Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 23

Artikel: Die Biegungslinie sehr schlanker Stäbe in graphischer Darstellung
Autor: Sabathiel, Richard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45596

Band 100 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 23**

Die Biegungslinie sehr schlanker Stäbe in graphischer Darstellung.

Von Privatdozent Dr. Ing. RICHARD SABATHIEL, Budapest.

Die Formänderung von Stäben, die innerhalb der Elastizitätsgrenze übermässig grosse Durchbiegungen erleiden können, kann durch die genaue Erörterung der allgemeinen Biegungsgleichung

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{EJ} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

bestimmt werden, wonach die Winkeländerung $d\alpha$ der Endquerschnittsebenen eines Stabelementes bezogen auf seine Länge ds proportional mit dem Moment M der äusseren Kräfte auf das Element und umgekehrt proportional mit dem Trägheitsmoment J des Querschnittes ist und der Proportionalitätsfaktor der reziproke Wert des Elastizitätsmoduls E ist; diese Winkeländerung, Krümmungsmass genannt, und der Krümmungshalbmesser des ursprünglich geraden Stabes sind reziproke Werte.

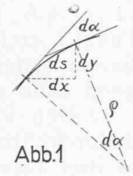


Abb. 1

Mit den in Abb. 1 angegebenen Bezeichnungen wird diese Gleichung, in rechtwinklige Koordinaten umgesetzt,

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{EJ}{M} \quad . \quad . \quad (b)$$

bei kleinen Formänderungen so vereinfacht, dass der Wert $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha$ gegen 1 vernachlässigt wird. Wenn wir nun bei starken Krümmungen, wo $(\mathrm{tg}\,\alpha)^2$ nicht vernachlässigt werden kann, die Differentialgleichung (b) in Funktion der rechtwinkligen Koordinaten auflösen wollen, so kommen wir im einfachsten Falle auf komplizierte, schwer handliche sogenannte elliptische Integrale. In folgendem werden wir eine Konstruktionsmethode einführen, mit der die Form der stark gebogenen Stäbe übersichtlich und sehr genau gezeichnet werden kann. — Auch wird diese Konstruktion zu graphischen Lösungen ähnlicher analytischer Funktionen dienen.

Wir behandeln den einfachsten Fall des stark gebogenen Stabes, wenn am freien Ende des eingespannten schlanken Stabes eine Kraft P angreift und zwar erstens, wenn die Kraft P senkrecht auf die Einspannungsebene ist, und zweitens, wenn sie senkrecht auf die ursprüngliche gerade Axe des Stabes wirkt. (Siehe Abb. 2).

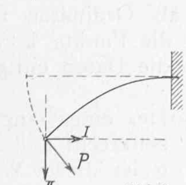
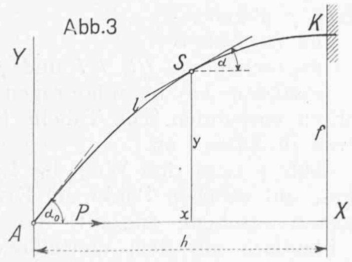


Abb. 2

Abb. 3


I. Am freien Ende des eingespannten schlanken Stabes greift eine Kraft senkrecht zur Einspannungsebene an.

Wir nehmen als Koordinaten-Axenmittelpunkt des nach Abb. 3 gebogenen Stabes den freien Endpunkt A. So ist die Grundgleichung der Biegung

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{Py}{EJ} = \frac{1}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die beiden Seiten mit dy multipliziert gibt:

$\frac{dy}{ds}\,d\alpha = -\frac{Py}{EJ}\,dy$; da aber $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha$ ist und der Ausdruck der physikalischen Grössen $\frac{P}{EJ}$ durch $\frac{2}{p^2}$ vereinfacht werden kann, wonach also

$$p^2 = \frac{2EJ}{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ist und p die physikalische Länge genannt werden kann, so ist die geometrische Form der Differentialgleichung:

$$\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{2y}{p^2}\,dy$$

Nach Integration ist

$$-\cos\alpha = -\frac{y^2}{p^2} + C \text{ oder } \cos\alpha = \frac{y^2}{p^2} - C$$

Im Punkt A ist $y = 0$; $\cos\alpha_0 = -C$ also

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0 + \frac{y^2}{p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In K (Firstpunkt) ist $\cos\alpha = 1$ und $y = f$ wonach

$$\cos\alpha_0 = 1 - \frac{f^2}{p^2} \text{ oder } p^2 = \frac{f^2}{1-\cos\alpha_0} \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Form der Biegungslinie ist durch α_0, den Neigungswinkel der Endtangente A charakterisiert und nach Gleichung (3) bestimmt.

Diese Gleichung veranschaulichen wir in Abb. 4. Aus dem Einspannungspunkt K ziehen wir die Linie mit der Neigung α_0; um deren Schnittpunkt mit der Kraftlinie P zeichnen wir den Halbkreis mit dem Radius $r = OK$. Diesen Kreis nennen wir den Richtungskreis. Der innere Schnittpunkt F des Kreises mit der $x \equiv P$-Axe liegt vom Fusspunkt B der Vertikalen K $\overline{BF} = r(1 - \cos\alpha_0)$ entfernt und nach Gleichung (4) ist

$$(1 - \cos\alpha_0) = \frac{f^2}{p^2}; \ \overline{BF} = r(1 - \cos\alpha_0)$$

Zeichnen wir noch die horizontalaxige Parabel mit dem Scheitel B und den Punkt G, wo $KG = BF = r\frac{f^2}{p^2}$.

Ist S ein beliebiger Punkt des gebogenen Stabes mit der Ordinate y und wird der Punkt horizontal auf die Parabel projiziert, weiter dieser Punkt S_2 vertikal auf den Kreis, so wird der Kreispunkt S_3 die Richtlinie OS_3 der

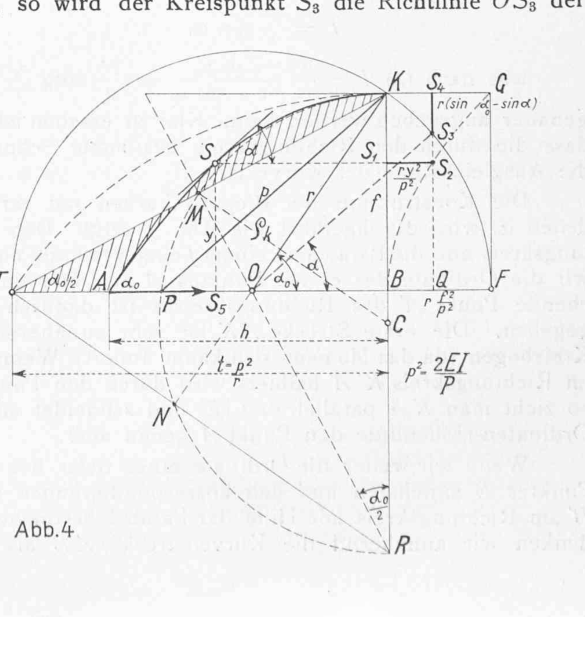


Abb. 4

Tangente in S bestimmen. Aus der Abbildung ist klar abzulesen, dass

$$r \cos \alpha = r \cos \alpha_0 + r \frac{y^2}{p^2}$$

Aus Gleichung (1) mit der Abkürzung (2) ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = -\frac{p^2}{2y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Im Scheitelpunkt, wo $y = f$, wird

$$\varrho_K = -\frac{p^2}{2f} \quad . \ (6) \text{ und nach } (4)$$

$$-2\varrho_K(1 - \cos \alpha_0) = f. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Wenn wir aus dem äusseren Schnittpunkt des Richtungskreises T eine Senkrechte auf OK und von O eine Senkrechte auf die Sehne TK ziehen, so schneiden diese Linien die Vertikale K in dem selben Punkt R, der von den Punkten T und $K\,2\varrho_K$ entfernt ist. Die Schnittpunkte der Senkrechten M und N liegen auf dem Krümmungskreis von K. Dies ist aus den ähnlichen Figuren bestimmbar. Auch kann der Mittelpunkt des Krümmungskreises direkt bestimmt werden, wenn man aus dem Halbierungspunkt der Sehne TK eine Senkrechte auf OK zieht.

Aus dem geometrischen Mittelsatz ist auch festlegbar, dass der Krümmungskreis die Kraftlinie in einem Punkt P schneidet, der die Strecke $p = \overline{PK}$ bestimmt.

Wenn wir weiter die Gleichung (5): $\varrho = -\frac{p^2}{2y}$ in der Form $\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{2y}{p^2}$ schreiben und mit dx multiplizieren, so ist $\cos\alpha \, d\alpha = -\frac{2y}{p^2}\, dx$.

Nach Integration wird $\sin \alpha = -\frac{2}{p^2}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} y\, dx + C$,

wenn $\alpha = \alpha_0$ ist $\sin \alpha_0 = C$ also

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 - \frac{2}{p^2}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} y\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Der zweite Teil der Gleichung bedeutet die Fläche von ASS_5A und wird mit T_y bezeichnet; also ist

$$p^2(\sin \alpha_0 - \sin \alpha) = 2T_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

eine andere Gleichung der Biegungslinie. Wenn wir Abb. 4 betrachten, so sehen wir, dass

$$S_3S_4 = r(\sin \alpha_0 - \sin \alpha); \text{ also } \frac{p^2}{r} S_3S_4 = 2T_y$$

Die T_y Fläche ist gleich mit einer Dreieck-Fläche, deren Grundlinie $S_3\,S_4$ und deren Höhe $\frac{p^2}{r}$ ist, welche Länge aus Dreieckähnlichkeit mit TB identisch ist.

Die gesamte Fläche, die die Kurve und die Seiten f und h umfassen, ist laut (9)

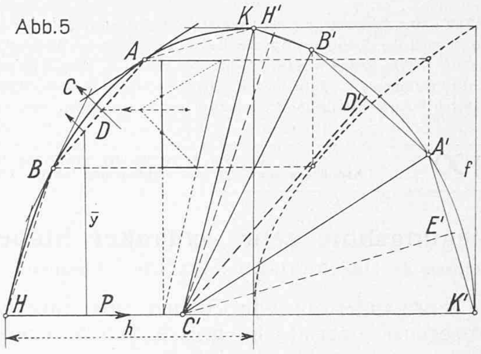
$$T = \frac{p^2}{2} \sin \alpha_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\text{was nach (4) } T = \frac{f^2}{2} \frac{\sin \alpha_0}{1 + \cos \alpha_0} = \frac{f^2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha_0}{2} \quad (11)$$

genauer angegeben werden kann. Klar zu ersehen ist also, dass die durch den Richtungskreis bestimmte Sehne TK die Ausgleichslinie der Kurve ist.

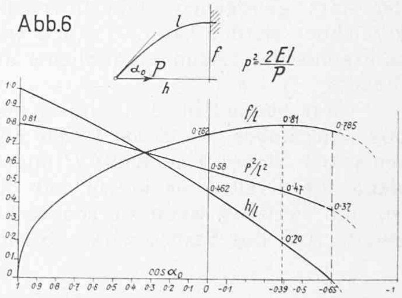
Die Konstruktion der Biegungskurven mit verschiedenen α_0 wird durchgeführt wie Abb. 5 zeigt. Den Richtungskreis und die Parabel zu einem f eingezeichnet, nehmen wir die Ordinate des ersten Punktes A an. Der entsprechende Punkt A' des Richtungskreises ist dadurch auch gegeben. Die erste Strecke AK ist sehr annähernd ein Kreisbogen (da das Moment sich kaum ändert). Wenn also im Richtungskreis $K'A'$ halbiert wird durch den Punkt E', so zieht man KA parallel zu $C'E'$ und schneidet auf der Ordinaten-Höhenlinie den Punkt A genau aus.

Wenn wir weiter die Ordinate eines tiefer liegenden Punktes B annehmen und den korrespondierenden Punkt B' am Richtungskreis mit Hilfe der Parabel bestimmen, so denken wir annähernd die Kurvenstrecke AB als Seil-



polygon kleiner Kräfte in der Richtung $A'B'$, die proportional mit $\overline{y}$ sind; betrachten weiter $A'B'C'$ als Kräftepolygon. Bestimmen wir noch den Schwerpunkt des seitlich eingezeichneten Trapezes und teilen die Strecke $A'B'$ proportional mit den durch die Schwerpunktshöhe des Trapezes bestimmten Abmessungen AD und DA durch den Punkt D', so dass $A'D' : D'B' = AD : BD$ ist, so schneidet nach der Relation der Kräfte- und Seilpolygone die zu $C'D'$ parallel aus A gezogene Gerade den Punkt B in der Ordinatenhöhe aus. Wenn auch die Tangente in B gezogen wird, so müssen sich die Tangenten und die in D zu $A'B'$ parallel gezogene Linie in dem gemeinsamen Punkt C treffen. Dies wird bei der Konstruktion das Kriterium bilden, ob der Abstand der Punkte A und B genügend nahe angenommen wurde.

Den untersten Punkt H bestimmen wir sehr genau dadurch, dass wir die Sehne $B'K$ des Richtungskreises in drei Teile teilen und den zu K näheren Drittelpunkt H' mit C' verbinden und mit diesem Strahl parallel eine Gerade aus B ziehen und die Kraftlinie schneiden. Wir betrachten so die untere Strecke BH als eine einfache Parabel dritter Ordnung mit dem Anfangspunkt H und der Axenrichtung parallel zu $B'K$. Je mehr Zwischenpunkte wir bei der Konstruktion benützen, umso genauer wird die Kurve. Bei wiederholter Konstruktion einer Schar Biegungslinien wurde erwiesen, dass durch Aufnahme von zwei bis vier gut gewählten Zwischenpunkten (d. h. Ordinaten) die Linien in praktischer Hinsicht sehr genau gezeichnet werden können.



Nach Konstruktion einer Anzahl von Kurven verschiedener α_0 und frei gewähltem f wurden die Stablängen l, die Sehnenlängen h und die Längen p abgemessen und in Abb. 6 die entsprechenden f/l, h/l und p^2/l^2 als Ordinaten mit den Abszissen $\cos \alpha_0$ aufgetragen und die Punkte kontinuierlich verbunden. Die Tabelle I gibt die Daten einiger Kurven in Zahlen an.

Abb. 7 zeigt den Weg des Endpunktes eines langen Stabes, auf welchen Punkt die Kraft P senkrecht auf die Einspannungsebene angreift. Im Anfang ist dieser Weg fast identisch mit dem Viertelkreis $r = 0{,}81\, l$. Auf der rechten Seite sind die mit der Kraft proportionalen Faktoren auf die Linien P horizontal aufgetragen. Der Anfangswert dieser Faktoren fällt mit dem Eulerschen Knikkungsfaktor zusammen und es ist auch ersichtlich, dass im Anfang die kleinsten Steigerungen von P verhältnismässig grosse Ausbiegungen verursachen.

Von den vielen Kurven hat eine spezielle Form die Kurve mit $\alpha_0 = 90°$ d. h. $\cos \alpha_0 = 0$. Die Gleichung (3) ist vereinfacht $\cos \alpha = \frac{y^2}{p^2}$, dementsprechend wird $p = f$

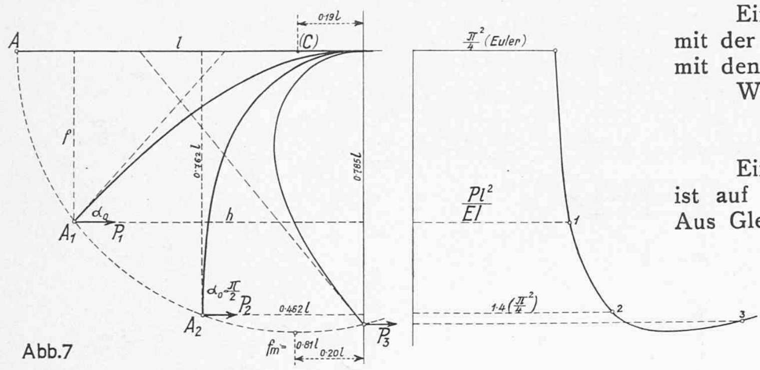


Abb.7

und $-\varrho_k = \frac{f}{2}$; $T = \frac{f^2}{2}$. Die Kurve teilt ausserdem die Fläche zwischen dem Viereck mit der Höhe f und der Breite h und dem Krümmungshalbkreis des Scheitelpunktes in zwei gleiche Teile (siehe Abb. 8).

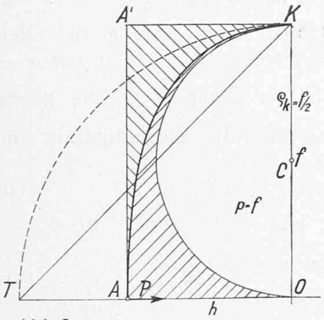


Abb.8

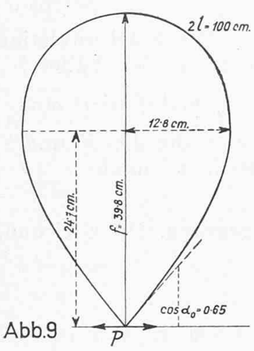


Abb.9

Eine andere spezielle Form hat die Kurve in Abb. 9, wo $h = 0$ ist; hier ist $\cos \alpha_0 \cong -0{,}65$. Es handelt sich um einen gebogenen Stab, dessen Enden verbunden werden. Wenn ein solcher Stab aus Federstahl 100 cm lang ist, so ist laut Tabelle I:

$$f = 0{,}785 \frac{100}{2} = 39{,}8 \text{ cm}; \; p^2 = \frac{2EJ}{P} = 0{,}37 \cdot 50^{-2} = 925 \text{ cm}^2$$

da $E = 2\,200\,000$ kg/cm² ist $P = \frac{2\,200\,000}{925} J = 4750 J$.

Das Widerstandsmoment eines Stabes von der Dicke d ist $K = \frac{2J}{d}$; also ist $P = 2375\,Kd$. Das Grösstmoment ist $M_m = Pf = 2375 \cdot 39{,}8\,Kd = 95\,000\,Kd$. Soll die grösste Spannung 9000 kg/cm² sein, so ist

$$\sigma = \frac{M_m}{K} = 95\,000\,M = 9000 \text{ kg/cm}^2$$

und so ist

$$d = \frac{9000}{95\,000} = 0{,}095 \text{ cm} \sim 1 \text{ mm}.$$

TABELLE I.

p^2/l^2	f/l	h/l	$\cos \alpha_0$
0,81	0,000	1,000	1,000
0,80	0,240	0,970	0,930
0,75	0,470	0,852	0,706
0,70	0,600	0,735	0,485
0,65	0,682	0,623	9,281
0,60	0,740	0,513	0,083
0,58	0,762	0,462	0,000
0,55	0,785	0,372	— 0,106
0,50	0,806	0,272	— 0,287
0,47	0,810	0,200	— 0,390
0,45	0,809	9,154	— 0,448
0,40	0,798	0,700	— 0,580
0,37	0,785	0,000	— 0,650

Ein 1 m langer Stab aus Federstahl kann daher nur mit der Dicke unter 1 mm innerhalb der Elastizitätsgrenze mit den Enden zusammengebogen werden.

Wenn der obige Stab 1 cm breit ist, so ist

$$P = 4750\,J = 4750 \frac{1 \cdot 0{,}1^{-3}}{12} = \text{rd. } 0{,}4 \text{ kg}$$

Eine andere Art der Konstruktion der Biegungslinie ist auf Grund der Flächenrelation in Abb. 10 dargestellt. Aus Gleichung (9) ist in der Figur allgemein

$$y_k \,\Delta x = \frac{p^2}{2r} \Delta \sin.$$

Wir fassen die in die Kraftlinie umgelegten $\Delta \sin$ als Momente der horizontalen Kräfte Δx in Höhe y_k auf und zeichnen erst das Seilpolygon der Kräfte und daraus das Kräftedreieck. So bestimmen wir zu den Teilungshorizontalen die entsprechenden Vertikalen, also Punkte der Biegungslinie. Der Uebersicht halber haben wir nur wenige Punkte (d. h. Ordi-

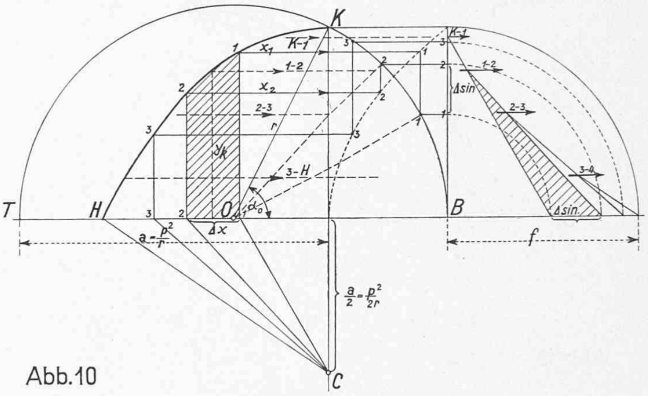


Abb.10

naten) aufgenommen; es ist aber klar, dass die Genauigkeit mit mehreren Punkten gehoben werden kann. Wir bemerken, dass y_k der ersten Lamelle von K im obern Drittel der Höhenstufe $f - y$ angenommen wird, da die erste Strecke als Parabel aufgefasst werden soll, damit die Genauigkeit auch bei grösserer Distanz gewahrt bleibt. Abwärts kann y_k immer im Mittel der y-Ordinaten angenommen werden.

II. Am freien Ende des eingespannten schlanken Stabes greift die Kraft senkrecht auf die Einspannungstangente an.

In Abb. 11 ist der Stab horizontal eingespannt und die Kraft P ist vertikal. Die Koordinatenaxen sind die ursprüngliche Linie des Stabes und die Kraftlinie. Die Grundgleichung der Biegungslinie ist

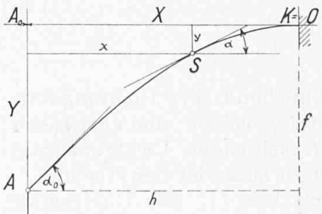


Abb.11

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{Px}{EJ} = \frac{1}{\varrho} \quad (1)$$

nach Multiplikation mit dx und Abkürzung

$$\frac{P}{EJ} = \frac{2}{p^2} \quad (2)$$

ist $\cos \alpha \, d\alpha = -\frac{2x}{p^2} + C$

und nach Integration ist

$\sin \alpha = -\frac{x^2}{p^2} + C$; bei $x = 0$ wird $\sin \alpha_0 = C$, also ist

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 - \frac{x^2}{p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Gleichung der Linie ist ähnlich der Gleichung (3) des Falles I.

Im Scheitelpunkt ist $\sin \alpha = 0$ und $x = h$, woraus folgt

$$\sin \alpha_0 = \frac{h^2}{p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Die Biegungslinie und ihre Eigenschaften sind in Abb. 12 ersichtlich. Wir ziehen den Richtungskreis mit dem Radius $r = A_2 O$ und zeichnen die vertikalaxige Pa-

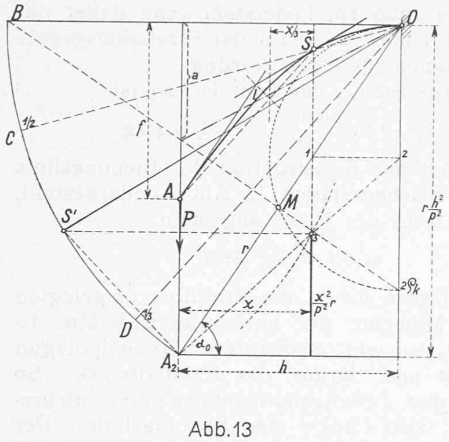


Abb.13

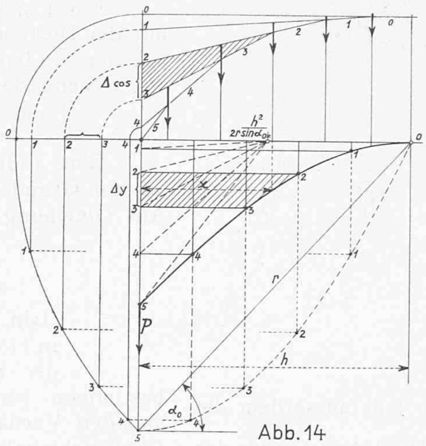


Abb.14

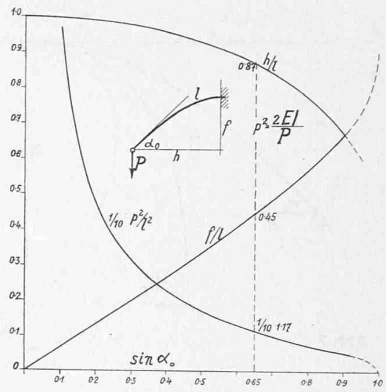


Abb.15

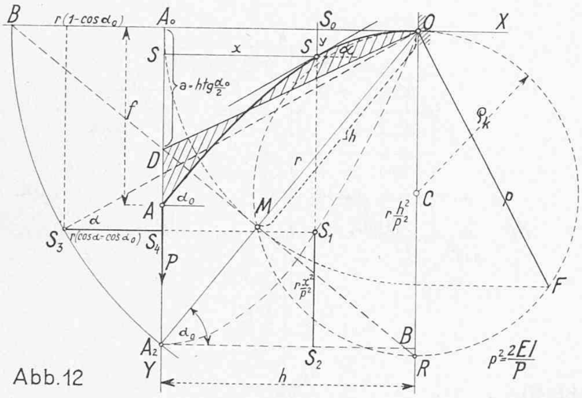


Abb.12

rabel $A_2 O$ mit dem Scheitelpunkt A_2. Es ist die Strecke $S_1 S_2$ in der Vertikalen von S gleich $r\frac{x^2}{p^2}$. Wird S_2 auf den Richtungskreis horizontal übertragen, so wird dieser Punkt S_3 mit O verbunden die Richtlinie der Tangente in S sein.

$$S_1 S_0 = r \sin \alpha;\; S_2 S_0 = r \sin \alpha_0$$

$$S_1 S_2 = r(\sin \alpha_0 - \sin \alpha) = r\frac{x^2}{p^2}$$

$$\text{also ist } \sin \alpha = \sin \alpha_0 - \frac{x^2}{p^2}$$

Laut Gleichung (1) ist

$$\varrho = -\frac{p^2}{2x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und im Einspannungspunkt

$$\varrho_k = -\frac{p^2}{2h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und mit (4)

$$-2\varrho_k \sin \alpha_0 = h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ziehen wir aus dem Schnittpunkt des Richtungskreises B eine Senkrechte auf $A_2 O$, welche die Vertikale P in D und die Vertikale O in R schneidet. Letztgenannter, sowie auch der Schnittpunkt der zu einander Senkrechten M, liegen auf dem Krümmungskreis von O. Die Horizontale, die unter O im Abstand h gezogen wird, schneidet weiter den Krümmungskreis in F und OF ist gleich mit der Länge p.

Die Gleichung $\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{2x}{p^2}$ mit dy multipliziert kann umgeformt $\sin \alpha\, d\alpha = -\frac{2x}{p^2}\, dy$ lauten und nach Integration ist

$$-\cos \alpha = -\frac{2}{p^2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} x\, dy + C$$

wenn $\alpha = \alpha_0$; $-\cos \alpha = C$ also

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + \frac{2}{p^2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} x\, dy \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Das Integral bedeutet die Fläche AS_5SA und kann mit T_x bezeichnet werden; also ist

$$p^2(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = 2T_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Flächenrelation ist also auch analog zur Gleichung (9) des Falles I. Die Strecke $S_3 S_4 = r(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$ multipliziert mit $\frac{p^2}{2r}$ gibt die Fläche T_x. Die ganze Fläche, die die X- und Y-Axen und die Biegungslinie umfassen, ist durch

$$p^2(1 - \cos \alpha_0) = 2T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

angegeben. Mit Gleichung (4) ist

$$T = \frac{h^2}{2}\,\frac{(1 - \cos \alpha_0)}{\sin \alpha_0} = \frac{h^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Da in Abb. 12 $A_0 D = a = h \operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2}$ ist, so ist Dreieck $A_0 D O$ mit T gleich und DO ist die Flächenausgleichslinie.

Die Kurven des II. Falles können ähnlich wie die des I. Falles konstruiert werden. Abb. 13 zeigt die Konstruktion durch die Sehnen mit nur einem Zwischenpunkt; in Abb. 14 dagegen ist die Konstruktion auf Grund der Flächenrelation durchgeführt. Hier ist nach den Gleichungen (4) und (9) $x\Delta y = \frac{h^2}{\sin \alpha_0}\Delta \cos$, welches Verhältnis in Abb. 14 leicht ersichtlich ist. Die Konstruktion ist auch hier wie im Fall I durch Zeichnen der Seil- und Kräftepolygone durchgeführt.

Die Resultate der Kurven mit verschiedenen $\sin \alpha_0$ sind in Abb. 15 zusammengestellt und auch in Tabelle II eingetragen.

TABELLE II.

p^2/l^2	h/l	t/l	$\sin \alpha_0$
8,0	0,995	0,075	0,117
6,0	0,990	0,100	0,160
4,0	0,983	0,160	0,235
3,0	0,975	0,210	0,310
2,0	0,940	0,300	0,450
1,17	0,870	0,450	0,650
0,75	0,775	0,575	0,800
0,50	0,670	0,670	0,900

Auf die Kurven des I. Falles zurückgreifend, waren in dieser Gruppe solche Kurven, wo $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ war. Der Teil dieser Linien, der zwischen α_0 und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ liegt, ist identisch mit einer Linie von Gruppe II, wo $\alpha_0^{II} = \pi - \alpha_0^{I}$ ist.

Der allgemeine Fall, wo die Kraft P einen schiefen Winkel mit der Einspannungsebene bildet, kann aus den zwei Fällen behandelt werden, jedoch müssen aus den konstruierten Linienscharen mehr Daten bestimmt werden.