Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 6

Artikel: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion
Autor: Meissner, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45449

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. — Die Grundwasserversorgung Diepoldsau. — Der neue Zentralbahnhof in Mailand. — Diplomarbeiten der Architektur-Abteilung an der E. T. H. — Ein Entscheid des Bundesgerichtes über das Bündner Motorlastwagen-Verbot. — Mitteilungen: Die heutigen Probleme der Hochspannungs-Kraftübertragung. Der Gliederkeilriemen. Bahnumformer für die algerischen Staatsbahnen. Vom Kraftwerk Kembs. Internationale Sprachnormung in der Technik. Der Durchschlag des zweiten Monte Ceneri-Tunnels. Die durchgehende Personenzug-Bremse. Neue schweizerische Flugzeuge. Prof. Dr. phil., Dr. math. h. c., Dr. phil. h. c., Dr. med. h. c., Dr. rer. nat. h. c., Dr. Ing. e. h. David Hilbert. — Nekrologe: W. Reitz. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 99 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 6

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

(Schluss von Seite 44.)

13. Integration der genauen Pendelgleichung.

Bedeutet l die reduzierte Pendellänge, g die Beschleunigung der Schwere, p den Ausschlagswinkel und t die Zeit, so lautet die Gleichung für ebene Pendelschwingungen bekanntlich

$$\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(p)$$

Führt man die neue Veränderliche $u = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t$ ein, so geht $p(t)$ in eine Funktion $p(u)$ über, die der Differentialgleichung

$$p'' = -\sin(p)$$

genügt. Man hat das Linienbild dieser Funktion zu konstruieren. Dabei sollen nicht etwa kleine Pendelausschläge angenommen werden. Vielmehr wollen wir geradezu voraussetzen, dass anfangs das Pendel horizontal stehe und sich dort in der Umkehrlage befinde, sodass es in gestrecktem Winkel hin und herschwingen wird. Man hat dann für $t = 0$, $p = \pi/2$ und $\dot{p} = 0$, bezw. für

$$u = 0 \qquad p(0) = \pi/2 \qquad p'(0) = 0.$$

Der Krümmungsradius $\varrho(u)$ des Linienbildes C wird jetzt

$$\varrho(u) = p - \sin(p).$$

Demgemäss hat man in Abb. 33 zunächst eine unter 45^0 geneigte Linie AB und eine Sinuslinie AC aufgetragen, sodass nun zu jeder Abszisse $p = AD$ in der Strecke EF der Wert von $\varrho = p - \sin(p)$ sofort abgegriffen werden kann. Als Längeneinheit wurde die Strecke 1 dm gewählt. Die Abbildung 34 zeigt die Konstruktion, wobei der Differenzenwinkel $\alpha = 15^0$ gewählt wurde. P_0, der Ausgangspunkt, liegt auf der Axe $u = 0$ im Abstand $\pi/2 = 1{,}570$ von O entfernt. Die Krümmungsradien für die Punkte $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ nehmen schnell ab, sodass das Liniendiagramm C in S eine Spitze aufweist. Die von O an C gehende Tangente kann daher ziemlich genau gezogen werden. Bezeichnet man mit $u^* - \pi/2$ den Winkel, den sie mit der Axe $u = 0$ einschliesst, so ist u^* der Wert, für den $p(u)$ gleich null wird. Demgemäss erreicht das Pendel seine tiefste Lage nach der Zeit

$$t^* = \sqrt{\frac{l}{g}}\,u^*,$$

und t^* ist daher die halbe Ausschlagdauer.

Abb. 34 gibt für u^* den Wert $106{,}6^0 = 1{,}860$ abs. In Abb. 35 ist die Konstruktion wiederholt, wobei der kleinere Differenzenwinkel $\alpha = 7\,^1/_2{}^0$ verwendet wurde. Sie ergab für u^* den Betrag $106{,}7^0$. Endlich wurde noch mit $\alpha = 5^0$ operiert, und $u^* = 107{,}1^0$ erhalten. Anderseits kann man für u^* (in Graden gemessen) leicht die Formel herleiten

$$u^* = \frac{180}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dp}{\sqrt{\cos p}}$$

und entweder mit Reihenentwicklung, oder besser nach der Gauss'schen Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels den Wert des bestimmten elliptischen Integrals rechter Hand ausrechnen. Es ergibt sich der genaue Wert $u^* = 107{,}052^0$, sodass auch im ungünstigsten Fall der Abb. 34 der Fehler in der Ermittlung der Schwingungsdauer kleiner als $^1/_2\,\%$ ausfällt. Es ist hierbei noch zu beachten, dass die Theorie kleiner Schwingungen, auf diesen Fall ausgedehnt, an Stelle von u^* den Wert 90^0 ergeben würde.

Unsere Konstruktion hat aber gegenüber der rechnerischen Bestimmung der Schwingungsdauer den Vorteil, dass sie uns nicht nur einen einzelnen Funktionswert, sondern den ganzen Verlauf der Funktion p gibt. Denn aus dem gezeichneten Linienbild C kann der Ausschlagwinkel p für jedes u und damit für jeden Zeitpunkt entnommen werden. Der Uebersichtlichkeit wegen ist im Koordinatensystem der Abb. 33 nachträglich noch das gewöhnliche Punktdiagramm $p(u)$, wie es sich aus C ergibt, aufgetragen worden. Man erhält die Kurve GH, die einem elliptischen Funktionsgesetz folgt. Zum Vergleich ist die cos-Linie GJ eingetragen, die sich nach der Theorie kleiner Schwingungen ergibt. Man erkennt, dass der Ausschlagwinkel mit wachsender Zeit viel weniger abnimmt, als die Theorie kleiner Schwingungen ergeben würde.

14. Die Bahnkurven des sphärischen Pendels.

Wenn ein gewöhnliches Fadenpendel von der Länge l unter allgemeinen Anfangsbedingungen in Schwingungen versetzt wird, so beschreibt sein Endpunkt m eine Bahnkurve, die auf einer Kugel gelegen ist. Bedeutet δ die vom tiefsten Punkt dieser Kugel aus gemessene Poldistanz, φ die von einem beliebigen Anfangsmeridian aus gemessene Länge, t die Zeit, so liefert für die Bewegung des Pendels der Flächensatz die Gleichung

$$\sin^2(\delta)\,\frac{d\varphi}{dt} = c$$

und der Energiesatz gibt

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2(\delta)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \lambda\cos\delta = k$$

Hier ist $\lambda = 2g/l$, und die Integrationskonstanten c und k hängen von den Anfangsbedingungen ab.

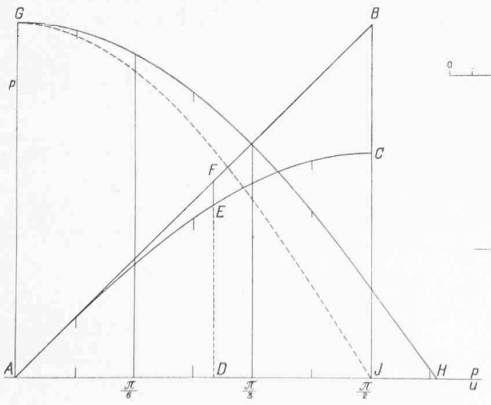

Abb. 33.

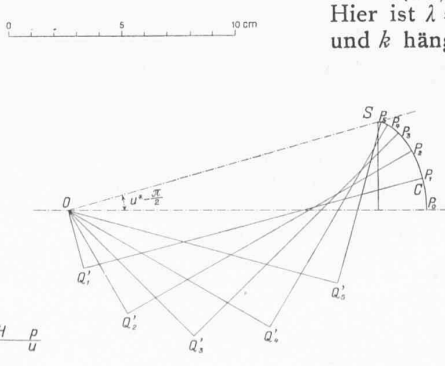

Abb. 34.

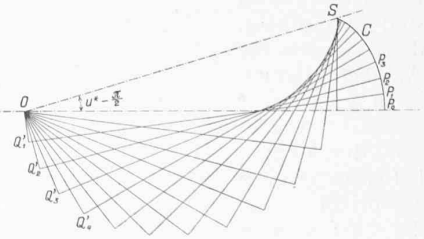

Abb. 35.

Man setze $\cos(\delta) = p$. Dann folgt

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = f(p) = (1 - p^2)(k + \lambda p) - c^2$$

als Differentialgleichung für die Funktion $p(t)$. Die Gleichung der Bahnkurve ist eine Beziehung zwischen p und φ, die man differentiell erhält durch Elimination der Zeit. Es ergibt sich aus den angeschriebenen Gleichungen

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{dp}{dt} : \frac{d\varphi}{dt} = (1 - p^2)\sqrt{\frac{f(p)}{c^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Differentialgleichung ist graphisch zu integrieren. Wir nehmen die Anfangsbedingungen so, dass $c = k = \lambda/10 = g/5l$ ist. Es ist dann

$$f(p) = \lambda p\,(1 - p/10 - p^2)$$

und diese Funktion verschwindet für

$$p = 0, \qquad p = p_1 = 0{,}9513, \qquad p = p_2 = -1{,}0513$$

Daraus folgt, dass die Bahnkurve zwischen den Breitenkreisen $p = 0$ und $p = p_1$ hin und her läuft. Wir können den Anfangsmeridian so legen, dass für $\varphi = 0$ $p = 0$ wird, und haben unter dieser Voraussetzung Gleichung (10) zu lösen, die übergeht in

$$\frac{dp}{d\varphi} = (1 - p^2)\sqrt{p\,(10 - p - 10\,p^2)} \quad . \quad . \quad (11)$$

woraus

$$\frac{d^2p}{d\varphi^2} = \frac{d}{dp}\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)\frac{dp}{d\varphi} = \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2\right]$$

$$= (1 - p^2)\left[5\,(1 - p^2)(1 - 7\,p^2) + p\,(3\,p^2 - 1)\right] \quad (12)$$

Im Intervall von $p = 0$ bis $p = p_1$ schwankt der Ausdruck auf der rechten Seite sehr stark und damit auch die Krümmung des Linienbildes der Funktion $p(\varphi)$. Es ist daher eine Genauigkeit nur zu erzielen, wenn man den Masstab gross und die Winkeldifferenz α klein nimmt. Beides ist unbequem, weshalb hier zu dem früher erwähnten Mittel der Argumenttransformation gegriffen wird. Wir führen demnach die neue Veränderliche $u = 3\varphi$ ein und für die Funktion $p(u)$ gelten jetzt die Gleichungen

$$\frac{dp}{du} = \frac{1 - p^2}{3}\sqrt{p\,(10 - p - 10\,p^2)} = F_1(p)$$

$$\frac{d^2p}{du^2} = \frac{1 - p^2}{9}\left[5\,(1 - p^2)(1 - 7\,p^2) + p\,(3\,p^2 - 1)\right] = F_2(p)$$

also auch

$$\varrho(u) = p + p'' = p + F_2(p) = F_3(p).$$

In den Abbildungen 36 und 37 ist die Längeneinheit gleich 20 cm gemacht. In Abb. 36 stellen die Kurven ABD und EFG die oben angeschriebenen Funktionen $F_1(p)$ und $F_3(p)$ dar. Abb. 37 zeigt die Konstruktion des Linienbildes C von $p(u)$. Die Anfangswerte sind $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$ und es fällt daher P_0 nach O. Der Krümmungshalbmesser ϱ kann aus Abb. 36 für jedes p entnommen werden, und, da die selbe Figur auch das zugehörige p' ergibt, so kommt statt des gewöhnlichen Interpolationsverfahrens die am Schlusse von Abschnitt 5 erwähnte Verbesserungs-Methode zur Anwendung. Die Korrekturen sind geringfügig, da ausserdem die Winkeldifferenz in u gleich 15° gewählt wurde, was der kleinen Differenz 5° in φ entspricht. Aus der gefundenen Funktion p ist endlich in den Abb. 38 und 39 auf leicht erkennbare Weise Aufriss und Grundriss der Bahnkurve des Pendels gezeichnet worden. Der Masstab dieser beiden Figuren wurde auf die Hälfte verkleinert. Sie zeigen die aus der Literatur bekannte Form der Bahnkurve (vergl. etwa Encycl. der math. Wissenschaften, Bd. IV I. (6) pag. 505).

15. Die Rollbewegung eines Zylinders auf ebener Unterlage.

Ein homogener Zylinder von halbkreisförmigem Querschnitt sei zur Zeit $t = 0$ ohne Anfangsgeschwindigkeit in der Lage von Abb. 40 auf eine horizontale Ebene gestellt und werde sich selbst überlassen. Die Unterlage sei so rauh, dass ein Gleiten ausgeschlossen ist. Man soll die eintretende Rollbewegung bestimmen, insbesondere deren Periode. Der Kürze halber werde der Rollwiderstand vernachlässigt. Es sei S der Schwerpunkt des Zylinders, a sein Halbmesser, M seine Masse, $OS = \eta = 4a/3\pi$, k_s der Trägheitsradius für die Schweraxe normal zur Bildebene, u der in Abb. 41 angegebene Rollwinkel für eine beliebige Lage. Da Gleiten von vorneherein ausgeschlossen wurde, stellt u die einzige Lagekoordinate des Bewegungsvorganges dar. Es ist die Bewegungsenergie T zur Zeit t

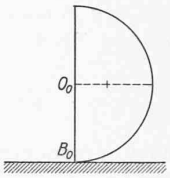

Abb. 40

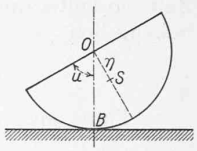

Abb. 41

$$T = \frac{M}{2}k_s^2\,\dot{u}^2 + \frac{M}{2}(\overline{BS})^2\,\dot{u}^2 = \frac{M}{2}\,\dot{u}^2\left[k_s^2 + \eta^2 + a^2 - 2\,\eta\,a\,\sin(u)\right]$$

Aber $k_s^2 + \eta^2$ ist das Quadrat des Trägheitshalbmessers für die Axe durch O und gleich $a^2/2$, sodass

$$T = \frac{M}{2}\,\frac{8\,a^2}{3\,\pi}\,\dot{u}^2\left(\frac{9\,\pi}{16} - \sin(u)\right)$$

wird. Nach dem Energiesatz ist dies der Arbeit der Schwere $M g \eta \sin(u)$ gleichzusetzen. Man erhält so die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{g}{a}\,\frac{\sin(u)}{h - \sin(u)}$$

wo noch abkürzend gesetzt ist

$$h = 9\pi/16 = 1{,}7671$$

Abb. 36.

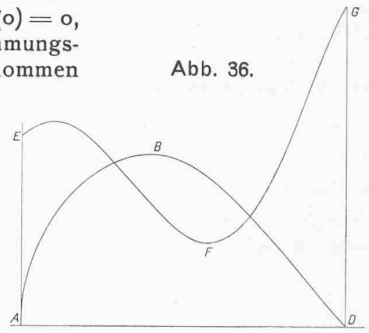

Abb. 38.

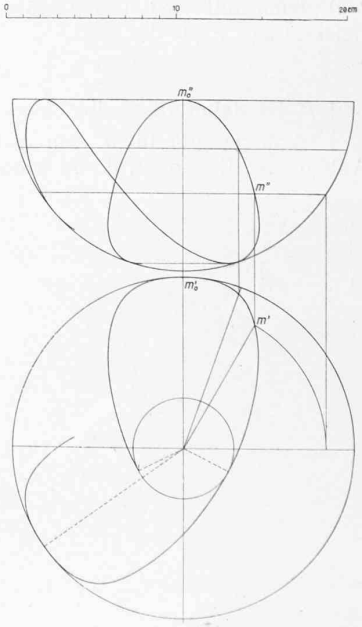

Abb. 39.

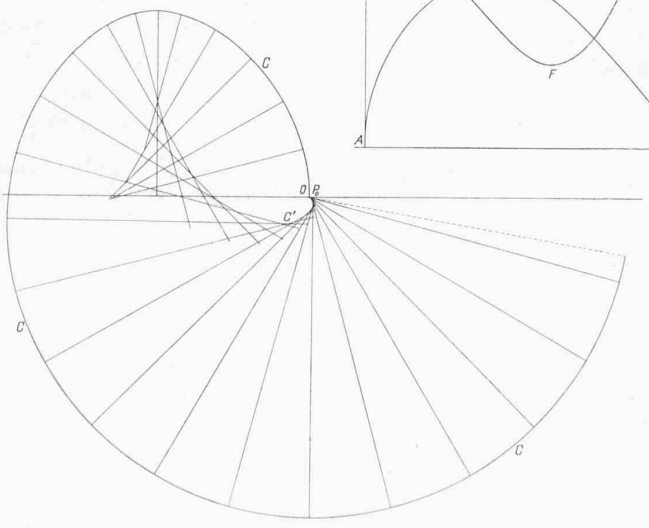

Abb. 37.

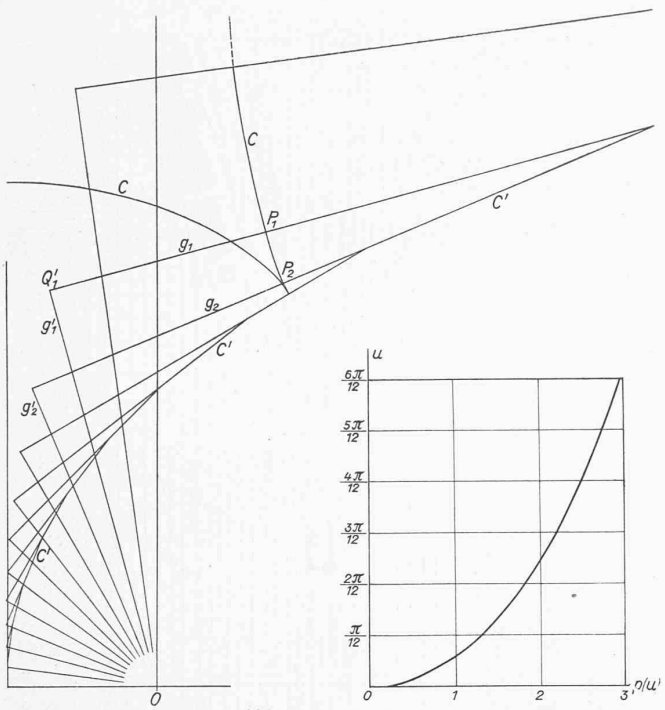

Abb. 42

Sie kann mit $p = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t$ geschrieben werden

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{\frac{h - \sin(u)}{\sin(u)}}$$

und es wird demnach

$$p = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t = \int_0^u \sqrt{\frac{h - \sin(u)}{\sin(u)}}\, du$$

Mithin handelt es sich um ein blosses Quadraturproblem. Indessen zeigt sich bei seiner Ausführung die Schwierigkeit, dass $p'(0)$ unendlich gross wird. Man kann die Stützlinien g' von C' nicht alle auftragen, da sie in der Gegend von $u = 0$ nicht mehr auf das Zeichenblatt fallen. Hier hilft man sich am einfachsten und bequemsten so, dass man für ganz kleine Werte von u das graphische durch das rechnerische Verfahren ersetzt. Man hat für das Integral von 0 bis $p = \text{arc}\sin(x)$ die Reihenentwicklung

$$p = \int_0^u \sqrt{\frac{h - \sin u}{\sin u}}\, du = \int_0^x \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1 - x/h}{1 - x^2}}\, dx =$$

$$\sqrt{h} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots)$$

wobei

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2h} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8h^2} \quad \alpha_3 = -\frac{1}{4h} - \frac{1}{16h^3}$$

$$\alpha_4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16h^2} - \frac{5}{128h^4} \quad \alpha_5 = -\frac{3}{8h} - \frac{1}{32h^3} - \frac{35}{1280h^4}$$

und mithin

$$p = 2\sqrt{hx}\left(1 + \frac{\alpha_1}{3} x + \frac{\alpha_2}{5} x^2 + \frac{\alpha_3}{7} x^3 + \ldots\right)$$

Bis zu $x = \frac{1}{2}$ konvergiert diese Reihe so rasch, dass man mit wenigen Gliedern bei ihrer Berechnung auskommt. Es ergab sich so:

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}834$$

In Abb. 42 wurden zunächst die sämtlichen Geraden $g'(u)$ aufgezeichnet für eine Argumentdifferenz von $7^1/_2{}^0$; die zu $u = 7^1/_2{}^0$ gehörige fällt gerade noch auf das Zeichenblatt. Es ist also beispielsweise $Q_1'O = p'(\pi/6)$. Nun wurde auf der Geraden $g'(\pi/6)$ der berechnete Wert von p aufgetragen, d. h. es wurde $Q_1'P_1 = 1{,}834$ gemacht. Alsdann wurde durch den Punkt P_1 die Orthogonaltrajektorie C zu der Geradenschar g' konstruiert, die die Stützfunktion der gesuchten Funktion $p(u)$ darstellt. Der Kontrolle wegen wurde noch $p(\pi/12)$ berechnet und mit dem konstruierten verglichen. Es ergab sich praktisch Uebereinstimmung.

Die Abb. 42 enthält rechts die graphische Darstellung des Resultates; es wurde gefunden $p(\pi/2) = 2{,}965$. Es wird daher die Dauer T^* der ganzen Rollschwingung

$$T^* = \sqrt{\frac{a}{g}}\, 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{h - \sin(u)}{\sin(u)}}\, du = \sqrt{\frac{a}{g}}\, 4\, p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 11{,}86 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Die Theorie kleiner Schwingungen in der Nähe der Gleichgewichtslage ergibt dagegen für die Periode

$$T^* = \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{8\pi^2 (h - l)} = 7{,}783 \sqrt{\frac{a}{g}}$$

Man würde also einen sehr grossen Fehler begehen, wenn man die betrachtete Bewegung als klein ansehen und nach jener Theorie behandeln wollte.

Die Grundwasserversorgung Diepoldsau.

Von A. ZÜLLIG, Ing., Rheineck.

Grundwasserfassung. Der topographischen Lage Diepoldsaus wegen konnte für seine neue Grundwasserversorgung nur eine Druckwindkesselanlage in Frage kommen. Man hatte an der Peripherie des Dorfes umfassende Versuche angestellt, die aber in Bezug auf die Qualität des Wassers negativ verliefen. Erst im alten Rheinbett fand sich einwandfreies Trinkwasser, das frei war vom widrigen Eisengehalt, der im Rheintal so häufig vorkommt und vielfach Grundwasserversorgungen fast unmöglich macht. Unter Leitung des Geologen J. Hug (Zürich) wurden im alten Rheinbett weitere Bohrversuche angestellt, die ein einwandfreies Trinkwasser und eine weitaus genügende Menge feststellten. Es wurden zwei Filterbrunnen mit einer Bohrweite von 2000 mm, einer Tiefe von 7 m und einer Filterweite von 800 mm erstellt. Durch zwei Heberleitungen wird das Wasser der Filterbrunnen in einen ovalen, schmiedeisernen, verzinkten Saugschacht von 1000×1500 mm Weite geleitet.

Pumpstation. Ein Pumpenhaus von 8×11 m im Innern nimmt die Pumpen und die Druckwindkessel auf. Zwei Pumpenaggregate, ausgerüstet mit 16 PS Elektromotoren mit Zentrifugal-Anlassern liefern eine Wassermenge von je 400 bis 800 l/min, bei 6 bezw. 4 at in die beiden parallel geschalteten Druckwindkessel von je 20 m³ Inhalt.

Der Betrieb vollzieht sich automatisch, sodass nur zur Reinigung und Schmierung eine Bedienung erforderlich ist. Wöchentlich werden daher nur ein bis zwei Kontrollgänge nach dem Werk unternommen. Bei einem Druck von 3,8 at wird eine Pumpengruppe in Betrieb gesetzt, bis ein Druck von 6 at erreicht ist. Tritt ein grösserer Wasserverbrauch ein, so wird bei einem Drucke von 3,5 at die zweite Pumpe zugeschaltet und fördert gemeinsam mit der ersten bis zu einem Drucke von 5,8 at, worauf sich die zweite Gruppe wieder abschaltet.

Zur automatischen Steuerung dienen zwei Oelschalter, angetrieben durch kleine Elektromotoren, die durch Druckregulatoren gesteuert werden. Ein kleiner Spezialumschalter gestattet, die Schaltaggregate umzustellen, damit die Automaten und Pumpengruppen für den Betrieb gewechselt werden können. Neben diesen automatischen Schaltapparaten sind alle für einen einwandfreien Motorschutz erforderlichen Apparate installiert; ihr Ansprechen wird im nahe gelegenen Zollhause signalisiert. Ein Kontrollapparat dient zur Aufzeichnung des Druckes in den Windkesseln und zur Registratur der Pumpenbetriebszeiten. Zur Zeit können täglich 12 bis 15 Schaltspiele für die Pumpenaggregate abgelesen werden.

Im Falle des Ausbleibens des elektrischen Stromes arbeitet eine Reservepumpengruppe, die, angetrieben durch einen Saurer-Benzinmotor von 34 PS, bei rd. 1200 Uml/min 1500 l/min fördert.