

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 99/100 (1932)
Heft: 4

Artikel: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion
Autor: Meissner, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-45445>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. — Wettbewerb für ein Schulhaus in Seebach. — Natürlicher und künstlicher Umlauf bei Wasser-Zentralheizungen. — Mitteilungen: Hallengebäude in Budapest. Vorortverkehr mit Gleichstrom von 3000 V Fahrspannung. Schiffskreisel für italienische Seeschiffe.

Eidgenössische Technische Hochschule. Geschweiste Stahlnetze als Betonbewehrung. Mount Vernon Memorial Highway. Das Kraftwerk Kardaun am Eisack. Bauausstellung in Holland. — Nekrolog: Otto Stadler. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 4

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

9. Erzwungene Schwingungen bei periodischer Störung. Theorie der Resonanz.

Wir untersuchen nunmehr den Fall, wo in der Differentialgleichung

$$p'' + p = F(u)$$

$F(u)$ eine periodische Funktion ist. Ihre Periode sei U . Es ist also

$$F(u + U) \equiv F(u)$$

Die Zeichnung des Linienbildes C aus den Krümmungsradien erhält jetzt die Eigentümlichkeit, dass sich alles periodisch wiederholt, wenn die Konstruktion einmal über das Intervall U weggegangen ist. Hat man das Intervall U etwa in die Teilintervalle a_1, a_2, \dots, a_n eingeteilt und dementsprechend die Kreisbögen $P_0 P_1, P_1 P_2, \dots, P_{n-1} P_n$ aneinander gereiht, so hat man jetzt an den letzten Bogen $P_{n-1} P_n$ wieder den ersten Bogen $P_0 P_1$ anzureihen, an diesen den zweiten usw. Das Linienbild C ergibt sich so als eine Folge kongruenter Kurvenstücke $P_0 P_{n_1}, P_{n_1} P_{n_2}, P_{n_2} P_{n_3}, \dots$ die jeweilen stetig und mit stetiger Tangente aneinander gefügt sind (Abb. 27). Es kann sich in Ausnahmefällen schliessen, wird sich jedoch im allgemeinen um einen mittlern Punkt beliebig oft herumwinden.

Die Bedeutung dieses Punktes wird klar, wenn jetzt die Frage nach der eigentlichen erzwungenen Schwingung d. h. nach der periodischen Lösung der Differentialgleichung gestellt wird. Um sie zu finden, sind die Anfangsbedingungen so zu wählen, d. h. es ist graphisch der Ursprungspunkt so zu verlegen, dass die Bedingungen $p(0) = p(U)$ und $p'(0) = p'(U)$ erfüllt werden. Denn aus der Differentialgleichung und den weiteren Gleichungen, die man durch deren Differenzieren erhält, folgt dann, dass alle höheren Ableitungen für 0 und U übereinstimmen, was die Periodizität garantiert.

Der neue Anfangspunkt O^* ergibt sich eindeutig, so lange U kein ganzzahliges Vielfaches von π ist, als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden h_1 der Tangenten $g(0)$ und $g(U)$ mit der Winkelhalbierenden h_2 der Normalen $g'(0)$ und $g'(U)$. Von den zwei Winkelhalbierenden der Geraden g bzw. g' ist dabei jene gemeint, die nicht durch den Winkelraum geht, der von den positiven (mit Pfeil versehenen) Halbstrahlen begrenzt wird (Abb. 27).

Ist U ein ungerades Vielfaches von π , so ist der Punkt O^* der Mittelpunkt des von den erwähnten Tangenten und Normalen gebildeten Rechtecks. Nur wenn U ein ganzzahliges Vielfaches der Periode 2π der Eigenschwingung ist, versagt die Konstruktion; O^* liegt dann unendlich fern (Resonanz). Abgesehen von dieser Ausnahme liegt O^* im Endlichen und man erhält jetzt das Linienbild C , indem man den einmal konstruierten Bogen $P_0 P_n$ um den Punkt O^* um die Winkel $U, 2U, 3U$, usw. dreht. Die Kurve liegt somit in ihrem ganzen Verlauf innerhalb eines leicht angebbaren Kreises um O^* , bleibt also im Endlichen. Freilich wird dieser Kreis sehr gross, wenn nahezu der Ausnahmefall vorliegt, da dann O^* sehr

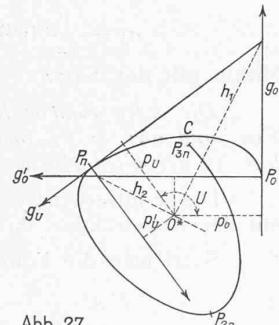


Abb. 27

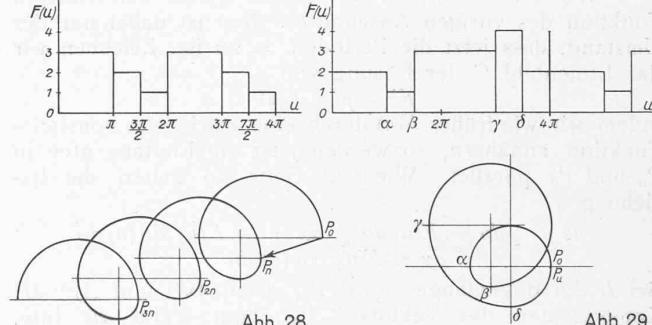


Abb. 28

Abb. 29

ganz im Endlichen, trotzdem die Resonanzbedingung erfüllt ist. Die Lösung ist alsdann für beliebige Anfangsbedingungen periodisch, und die Periode ist $U = 2\pi z$ (Abb. 29, wo der Fall $z = 2$ dargestellt ist).

10. Graphische Fourier-Analyse einer periodischen Funktion.

Bestimmung ihrer Fourier-Koeffizienten.

Die übliche Behandlung der Theorie der erzwungenen Schwingungen besteht darin, dass man die periodische Funktion $F(u)$ durch ihre Fourier-Entwicklung ersetzt, also durch eine Reihe, die nach cos- und sin-Funktionen der ganzzahligen Vielfachen des Argumentwinkels fortschreitet. Allein dadurch wird ein fremdes Element eingeführt, und es ist nicht zum Vornherein einzusehen, warum gerade die ganzen Zahlen hier eine ausschlaggebende Rolle spielen. Auch kann man die Lösung zwar wohl als Fourierreihe hinschreiben, aber sie wird nicht immer überall gut konvergieren, und, um sich auch nur einigermassen eine Übersicht über den tatsächlichen Verlauf der Lösung zu verschaffen, wären umfangreiche Berechnungen dieser Reihe nötig. Alle diese Nachteile haften der graphischen Lösung nicht an.

Der am Schluss des letzten Abschnittes erwähnte Ausnahmefall, wo trotz Erfüllung der Resonanzbedingung

($U = 2\pi z$) die Lösung endlich bleibt, entspricht dem Umstande, das ein bestimmtes Glied der Fourierentwicklung von $F(u)$, das an sich zu Resonanz Veranlassung gäbe, von Anfang an in der Reihe fehlt. Diese und ähnliche Ueberlegungen zeigen, dass es möglich sein muss, die graphischen Methoden auch auf die Fourier-Analyse auszudehnen.

Es sei eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T gegeben. Durch Einführung von

$u = 2\pi t/T$ geht sie über in eine Funktion $F(u)$ mit der Periode 2π . Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe entwickeln von der Form

$$F(u) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(u) + b_1 \sin(u) + a_2 \cos(2u) + b_2 \sin(2u) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(ku) + b_k \sin(ku)]$$

und es stellt sich jetzt die Aufgabe, aus dem graphisch gegebenen Verlauf von $F(u)$ die Koeffizienten a_k , b_k der Entwicklung zu finden.

Wir identifizieren $F(u)$ mit der gleich bezeichneten Funktion des vorigen Abschnittes. Neu ist dabei nur der Umstand, dass jetzt die Periode $U = 2\pi$ ist. Zeichnen wir das Linienbild C der Lösung von

$$p'' + p = F(u),$$

indem wir wie früher $F(u)$ durch eine stückweise konstante Funktion annähern, so werden jetzt die Endtangentialen in P_n und P_0 parallel. Wie auf Seite 29 gelten die Beziehungen

$$ds = \varrho du = F(u) du \quad dx = -F(u) \sin(u) du \\ dy = F(u) \cos(u) du.$$

Sei L die Bogenlänge von $P_0 P_n$, seien $\Delta x^{(1)}$ und $\Delta y^{(1)}$ die Komponenten des Vektors $P_0 P_n$, dann ergibt die Integration dieser Gleichungen zwischen 0 und 2π

$$L = \int_0^{2\pi} F(u) du \\ \Delta x^{(1)} = - \int_0^{2\pi} F(u) \sin(u) du \quad \Delta y^{(1)} = + \int_0^{2\pi} F(u) \cos(u) du$$

und da nach Fourier allgemein

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(u) \cos(ku) du \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(u) \sin(ku) du$$

so hat man

$$a_0 = \frac{1}{\pi} L \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \Delta y^{(1)} \quad b_1 = -\frac{1}{\pi} \Delta x^{(1)}$$

womit a_0 , a_1 und b_1 graphisch bestimmt sind. Ersetzt man u durch u/k , so wird

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^{k\pi} F\left(\frac{u}{k}\right) \cos(u) du \quad b_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^{k\pi} F\left(\frac{u}{k}\right) \sin(u) du$$

Man zeichnet jetzt zu jedem Werte k die der Forderung

$$p(u) = F\left(\frac{u}{k}\right)$$

entsprechende Kurve C_k , die aus $C_1 = C$ entsteht, indem man alle Zentriwinkel der Teilkreisbögen k mal grösser nimmt, sodass die Kurve C_k k volle Umläufe macht. Wir

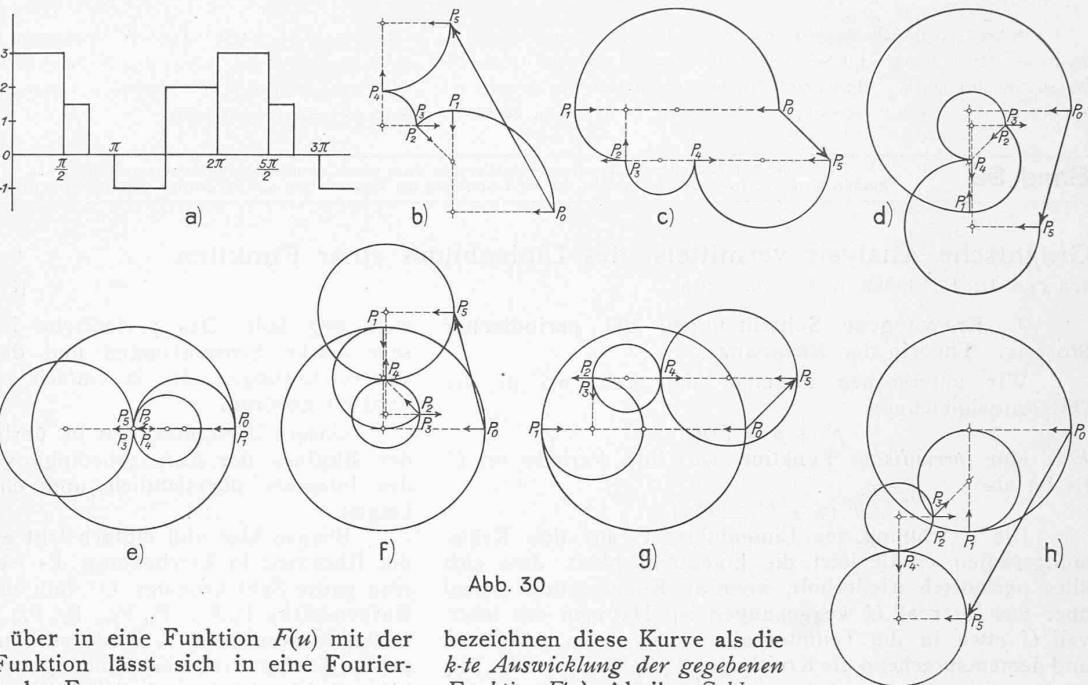
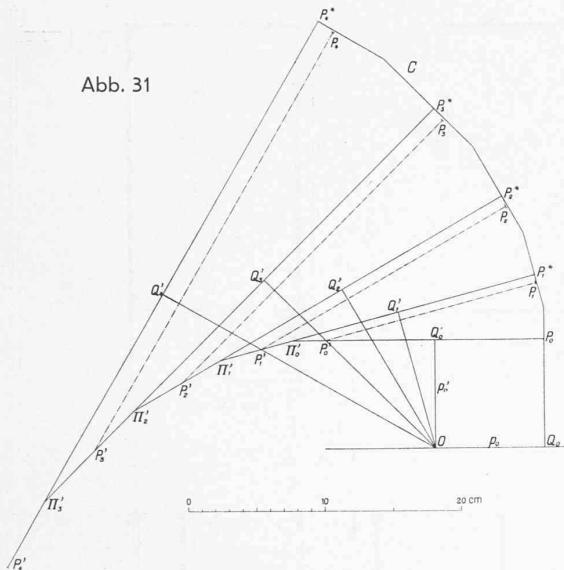


Abb. 31



Man kann aus den Figuren folgendes Resultat entnehmen:

$a = 2,375$	$a_{8n+1} = \frac{5,56}{(8n+1)\pi}$	$b_{8n+1} = \frac{3,06}{(8n+1)\pi}$
	$a_{8n+2} = \frac{-1,5}{(8n+2)\pi}$	$b_{8n+2} = \frac{-1,5}{(8n+2)\pi}$
	$a_{8n+3} = \frac{-3,44}{(8n+3)\pi}$	$b_{8n+3} = \frac{0,94}{(8n+3)\pi}$
	$a_{8n+4} = 0$	$b_{8n+4} = \frac{3}{(8n+4)\pi}$
	$a_{8n+5} = \frac{3,44}{(8n+5)\pi}$	$b_{8n+5} = \frac{0,94}{(8n+5)\pi}$
	$a_{8n+6} = \frac{-1,5}{(8n+6)\pi}$	$b_{8n+6} = \frac{-1,5}{(8n+6)\pi}$
	$a_{8n+7} = \frac{-5,56}{(8n+7)\pi}$	$b_{8n+7} = \frac{3,06}{(8n+7)\pi}$
	$a_{8n+8} = 0$	$b_{8n+8} = 0$
		$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Die Genauigkeit und Raschheit des geschilderten Verfahrens hängt ab von der Stufenzahl in der Treppenkurve, durch die die zu analysierende Funktion angenähert wird. Man kann diese Stufen recht kurz nehmen, bevor sich der störende Einfluss zeichnerischer Ungenauigkeiten praktisch geltend macht. Da es sich meistens nur um die Auswertung der allerersten Koeffizienten handelt, dürfte das Verfahren gut brauchbar sein, wenn Abweichungen von der Größenordnung von Prozenten zulässig sind.

11. Integration der Differentialgleichung $p''(u) = p(u)$.

Es soll in diesem Abschnitt die Funktion $p(u) = Ae^u$ konstruiert werden, indem man sie als das Integral der Differentialgleichung $p'(u) = p(u)$ auffasst mit den Anfangsbedingungen $p(0) = p'(0) = A$.

Um über die Genauigkeit des Interpolationsverfahrens des Abschnitts 5 Klarheit zu erhalten, soll dabei die Integralrelation $\hat{p}'(u) = \hat{p}(u)$ nicht berücksichtigt werden, was natürlich die Genauigkeit des Resultates herabsetzt.

Abb. 31 enthält die zugehörige Konstruktion. Für das Linienbild C von $p(u)$ ist

$$\varrho(u) = 2 \, p(u).$$

Es wurde absichtlich für a der grosse Wert von 15^0 gewählt. Die Konstante A wurde gleich 8 cm genommen. In der Abb. 31 sind angegeben die Ausgangspunkte P_0 , P'_0 , Π'_0 für $u = 0$, der Punkt P_1 , der Endpunkt

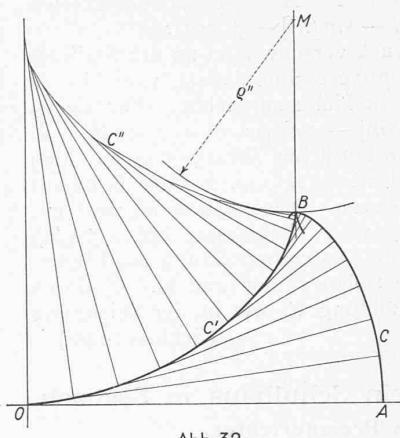


Abb. 32

des ersten, noch nicht endgültigen Näherungsbogens, der durch das Interpolations-Verfahren ermittelte Punkt P_1^* usw. Dabei ist die durch Interpolation gefundene Gerade g^* jeweilen voll ausgezogen, während die unberichtigte Normale g' durch eine strichpunktirte Linie dargestellt ist. Die Abbildung zeigt deutlich, wie stark die Grösse von p' durch die Interpolation ab-

geändert wird, während die von p nur kleine Korrekturen erleidet. In der nachfolgenden Tabelle sind der Reihe nach die unkorrigierten, die interpolierten und die analytisch berechneten Werte von $p(u)$ und $p'(u)$ zusammengestellt. In den in cm ausgedrückten Angaben bedeuten die zweiten Stellen nach dem Komma Zehntelsmillimeter; sie wurden beim Abmessen nur noch geschätzt, sodass sie nur bis auf eine oder zwei Einheiten genau sind. Die Tabelle zeigt, dass im Verlaufe der Konstruktion die Fehler sich häufen und der Wert von $e^{x/12}$ noch auf 1,2% genau ist. Das ist in Anbetracht der grossen Winkeldifferenz von 15°, der Kürze der Konstruktion und des Umstandes, dass die Krümmung des Linienbildes sich hier sehr stark ändert, ein recht befriedigendes Ergebnis. Ferner lehrt die Zusammenstellung, insbesondere der Vergleich der letzten Kolonnen, wie ausserordentlich stark die p' -Werte durch die Interpolation korrigiert werden. Für die p -Werte ergibt sich eine systematische, wenn auch geringfügige Abweichung nach oben. Die Verhältnisse je zweier aufeinanderfolgender p -Werte, die konstant und gleich $e^{x/12}$ sein sollten, sind ebenfalls eingetragen. Sie entfernen sich von einem Mittelwert, 1,303, sehr wenig. Der genaue Wert ist 1,299, sodass diese Grösse auf etwa 3% genau bestimmt ist. Beachtet man, dass hier eine eigentliche Differentialgleichung zweiter Ordnung integriert wurde, da ja auf Benützung der Relation $p = p'$ verzichtet wurde, so dürfen die Ergebnisse zufriedenstellend genannt werden.

12. Integration der Differentialgleichung

$$p'' + p \sin(u) = 0.$$

Abb. 32 zeigt die Integration dieser Gleichung für die Anfangsbedingung

$$p(\mathbf{o}) = p_0 = OA \quad p'(\mathbf{o}) = \mathbf{o}.$$

Man hat $\varrho(u) = p[1 - \sin(u)]$, und man kann demgemäß das Linienbild konstruieren. Aber im Punkte B für $u = \frac{\pi}{2}$ wird der Krümmungsradius $\varrho = 0$ und die

u^o	$\hat{p}(u)$ unkorrig.	$\hat{p}^*(u)$ korrig.	$\hat{p}(u) = \hat{p}'(u)$ berechnet	$\hat{p}'(u)$ unkorrig.	$\hat{p}'^*(u)$ korrig.	Fehler $\hat{p}^* - \hat{p}$	In $\%$	$\frac{\hat{p}_i^*}{\hat{p}_{i-1}^*} = \epsilon^{1/2}$	$\hat{p}' - \bar{\hat{p}'}$	$\hat{p}'^* - \bar{\hat{p}'}$		
0°	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	0	0	1,300	0,00	0,00		
15°	10,34	10,40	10,39	9,79	10,39	+ 0,01	+ 0,1		1,305	- 0,60	0,00	
30°	13,47	13,58	13,50	12,77	13,57	+ 0,08	+ 0,6			1,303	- 0,73	+ 0,07
45°	17,59	17,70	17,55	16,60	17,66	+ 0,15	+ 0,8				1,303	- 0,95
60°	22,99	23,07	22,80	21,67	23,01	+ 0,27	+ 1,2	Mittel: 1,303				- 1,13

Konstruktion versagt. Der Krümmungsradius der Evolute C' ist $\varrho'(u) = p' [l - \sin(u)] - p \cos(u)$ und auch dieser Ausdruck verschwindet an der Stelle B. Somit liegt hier eine höhere Singularität vor. Es ist die zweite Evolute C'' zu Hilfe zu ziehen. Für sie ist $\varrho''(u) = p'' [1 - \sin(u)] - 2p' \cos(u) + p \sin(u)$ und sie nimmt in B den endlichen Wert $p(\pi/2)$ an. Man kann daher C'' in der Umgebung von B über B hinaus ohne Schwierigkeit zeichnen. Diese Kurve ist dort mit Annäherung ein Kreis vom Halbmesser $BM = p(\pi/2)$. Aus ihr findet man durch Evolventenbildung das Linienbild C' , das in B eine Spitze bildet und aus C' durch nochmalige Evolventenbildung C , wie in der Zeichnung angegeben. (Schluss folgt.)

Wettbewerb für ein Schulhaus in Seebach. Aus dem Bericht des Preisgerichtes.

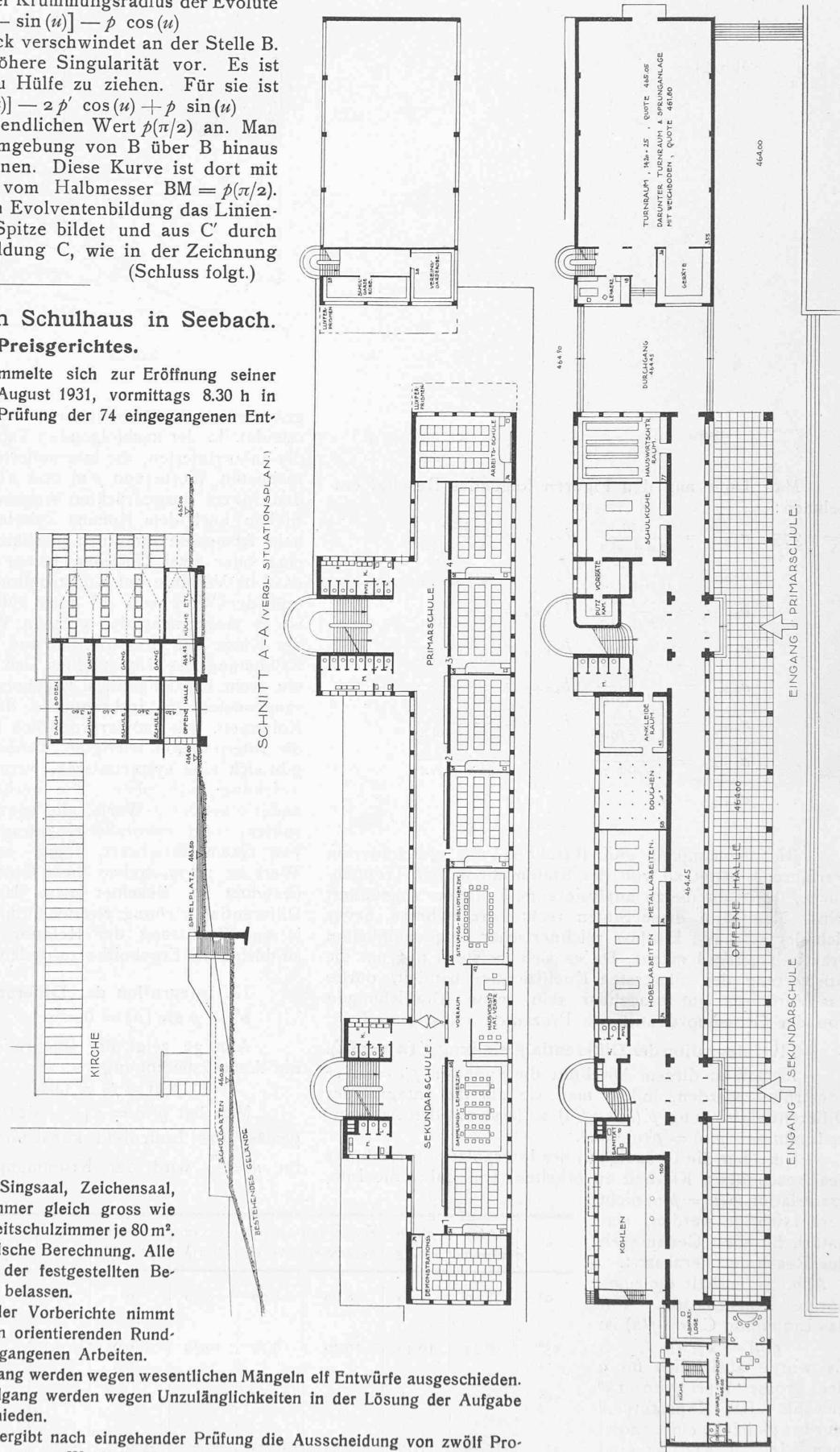
Nach Kenntnisnahme der Vorberichte nimmt das Preisgericht durch einen orientierenden Rundgang Einsicht von den eingegangenen Arbeiten.

In einem ersten Rundgang werden wegen wesentlichen Mängeln elf Entwürfe ausgeschieden.

In einem zweiten Rundgang werden wegen wesentlichen Mängeln ein Entwurf ausgeschieden. weitere 39 Projekte ausgeschieden.

Der *dritte* Rundgang ergibt nach eingehender Prüfung die Ausscheidung von zwölf Projekten. Es verbleiben in der engern Wahl die Nrn: 1, 6, 14, 22, 26, 32, 43, 51, 54, 61, 64, 67.

Entwurf Nr. 6, „Lux“. In grosszügiger Weise hat der Verfasser die Gesamtanlage zu einer Einheit durchgebildet. Die Grünflächen sind zusammengelegt und stehen in schöner Weise mit dem Wälzchen in Verbindung. Die neuen Bauten einschliesslich Kirche sind in



1. Rang. Entwurf Nr. 6

Grundriss vom Erdgeschoss, 1. Obergeschoss und Schnitt. — Maßstab 1:600