Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 99/100 (1932)

Heft: 3

Artikel: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion

Autor: Meissner, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45442

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

16. Januar 1932

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. Der neue Zentralbahnhof in Mailand. - Neuere geschweisste Brücken. - Mitteilungen: Eidgen. Technische Hochschule. Messtechnische Erfassung der durch elektrische Bahnen verursachten Telephonstörungen. Moderne Turbogebläse für Hüttenwerke. Atemfilter. 75 Jahre "Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure". Kurs

über Betriebsführung. Auflösung von Stahl in Säuren. Eisenbahnmotorwagen auf Gummireifen. Baufach-Ausstellung in Zürich. Die erste Eisenbahnlinie auf den Bermudas. Prof. Dr. W. Wyssling. Wassermessungen mit Ueberfall in der Zentrale Handeck. - + Eduard Locher. - Literatur. - Mitteilungen der Vereine. - Sitzungs-

Band 99

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet

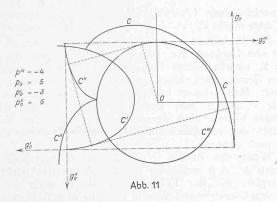
Nr. 3

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

6. Ganze rationale Funktionen.

Eine ganze rationale Funktion n-ten Grades ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre n-te Ableitung konstant ist. Es ist daher die n-te Evolute ihres Linienbildes ein Kreis. Die (n - 1)te Evolute ist sonach eine gewöhnliche Kreisevolvente, und indem man zu dieser ihre auseinanderfolgenden Evolventen zeichnet, gelangt man schliesslich zum Linienbild der Funktion. Um praktisch das Linienbild zu zeichnen, wird man zur Kontrolle einige Werte der Funktion und damit die zugehörigen Stützgeraden g direkt berechnen bezw. konstruieren. Aber wenn es sich darum handelt, den Verlauf der Funktion in einem grössern Intervall darzustellen, wird man das Linienbild zweckmässig in der geschilderten Weise als Evolvente zeichnen.



In Abb. 11 ist die Funktion

$$p(u) = 5 - 3u + 3u^2 - \frac{2}{3}u^3$$

dargestellt. Es ist $p_0 = 5$, $p_0' = -3$, $p_0'' = 6$, $p_0''' = -4$, und es ist daher C''' ein Kreis vom Radius — 4. Dementsprechend sind die Geraden g_0 , g_0' , g_0'' , g_0''' eingetragen und die Evolventen C, C' und C'' von C''' gezeichnet. C ist das Linienbild der gegebenen Funktion und in der Abb. 11 für das Intervall von o bis π dargestellt.

Von dieser Konstruktion wird bei der Integration von Differentialgleichungen Gebrauch gemacht, wenn ausnahmsweise für eine Funktion an einer Stelle die Funktion und ihre ersten Ableitungen alle Null werden. Ist z. B., wie in Abb. 12 dargestellt, für den Wert u = a sowohl p, wie p', p'' und p''' gleich Null und erst $p^{(4)} = a$ von Null verschieden, so kann die Funktion in der Umgebung jener Stelle angenähert durch den Ausdruck

$$a\frac{(u-a)^4}{4!}$$

dargestellt werden. Ihre zweite Evolute ist dort angenähert

und Vortrags-Kalender.

(Fortsetzung von Seite 335 letzten Bandes.)

ein Kreis vom Radius a und man hat hierzu nur die zweite Evolvente durch den Punkt O zu zeichnen, wie die Abb. 12 angibt.

7. Die harmonische Funktion.

Das einfachste Linienbild ist ein Punkt P. Sind seine rechtwinkligen Koordinaten a, b, so ergibt sich aus Abb. 13 $p(u) = a \cos(u) + b \sin(u)$

d. h. die harmonische Funktion mit der Periode 2 n. Schreibt man p in der Form

 $p(u) = A \cos(u - \varepsilon)$

so ist die Amplitude A dargestellt durch die Länge der Strecke OP, die Phase & ist der Winkel, den diese Strecke mit der Polaraxe einschliesst. Die Bestimmungstücke der harmonischen Schwingung werden aus dem Vektor OP ersichtlich. Umgekehrt genügen alle harmonischen Schwingungen von der Periode 2 n der Differentialgleichung p(u) + p''(u) = 0, die nichts anderes aussagt, als dass der Krümmungsradius o des Linienbildes stets gleich Null ist, es sich also um einen Punkt handelt.

Durch Addition beliebig vieler solcher Schwingungen erhält man wiederum eine Schwingung der selben Art, und zwar wird sie dargestellt durch den Vektor, der sich durch geometrische Addition der Vektoren der Teil-

schwingung ergibt.

Die Lösung der Gleichung $a \cos(u) + b \sin(u) = c$ erfordert, jene Stützlinien durch den Punkt P (a, b) in Abb. 14 zu zeichnen, die von O den Abstand c haben. Man hat also einfach die Tangenten an den um O geschlagenen Kreis vom Radius c von P aus zu legen. Die Radien nach den Berührungspunkten schliessen mit der Polaraxe jene Winkel u ein, die die Lösung der Gleichung ergeben. Natürlich sind sie nur bis auf Multipla von 2π bestimmt.

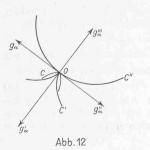
Die Lösung der Gleichung $a_1 \cos(u) + b_1 \sin(u) =$ $a_2 \cos(u) + b_2 \sin(u)$ wird analog durch die Verbindungsgerade der Punkte P (a_1, b_1) und P (a_2, b_2) gegeben (Abb. 15).

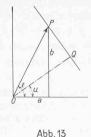
Das nächsteinfache Linienbild ist der Kreis vom Radius r. Für ihn gilt p + p'' = r mit der allgemeinen $p(u) = r + a \cos(u) + b \sin(u)$ Lösung Zur harmonischen Funktion erscheint eine feste Konstante

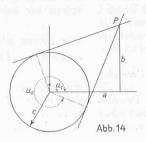
Verlegung des Anfangspunktes. Verlegt man bei beliebigem Linienbild C den Anfangspunkt von O nach links und unten um die Strecken a und b (Abb. 16), so tritt an Stelle der Stützfunktion p(u) die neue Funktion

 $\overline{p}(u) = p(u) + a \cos(u) + b \sin(u).$

Eine harmonische Funktion mit der Periode 2π ist somit ein unwesentlicher additiver Zusatz zur Stützfunktion. Durch passende Verlegung des Anfangspunktes kann sie stets beseitigt werden.







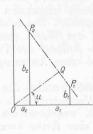
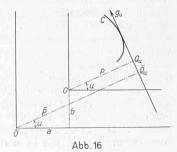


Abb. 15



also

1. Beispiel. Elastische Schwingungen eines Massenpunktes auf einer Geraden bei konstanter Reibung.

Auf der Geraden OA (Abb. 17) sei ein Massenpunkt m von der Masse 1, der von O aus proportional der Entfernung p = Om angezogen werde(Proportionalitäts - Konstante k^2). Ausserdem wirke auf ihn entgegengesetzt der Bewegung der kon

gesetzt der Bewegung der konstante Reibungswiderstand R. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2p}{dt^2} + k^2p = \pm R$$

wo das obere Zeichen für die Rückwärts-, das untere für die Vorwärtsbewegung gilt, oder mit der Abkürzung $R/k^2=r$ und nach Einführung der neuen Veränderlichen $u=k\;t$

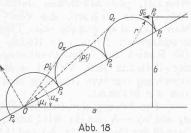
$$p'' + p = \pm r$$

Diese Gleichung aber sagt aus, dass das Linienbild C
von $p(u)$ einen Krümmungsradius hat, der abwechselnd
bald gleich r , bald gleich $-r$ ist, und dass der Wechsel
an den Stellen eintritt, wo $p' = 0$ wird. Hat man etwa die
Anfangsbedingungen

$$p = p_0 \qquad p' = p_0' \qquad \text{für} \quad t = 0,$$

 $p=p_0=a$ $p'=k\,p_0'=b$ für u=0 und ist b wie in Abb. 18 positiv, so beginnt das Linienbild als Kreis vom Radius -r, was bedeutet, dass der Kreismittelpunkt im Sinne der negativen Richtung auf der Geraden g' aufzutragen ist. Dies gilt solange p'(u) positiv bleibt, also bis zur Stelle P_1 der ersten Umkehrstelle. Hier springt der Radius auf +r, d. h. der Kreis ist jetzt auf die entgegengesetzte Stelle der Normalen zu zeichnen. Dieser Kreis gilt bis zur nächsten Umkehrstelle P_2 , worauf neue Halbkreisbögen P_2 , P_3 usw. sich anschliessen. Ein endgültiger Stillstand der Bewegung tritt in jenem Punkte (P_4) ein, an dem zum ersten Mal die elastische Kraft k^2p kleiner wird als die vollentwickelte Reibung R, im Linienbild else de generatie

bild also da, wo zum ersten Mal |p| < r vorkommt. Das Linienbild der Bewegung setzt sich also aus einer Anzahl Halbkreisbögen zusammen, von denen nur der erste unvollständig bleibt. Man erkennt mit einem Blick, dass die Schwingungsausschläge arith-



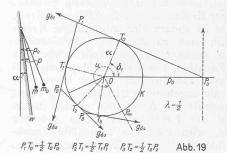
metisch abnehmen jeweilen um den Betrag 2r, aber man kann, was wertvoller ist, aus dem Bild für jede beliebige Zeit t (bezw. u) den Ort p und die Geschwindigkeit dp/dt = k p' entnehmen. In Abb. 18 sind bespielsweise die Geschwindigkeiten $OQ_{\rm I}$, $OQ_{\rm II}$ beim Durchgang durch den Nullpunkt und die zugehörigen u-Werte (Durchgangszeiten) $u_{\rm I}$, $u_{\rm II}$ hervorgehoben.

2. Beispiel. Stösse eines Pendels gegen eine elastische Wand.

Ein Pendel, dessen Schwingungen so klein sind, dass sie als rein harmonisch angesehen werden können, stosse beim Fallen auf eine schiefe, elastische Wand W von der Neigung α . Durch den Stoss werde ein bestimmter Bruchteil der Bewegungsenergie vernichtet, die Geschwindigkeit jeweilen der Richtung nach umgekehrt und auf den λ -fachen Wert ihrer Grösse reduziert. Der echte Bruch λ kann als Mass für die Elastizität der Wand gelten. Wie verläuft die Bewegung, wenn zu Anfang das Pendel um den Winkel p_0 abgelenkt ist und ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen gelassen wird?

Es sei (Abb. 19) p der Ausschlagwinkel des Pendels; an Stelle der Zeit t werde die Veränderliche $u=2\pi t/T$ benützt, wo T die Periode des ungehemmten Pendels bedeutet. Das Pendel führt dann eine Reihe harmonischer Schwingungen aus, die in u die Periode 2π haben, deren

Linienbilder also durch Punkte P_1 , P_2 ... dargestellt werden. Die Art dieser Schwingungen wechselt mit jedem Stoss. Denn im Augenblick des Aufprallens springt die Geschwindigkeit und damit das zu ihr proportionale p' auf das λ -fache ihres Wertes hinab unter Wechsel des Vorzeichens. Im Anfang, für kleine Werte von u, wird das Linienbild des Vorganges dargestellt durch den Punkt P_0 , der durch die Anfangsbedingungen $p(0) = p_0$, p'(0) = 0 gekennzeichnet ist. Für die letzte der zugehörigen Stützlinien $g(\delta)_1$ ist $p(\delta_1) = a$, d. h. die Stützlinie ist Tangente an dem um O gezogenen Kreis K vom Radius a. Die nachfolgende harmonische Schwingung wird durch das Linienbild P_1 dargestellt, das man erhält, indem man vom Berührungspunkte T_0 das λ -fache der



Strecke T_0 P_0 auf $g(\delta_1)$ nach entgegengesetzten Richtung abträgt, also P_1 $T_0 = \lambda \cdot T_0$ P_0 macht. Dieses neue Linienbild gilt wiederum solange, bis p wieder gleich α wird, also bis die zugehörige Stützgerade $g(\delta_2)$ durch P_1 den Kreis K berührt.

Das nachfolgende Linienbild P_3 wird analog konstruiert, d. h. man macht P_3 $T_1 = \lambda \cdot T_1$ P_1 und so fährt man weiter

Das Linienbild C des Vorganges wird sonach eine Folge von Punkten, die, miteinander verbunden, ein dem Kreis K umschriebenes Polygon $P_0\,P_1\,P_2\,P_3\,\ldots$ ergeben, dessen Seiten nach einer geometrischen Degression abnehmen. Man erkennt leicht, dass sich infolgedessen die Punkte P_i gegen eine bestimmte Stelle P_0 des Kreisumfanges häufen, nach der sie konvergieren. Die Amplitude OP_1 der verschiedenen Schwingungen nehmen daher mehr und mehr ab.

Wenn der Radius α des Kreises K von Null verschieden ist, d. h. wenn die Wand nicht vertikal steht, so konvergiert mit der Folge der Punkt P_i auch der im Gesamten überstrichene Winkel u nach einem Grenzwert U. Nur im Falle $\alpha=$ o wird er ins Unendliche anwachsen. Man erhält somit das bemerkenswerte Resultat:

Wenn die Wand nicht vertikal steht, so kommt die Bewegung nach der endlichen Zeit $T = U/2 \pi$ zum Stillstand.

Die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung.

In vielen Teilen der Mechanik und Physik spielt eine Differentialgleichung eine Rolle, die wir an einem mechanischen Beispiel auseinandersetzen wollen.

Ein System mit einem Freiheitsgrad und der Lagekoordinate z sei fähig, gedämpfte harmonische Schwingungen auszuführen, für die dann eine Gleichung von der Form

$$\ddot{z} + 2 \lambda \dot{z} + k^2 z = 0$$

gilt. λ ist die sog. Dämpfungskonstante, Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit. Wenn jetzt von aussen her eine zeitlich veränderliche Kraft hinzutritt, hat man als Bewegungsgleichung

$$\ddot{z} + 2 \lambda \dot{z} + k^2 z = f(t)$$

Um sie der graphischen Integration zugänglich zu machen, setzen wir zunächst $z=e^{-\lambda t}\rho$, worauf sie übergeht in

$$\ddot{p} + (k^2 - \lambda^2) p = f(t) e^{\lambda t}$$

Wir führen noch einen neuen Zeitmasstab ein, indem wir t durch $u = \sqrt{k^2 - \lambda^2} t$ ersetzen und erhalten schliesslich

$$p'' + p = F(u) \dots (9)$$

wo jetzt die Striche wiederum Ableitungen nach u bedeuten, und F(u) die Abkürzung für die rechte Gleichungseite ist, wenn man dort t durch u ersetzt und durch $(k^2 - \lambda^2)$ dividiert.

In der Folge dürfen wir uns auf die Behandlung dieser letzten Gleichung beschränken, die wir als die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung bezeichnen.

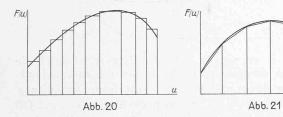
Das Linienbild C der Lösung ist eine Kurve, für die

 $\varrho(u) = F(u)$

d. h. für die der Krümmungshalbmesser o eine gegebene

Funktion des Richtungswinkels u ist.

Wenn man den Bereich der Veränderlichen u in genügend kleine Intervalle α_1 , α_2 , α_3 , ... einteilt, sodass innerhalb eines Intervalls α_i die Funktion F(u) als konstant (= Qi) angesehen werden kann, so hat man einfach zu den Zentriwinkeln a_i mit den Radien ϱ_i eine Folge von stetig und mit stetiger Tangente aneinanderschliessenden Kreisbogen zu zeichnen, die dann das gesuchte Linienbild mit Annäherung darstellen. Das kommt darauf hinaus, die Funktion F(u) durch eine stückweise konstante Funktion zu ersetzen, sodass deren Funktionsbild in rechtwinkligen Koordinaten eine Treppenkurve wird (Abb. 20). In gewissen Fällen mag das nicht genau genug scheinen. Man kann aber wohl immer mit genügender Genauigkeit



die Funktion durch ein Polygon ersetzen (Abb. 21). Alsdann ist aber ihre Ableitung durch eine Treppenkurve ersetzt und es lässt sich infolgedessen die Evolute C' von C durch eine Folge von Kreisbogen wie beschrieben konstruieren. Man hat dann einfach nachträglich noch zu C' die Evolvente zu zeichnen, um zum gesuchten Linienbild C

zurückzugelangen.

Der beschriebenen Konstruktion, die wir als die Konstruktion aus den Krümmungsradien bezeichnen, kann eine zweite an die Seite gestellt werden, die wir die Evolventenkonstruktion nennen wollen. Sie illustriert einfach den Umstand, dass man das Integral einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung durch blosse Quadraturen finden kann, wenn die Lösung der homogenen Gleichung bekannt ist, was hier der Fall ist. Wir werden auf die anschaulichste Weise zu dieser Darstellung gelangen, indem wir auf die geometrische Deutung zurückgehen.

Seien wie früher x, y (Abb. 4) die rechtwinkligen Koordinaten des Berührungspunktes Pu von g(u) mit dem Linienbild C. Sei ferner s die auf C gemessene Bogenlänge, ds das Linienelement Pu Pu*, das der Winkeländerung du entspricht. Dann gelten die Formeln

 $ds = \varrho \ du = F(u) \ du$ $dx = -ds \sin(u),$ $dy = +ds \cos(u)$

und also

$$\frac{dx}{du} = -F(u) \sin(u) \qquad \frac{dy}{du} = F(u) \cos(u)$$

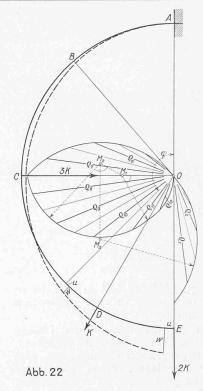
 $\frac{dx}{du} = -F(u) \sin(u) \qquad \frac{dy}{du} = F(u) \cos(u)$ $-F(u) \sin(u) \text{ und } F(u) \cos(u) \text{ sind also die Stütz-}$ funktionen für zwei Kurven Cx und Cy, deren Evolventen die Funktionen x(u) und y(u) zu Stützfunktionen haben. Sind sie ermittelt, so ergibt sich direkt ohne neue Integration

 $p(u) = x(u) \cos(u) + y(u) \sin(u)$ $p'(u) = -x(u) \sin(u) + y(u) \cos(u)$

Da sich Evolventen mit grosser Genauigkeit zeichnen lassen, wird es sich gelegentlich empfehlen, trotz der etwas grössern Zeichenarbeit diese Evolventenmethode anzuwenden.

Anwendung auf die Biegung eines halbkreisförmigen Stabes.

Ein krummer Stab von Halbkreisform ABCDE (Abb. 22) sei an einem Ende A eingespannt und durch drei Kräfte, K in D, 2K am freien Ende E und 3K in C



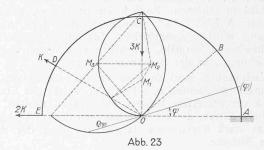
belastet. Die beiden ersten wirken radial nach aussen, die letzte radial nach innen. Es sei die Deformation des Stabes zu suchen.

Schwerpunkt Der eines zum beliebigen Winkel φ gehörigen Querschnittes verschiebe sich um den Betrag u in der Richtung tangential zur Stabaxe im Sinne des wachsenden Winkels φ , und um den Betrag w radial nach aussen. Es bezeichne $M(\varphi)$ das Biegungsmoment für diesen Querschnitt. Die Theorie kreisförmig gekrümmter Stäbe1) führt dann für w und u zu den Differentialgleichungen von Boussinesq:

$$w + \frac{d^2 w}{d \varphi^2} = -M(\varphi) \frac{a^2}{B}$$

$$u = -\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

Hier ist a der Halbmesser des Kreises, in den die Stabaxe gebogen ist, B ist die sogen. Biegungsteifigkeit des Stabes. Es genügt sonach w der Gleichung der erzwungenen Schwingung und es stimmt die Störungsfunktion F der allgemeinen Theorie abgesehen vom konstanten Faktor $-\frac{a^2}{B}$ mit dem Biegungsmoment überein. Es ist indessen zu beachten, dass der Winkel u der Theorie hier durch φ und die Funktion p durch w ersetzt ist, und dass der Buchstabe u hier eine andere Bedeutung hat.



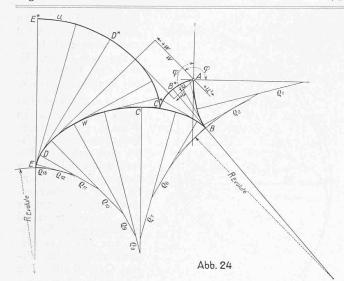
In Abb. 23 ist zunächst ein Polardiagramm des Biegungsmomentes unter Mitberücksichtigung des Faktors $+a^2/B$ dargestellt, d. h. es sind die Krümmungsradien ϱ des zu konstruierenden Linienbildes in jedem Schnitt \varphi vom Zentrum O des Kreises aus aufgetragen. Da das Biegungsmoment für jedes der drei Felder AC, CD, DE von der Form

 $l\cos(\varphi) + m\sin(\varphi)$

ist, setzt sich das Polardiagramm aus drei Kreisbogen zusammen, die durch das Zentrum O gehen. Man findet die Mittelpunkte M1, M2, M3 der Kreise in den Ecken des Vektorpolygons, das entsteht, wenn man die radial wirkenden Kräfte der Reihe nach um einen rechten Winkel dreht, mit dem Faktor a8/2B multipliziert und zusammensetzt.

Das Intervall von o bis 1800 wurde in zwölf Intervalle von 150 eingeteilt und als konstanter Mittelwert des Krümmungsradius in einem Intervall wurde der Wert von o für die Intervallmitte gewählt. So ergaben sich zwölf

¹⁾ Vergl. hierzu etwa: Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 181, 182. Man hat in der Formel (2) S. 181 die Axialdehnung ε = 0 zu setzen.



Krümmungsradien ϱ_1 bis ϱ_{12} (Abb. 22 und 24). Es ist zu beachten, dass das Biegungsmoment an zwei Stellen Null wird, am freien Ende E und an der Stelle B.

Abb. 24 zeigt nun die Konstruktion der Lösung aus den Krümmungsradien. Vom Punkte A ausgehend, wo w(o) = o, w'(o) = o ist (wegen der Einspannung), sind Kreisbogen von je 150 geschlagen, deren Halbmesser sukzessive mit den Grössen ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 ... übereinstimmen. In der Nähe der Stelle B werden indessen die Radien so klein, dass die Konstruktion einer Ergänzung bedarf. Das Linienbild hat dort eine Spitze, die sich aus den kleinen Radien nur ungenau zeichnen lassen würde. Es ist deshalb dort die Evolute gezeichnet, die einen nicht verschwindenden Krümmungsradius

$$\varrho' = -\frac{a^2}{B} \frac{dM}{d\omega}$$

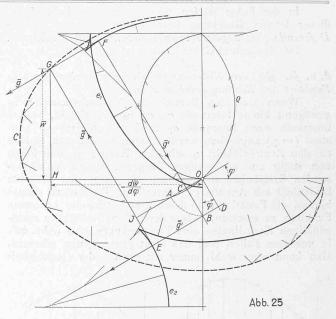
 $\varrho'=-\frac{a^2}{B}\frac{dM}{d\varphi}$ hat, und das Linienbild in der Umgebung von B wird durch die Evolvente dieser Kurve ersetzt. Der gleiche Kunstgriff ist verwendet, um am freien Ende E das Linienbild zu zeichnen. Endlich ist in Abb. 24 noch die Evolvente A B*C*D*E* gezeichnet, die der Anfangsbedingung w'(o) = o entspricht. Sie gibt, gemäss den angeschriebenen Formeln, abgesehen vom Vorzeichen, die Verschiebung u in der Stabaxenrichtung.

Nachträglich sind in Abb. 22 die ermittelten Verschiebungskomponenten u, w für jeden Punkt der Stabaxe in stark vergrössertem Masstab aufgetragen worden. Die gestrichelte Kurve, die die so erhaltenen Punkte verbindet, gibt das stark übertrieben dargestellte Bild der deformierten Stabaxe.

Wenn auch zu bemerken ist, dass in dem behandelten Beispiel die Lösung analytisch streng gefunden werden könnte, so ist es doch ein Vorteil dieser graphischen Methode, dass sie selbst bei ganz beliebiger Lastverteilung einfach und übersichtlich bleibt, während schon in dem hier behandelten Beispiel von nur drei Lasten die analytischen Rechnungen umständlich werden. Denn das Biegungsmoment folgt in den drei Feldern drei verschiedenen analytischen Gesetzen. Man hat daher die Differentialgleichungen dreimal zu integrieren und, was besonders umständlich ist, die Teillösungen stetig und mit stetiger Ableitung aneinander anzupassen. Dieser Prozess wird für grössere Lastenzahl praktisch fast undurchführbar. Die Verhältnisse sind denen beim geraden Stab ganz analog. In der graphischen Darstellung entspricht der Culmannschen Momentenfläche das aus Kreisbogen sich zusammensetzende Polardiagramm des Biegungsmomentes.

Lösung der gleichen Aufgabe mit der Evolventenkonstruktion.

Die Abb. 25 enthält zunächst wieder das Polardiagramm des Krümmungshalbmessers o für das zu konstruierende Linienbild von w. Für den hervorgehobenen



Winkel φ ist er negativ, sein Absolutwert ist durch die Strecke OA dargestellt. Es sind nun die zu den Funktionen — $\varrho \sin(\varphi)$ und $\varrho \cos(\varphi)$ gehörigen Stützlinien g'und g' konstruiert. Dazu hat man die Strecke OA auf OB übertragen und durch B die Parallele $\overline{\mathbf{g}'}$ bezw. die Normale $\overline{\mathbf{g}'}$ zu OA gezogen. Sie haben von O die Abstände — ϱ $\cos\left(\varphi\right)$ und — $\varrho \sin(\varphi)$. Dementsprechend ergeben sich für die Stützlinien die in der Figur eingezeichneten Pfeile.

Zum System der Geraden \overline{g}' ist nun irgend eine Evolvente e2 gezeichnet, die also bis auf eine Integrationskonstante genau die Funktion $y(\varphi)$ darstellt, und zwar hat man, entsprechend dem Pfeilsinn der Stützlinien, die Beziehung

$$-y = OJ = DE$$
.

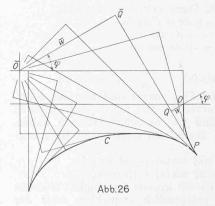
Analog liefert die Orthogonaltrajektorie e1 zu den Geraden g' bis auf eine additive Integrationskonstante genau die Funktion $x(\varphi)$ und zwar ist

$$x = JG = CF$$

Demgemäss stellen die Strecken

Demgemäss stellen die Strecken
$$HG = JG \cos \varphi - JO \sin \varphi = x \cos \varphi + y \sin \varphi = \overline{w}$$

und HO = JG
$$\sin \varphi$$
 + JO $\cos \varphi = x \sin \varphi - y \cos \varphi = -\frac{\partial \overline{w}}{\partial \varphi}$ bis auf eine harmonische Funktion mit der Periode 2 π genau die Funktionen $w(\varphi)$ und $w'(\varphi)$ dar.



In Abb. 26 ist das Linienbild der so gefundenen Funktion $w(\varphi)$ von einem Anfangspunkt O aus aufgetragen. Um die wahre Funktion w zu finden, sind jetzt noch die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen. Das geschieht nach früherem durch Verlegung des Anfangspunktes nach einer Stelle O, die ein-

deutig dadurch bestimmt ist, dass für die von dort aus gemessene Stützfunktion der selben Kurve w(o) und w'(o)verschwinden. Es ist jetzt

$$-w(\varphi) = OQ$$
 $-\frac{\partial w}{\partial \varphi} = QP = u$

womit die Verschiebungskomponenten wieder gefunden sind. (Forts. folgt.)