Artikel: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion
Autor: Meissner, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45449>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. — Die Grundwasserversorgung Diepoldsau. — Der neue Zentralbahnhof in Mailand. — Diplomarbeiten der Architektur-Abteilung an der E. T. H. — Ein Entscheid des Bundesgerichtes über das Bündner Motorlastwagen-Verbot. — Mitteilungen: Die heutigen Probleme der Hochspannungs-Kraftübertragung. Der Gliederkeilriemen.

Bahnformen für die algerischen Staatsbahnen. Vom Kraftwerk Kembs. Internationale Sprachnormierung in der Technik. Der Durchschlag des zweiten Monte Ceneri-Tunnels. Die durchgehende Personenzug-Bremse. Neue schweizerische Flugzeuge. Prof. Dr. phil., Dr. math. h. c., Dr. phil. h. c., Dr. med. h. c., Dr. rer. nat. h. c., Dr. Ing. e. h. David Hilbert. — Nekrolog: W. Reitz. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Schluss von Seite 44.)

13. Integration der genauen Pendelgleichung.

Bedeutet l die reduzierte Pendellänge, g die Beschleunigung der Schwere, $\dot{\varphi}$ den Ausschlagswinkel und t die Zeit, so lautet die Gleichung für ebene Pendelschwingungen bekanntlich

$$\frac{d^2\dot{\varphi}}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\dot{\varphi})$$

Führt man die neue Veränderliche $u = \sqrt{\frac{g}{l}} t$ ein, so geht $\dot{\varphi}(t)$ in eine Funktion $\dot{\varphi}(u)$ über, die der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}'' = -\sin(\dot{\varphi})$$

genügt. Man hat das Linienbild dieser Funktion zu konstruieren. Dabei sollen nicht etwa kleine Pendelausschläge angenommen werden. Vielmehr wollen wir geradezu voraussetzen, dass anfangs das Pendel horizontal stehe und sich dort in der Umkehrlage befindet, sodass es in gestrecktem Winkel hin und herschwingen wird. Man hat

dann für $t = 0$, $\dot{\varphi} = \pi/2$ und $\ddot{\varphi} = 0$, bzw. für

$$u = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \pi/2 \quad \ddot{\varphi}'(0) = 0.$$

Der Krümmungsradius $\varrho(u)$ des Linienbildes C wird jetzt

$$\varrho(u) = \dot{\varphi} - \sin(\dot{\varphi}).$$

Demgemäß hat man in Abb. 33 zunächst eine unter 45° geneigte Linie AB und eine Sinuslinie AC aufgetragen, sodass nun zu jeder Abszisse $\dot{\varphi} = AD$ in der Strecke EF der Wert von $\varrho = \dot{\varphi} - \sin(\dot{\varphi})$ sofort abgegriffen werden kann. Als Längeneinheit wurde die Strecke 1 dm gewählt. Die Abbildung 34 zeigt die Konstruktion, wobei der Differenzenwinkel $\alpha = 15^\circ$ gewählt wurde. P_0 , der Ausgangspunkt, liegt auf der Axe $u = 0$ im Abstand $\pi/2 = 1,570$ von O entfernt. Die Krümmungsradien für die Punkte P_1, P_2, P_3, \dots nehmen schnell ab, sodass das Liniendiagramm C in S eine Spitze aufweist. Die von O an C gehende Tangente kann daher ziemlich genau gezogen werden. Bezeichnet man mit $u^* - \pi/2$ den Winkel, den sie mit der Axe $u = 0$ einschließt, so ist u^* der Wert, für den $\dot{\varphi}(u)$ gleich null wird. Demgemäß erreicht das Pendel seine tiefste Lage nach der Zeit

$$t^* = \sqrt{\frac{l}{g}} u^*,$$

und t^* ist daher die halbe Ausschlagdauer.

Abb. 34 gibt für u^* den Wert $106,6^\circ = 1,860$ abs. In Abb. 35 ist die Konstruktion wiederholt, wobei der kleinere

Differenzenwinkel $\alpha = 7\frac{1}{2}^\circ$ verwendet wurde. Sie ergab für u^* den Betrag $106,7^\circ$. Endlich wurde noch mit $\alpha = 5^\circ$ operiert, und $u^* = 107,1^\circ$ erhalten. Anderseits kann man für u^* (in Graden gemessen) leicht die Formel herleiten

$$u^* = \frac{180}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

und entweder mit Reihenentwicklung, oder besser nach der Gauss'schen Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels den Wert des bestimmten elliptischen Integrals rechter Hand ausrechnen. Es ergibt sich der genaue Wert $u^* = 107,052^\circ$, sodass auch im ungünstigsten Fall der Abb. 34 der Fehler in der Ermittlung der Schwingungsdauer kleiner als $1/2\%$ ausfällt. Es ist hierbei noch zu beachten, dass die Theorie kleiner Schwingungen, auf diesen Fall ausgedehnt, an Stelle von u^* den Wert 90° ergeben würde.

Unsere Konstruktion hat aber gegenüber der rechnerischen Bestimmung der Schwingungsdauer den Vorteil, dass sie uns nicht nur einen einzelnen Funktionswert, sondern den ganzen Verlauf der Funktion $\dot{\varphi}$ gibt. Denn aus dem gezeichneten Linienbild C kann der Ausschlagswinkel $\dot{\varphi}$ für jedes u und damit für jeden Zeitpunkt entnommen werden. Der Uebersichtlichkeit wegen ist im Koordinatensystem der Abb. 33 nachträglich noch das gewöhnliche Punktdiagramm $\dot{\varphi}(u)$, wie es sich aus C ergibt, aufgetragen worden. Man erhält die Kurve GH , die einem elliptischen Funktionsgesetz folgt. Zum Vergleich ist die \cos -Linie GJ eingetragen, die sich nach der Theorie kleiner Schwingungen ergibt. Man erkennt, dass der Ausschlagswinkel mit wachsender Zeit viel weniger abnimmt, als die Theorie kleiner Schwingungen ergeben würde.

14. Die Bahnkurven des sphärischen Pendels.

Wenn ein gewöhnliches Fadenpendel von der Länge l unter allgemeinen Anfangsbedingungen in Schwingungen versetzt wird, so beschreibt sein Endpunkt m eine Bahnkurve, die auf einer Kugel gelegen ist. Bedeutet δ die vom tiefsten Punkt dieser Kugel aus gemessene Polardistanz, φ die von einem beliebigen Anfangsmeridian aus gemessene Länge, t die Zeit, so liefert für die Bewegung des Pendels der Flächensatz die Gleichung

$$\sin^2(\delta) \frac{d\varphi}{dt} = c$$

und der Energiesatz gibt

$$\left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 + \sin^2(\delta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \lambda \cos \delta = k$$

Hier ist $\lambda = 2g/l$, und die Integrationskonstanten c und k hängen von den Anfangsbedingungen ab.

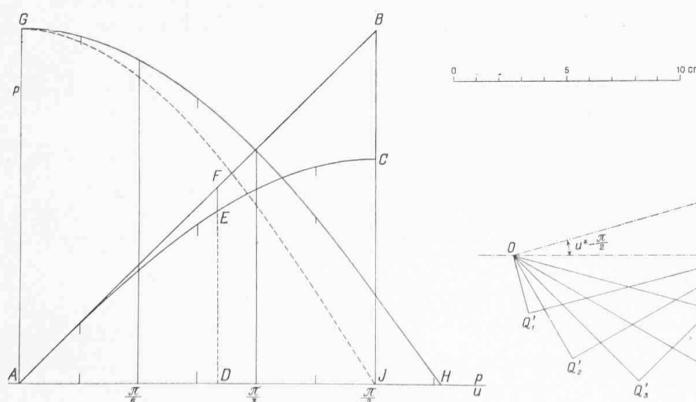


Abb. 33.

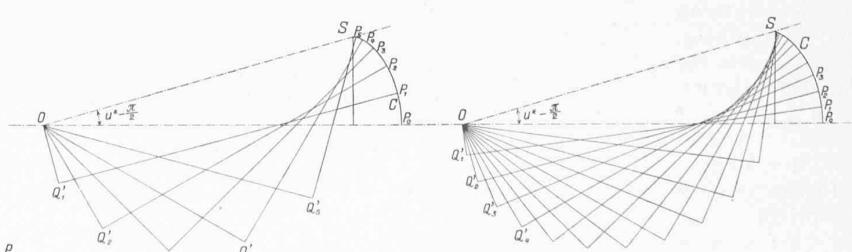


Abb. 34.

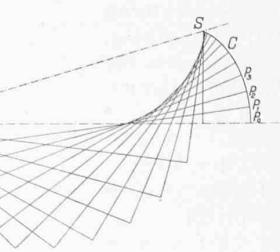


Abb. 35.

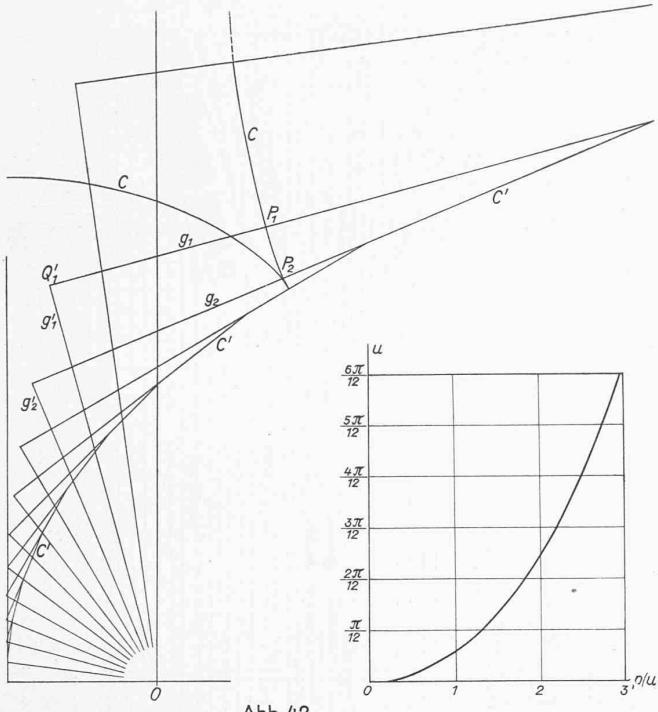


Abb. 42

Sie kann mit $p = \sqrt{\frac{g}{a}} t$ geschrieben werden

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{\frac{h - \sin(u)}{\sin(u)}}$$

und es wird demnach

$$p = \sqrt{\frac{g}{a}} t = \int_0^u \sqrt{\frac{h - \sin(u)}{\sin(u)}} du$$

Mithin handelt es sich um ein blosses Quadraturproblem. Indessen zeigt sich bei seiner Ausführung die Schwierigkeit, dass $p'(o)$ unendlich gross wird. Man kann die Stützlinien g' von C nicht alle auftragen, da sie in der Gegend von $u = o$ nicht mehr auf das Zeichenblatt fallen. Hier hilft man sich am einfachsten und bequemsten so, dass man für ganz kleine Werte von u das graphische durch das rechnerische Verfahren ersetzt. Man hat für das Integral von o bis $p = \text{arc sin}(x)$ die Reihenentwicklung

$$p = \int_0^u \sqrt{\frac{h - \sin u}{\sin u}} du = \int_0^x \sqrt{\frac{h}{\sqrt{x}}} \sqrt{\frac{1 - x/h}{1 - x^2}} dx =$$

$$\sqrt{h} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

wobei

$$a_1 = \frac{-1}{2h}, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8h^2}, \quad a_3 = -\frac{1}{4h} - \frac{1}{16h^3}$$

$$a_4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16h^2} - \frac{5}{128h^4}, \quad a_5 = -\frac{3}{8h} - \frac{1}{32h^3} - \frac{35}{1280h^4}$$

und mithin

$$p = 2 \sqrt{hx} \left(1 + \frac{a_1}{3}x + \frac{a_2}{5}x^2 + \frac{a_3}{7}x^3 + \dots \right)$$

Bis zu $x = \frac{1}{2}$ konvergiert diese Reihe so rasch, dass man mit wenigen Gliedern bei ihrer Berechnung auskommt. Es ergab sich so:

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,834$$

In Abb. 42 wurden zunächst die sämtlichen Geraden $g'(u)$ aufgezeichnet für eine Argumentdifferenz von $7^{1/2}0^\circ$; die zu $u = 7^{1/2}0^\circ$ gehörige fällt gerade noch auf das Zeichenblatt. Es ist also beispielsweise $Q_1' O = p'(\pi/6)$. Nun wurde auf der Geraden $g'(\pi/6)$ der berechnete Wert von p aufgetragen, d. h. es wurde $Q_1' P_1 = 1,834$ gemacht. Alsdann wurde durch den Punkt P_1 die Orthogonaltrajektorie C zu

der Geradenschar g' konstruiert, die die Stützfunktion der gesuchten Funktion $p(u)$ darstellt. Der Kontrolle wegen wurde noch $p(\pi/12)$ berechnet und mit dem konstruierten verglichen. Es ergab sich praktisch Uebereinstimmung.

Die Abb. 42 enthält rechts die graphische Darstellung des Resultates; es wurde gefunden $\beta(\pi/2) = 2,965$. Es wird daher die Dauer T^* der ganzen Rollschwingung

$$T^* = \sqrt{\frac{a}{g}} 4 \int \sqrt{\frac{h - \sin(u)}{\sin(u)}} du = \sqrt{\frac{a}{g}} 4 P\left(\frac{\pi}{2}\right) = 11,86 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Die Theorie kleiner Schwingungen in der Nähe der Gleichgewichtslage ergibt dagegen für die Periode

$$T^* = \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{8\pi^2(h-l)} = 7,783 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Man würde also einen sehr grossen Fehler begehen, wenn man die betrachtete Bewegung als klein ansehen und nach jener Theorie behandeln wollte.

Die Grundwasserversorgung Diepoldsau.

Von A. ZÜLLIG, Ing., Rheineck.

Grundwasserfassung. Der topographischen Lage Diepoldsaus wegen konnte für seine neue Grundwasserversorgung nur eine Druckwindkesselanlage in Frage kommen. Man hatte an der Peripherie des Dorfes umfassende Versuche angestellt, die aber in Bezug auf die Qualität des Wassers negativ verliefen. Erst im alten Rheinbett fand sich einwandfreies Trinkwasser, das frei war vom widrigen Eisengehalt, der im Rheintal so häufig vorkommt und vielfach Grundwasserversorgungen fast unmöglich macht. Unter Leitung des Geologen J. Hug (Zürich) wurden im alten Rheinbett weitere Bohrversuche angestellt, die ein einwandfreies Trinkwasser und eine weitaus genügende Menge feststellten. Es wurden zwei Filterbrunnen mit einer Bohrweite von 2000 mm, einer Tiefe von 7 m und einer Filterweite von 800 mm erstellt. Durch zwei Heberleitungen wird das Wasser der Filterbrunnen in einen ovalen, schmiede-eisernen, verzinkten Saugschacht von 1000×1500 mm Weite geleitet.

Pumpstation. Ein Pumpenhaus von 8×11 m im Innern nimmt die Pumpen und die Druckwindkessel auf. Zwei Pumpenaggregate, ausgerüstet mit 16 PS Elektromotoren mit Zentrifugal-Anlassern liefern eine Wassermenge von je 400 bis 800 l/min, bei 6 bzw. 4 at in die beiden parallel geschalteten Druckwindkessel von je 20 m^3 Inhalt.

Der Betrieb vollzieht sich automatisch, sodass nur zur Reinigung und Schmierung eine Bedienung erforderlich ist. Wöchentlich werden daher nur ein bis zwei Kontrollgänge nach dem Werk unternommen. Bei einem Druck von 3,8 at wird eine Pumpengruppe in Betrieb gesetzt, bis ein Druck von 6 at erreicht ist. Tritt ein grösserer Wasserverbrauch ein, so wird bei einem Drucke von 3,5 at die zweite Pumpe zugeschaltet und fördert gemeinsam mit der ersten bis zu einem Drucke von 5,8 at, worauf sich die zweite Gruppe wieder abschaltet.

Zur automatischen Steuerung dienen zwei Oelschalter, angetrieben durch kleine Elektromotoren, die durch Druckregulatoren gesteuert werden. Ein kleiner Spezialumschalter gestattet, die Schaltaggregate umzustellen, damit die Automaten und Pumpengruppen für den Betrieb gewechselt werden können. Neben diesen automatischen Schaltapparaten sind alle für einen einwandfreien Motorschutz erforderlichen Apparate installiert; ihr Ansprechen wird im nahe gelegenen Zollhause signalisiert. Ein Kontrollapparat dient zur Aufzeichnung des Druckes in den Windkesseln und zur Registratur der Pumpenbetriebszeiten. Zur Zeit können täglich 12 bis 15 Schaltspiele für die Pumpenaggregate abgelesen werden.

Im Falle des Ausbleibens des elektrischen Stromes arbeitet eine Reservepumpengruppe, die, angetrieben durch einen Saurer-Benzinmotor von 34 PS, bei rd. 1200 Uml/min 1500 l/min fördert.