

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 99/100 (1932)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Techn. Methoden photoelastischer Forschung  
**Autor:** Baud, R.V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-45524>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*a) Dilatation du ciment dans l'eau.*

Bien que l'état hygrométrique du corps reste constant, puisqu'il y a sursaturation d'eau, il se produit néanmoins, lors de l'échauffement, un accroissement des dimensions qui subsiste lorsque la température est abaissée.

La propriété du ciment de se dilater dans l'eau même pendant une très longue durée, est connue depuis longtemps. On ignore par contre, en général, que cette propriété est fonction de la température à laquelle on conserve les éprouvettes. A basse température le gonflement ne s'opère que lentement, à température plus élevée, le mouvement est accéléré. Ce gonflement ne doit pas être confondu avec la dilatation thermique, il résulte nettement d'une absorption d'eau. Les observations faites sur des ciments conservés sous l'eau, dès le début de la prise (voir chap. II a), permettent de constater que l'accroissement de volume ne résulte pas d'une dilatation des pores, mais de l'hydratation du ciment. Dès que la température est élevée, cette absorption est accélérée brusquement et les variations des dimensions en sont fortement influencées. Il est donc nécessaire de poursuivre les essais pendant une longue durée et d'attendre après chaque variation de température que le gonflement du corps reprenne la courbe régulière correspondant à la nouvelle température du bain. Lorsque la température est abaissée, le corps se raccourcit sous l'influence de la contraction thermique, tandis que le phénomène inverse de l'absorption constatée lors de l'élévation de la température, soit la restitution de l'eau absorbée, accompagné d'un retrait des dimensions, n'existe pour ainsi dire pas. Lors d'un nouvel échauffement, dans les mêmes limites de température, l'absorption est moindre que lors du premier échauffement. En soumettant ainsi le corps pendant une longue durée à des températures variables maintenues chaque fois plusieurs jours constantes, on arrive à déterminer les deux inconnues cherchées, c'est-à-dire le coefficient de dilatation thermique et le gonflement résultant uniquement de l'absorption d'eau.

Les essais ont été effectués avec des corps de ciment pur et de béton d'un dosage de 200 et 400 kg de ciment par  $m^3$ , de 80 resp. 200 cm de longueur et  $10 \times 12$  cm de section. Les variations de longueur étaient observées au moyen de comparateurs Stoppani au centième de millimètre. Les températures ont varié par étapes dans les limites de 8 à  $60^\circ C$ .

Les observations ont démontré que le ciment Portland étudié avait une dilatation thermique quelque peu supérieure à celle de l'acier. Par contre les bétons de 200 et 400 kg/ $m^3$  confectionnés avec un ballast d'origine granitique ont une dilatation inférieure d'un tiers à celle de l'acier (fig. 1).

On pouvait conclure de ces résultats que le ciment et la pierre ont des coefficients de dilatation différents.

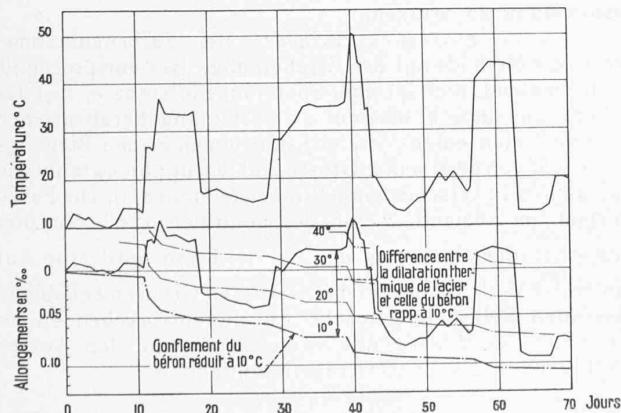


Fig. 1. Déformation linéaire d'une poutre de 2 m de longueur en béton à 400 kg de ciment par  $m^3$  immergée dans l'eau, en fonction de la température et du temps. Les appareils de mesure (comparateurs Stoppani) étant fixés à des tiges d'acier de même longueur que la poutre, on observe la différence entre la dilatation thermique de l'acier et celle du béton. On a déterminé  $\alpha_{Béton} = 0,0000119 - 0,0000037 = 0,0000082 = -2/3 \alpha_{Fer}$ .

Les essais effectués sur une poutre de granit de 2 m de longueur ont, en effet, montré que le coefficient de dilatation du granit n'atteint que la moitié de celui de l'acier ou du ciment. Nous constatons ainsi, au point de vue de la dilatation thermique, une différence de propriétés entre le ciment et la pierre qui a nécessairement pour conséquence l'existence de contraintes internes. Nous arriverons à la même conclusion en examinant d'autres propriétés du béton.

Il y a lieu de remarquer que non seulement le granit, mais aussi une grande partie des pierres d'origine sédimentaire présentent un coefficient de dilatation notablement inférieur à celui du ciment.

*b) Dilatation thermique du ciment dans l'air sec.*

Avant de mesurer la dilatation, il est nécessaire de dessécher complètement le corps et de s'assurer que les phénomènes de retrait sont terminés. Il convient, à cet effet, de placer l'éprouvette sous une cloche dont on chauffe l'air et dans laquelle on a placé également un récipient contenant du chlorure de calcium, par exemple. On s'assure pendant quelques jours qu'une variation de température ne provoque plus aucune déformation permanente du corps lorsque la température est ramenée à celle du début des essais. Dès que ceci est établi, les déformations observées dépendent uniquement de la dilatation thermique. Les mesures ont été effectuées sur des prismes de ciment pur d'une longueur de 16 cm au moyen de tensomètres donnant le millionième de millimètre, et permettant l'évaluation du dixmillionième, les appareils avaient été préalablement étalonnés pour différentes températures. Il ressort des observations que le coefficient de dilatation thermique du ciment en pâte pure, pratiquement complètement desséché, est légèrement inférieur à celui de l'acier.

Nous avons vu plus haut que le ciment saturé d'eau avait un coefficient de dilatation thermique quelque peu supérieur à celui de l'acier. La concordance des résultats des deux essais est donc satisfaisante, d'autant plus qu'il semble probable que la plus grande quantité d'eau contenue dans le ciment saturé (au moins 10% du poids total) doit augmenter la dilatation apparente. (à suivre.)

### Techn. Methoden photoelastischer Forschung.

Von R. V. BAUD, Dipl. Ing., Zürich.

(Schluss von Seite 4.)

#### Ermittlung des Hauptschubspannungsfeldes auf Grund der Gleichung (10).

a) Allgemeines. Gl. (3) und (10) lassen erkennen, dass die durch das zweite Polarisationsprisma durchgelassene Energie  $E$  nur von der ursprünglichen Energie  $E_0$  und von der Phasenverschiebung  $\Phi$ , bezw. von der Spannungsdifferenz  $\sigma_1 - \sigma_2$  abhängt.

Als einfachste Energiequellen kommen Glühlampen in Frage, wie sie etwa bei Lichtbild- und Filmvorführungen verwendet werden. Benutzt wurde vom Verfasser eine Wolfram-Glühlampe, mit der durch Kurve  $a$  (Abb. 10) gegebenen Energieverteilung. Damit man die endgültige Energie  $E$  erhält, muss jede Ordinate  $E_0$  mit dem Wert  $\sin^2 \frac{\Phi}{2}$  multipliziert werden. Diesen erhält man aus Abb. 11, indem man z. B. für  $R = 1,5\mu$  und  $\lambda = 0,55\mu$  die Punkte A und B ermittelt und den Wert  $\sin^2 \frac{\Phi}{2} = 0,56$  unten links abliest.

Auf diese Weise lässt sich für  $R = 1,5\mu$  die endgültige Energie ( $E$  Kurve  $b$  in Abb. 10) ermitteln. Eine solche Energieverteilung stellt nicht mehr „weisses“ Licht dar, sondern eine bestimmte Mischfarbe. Eine genaue Aussage über die Natur der Farbe auf Grund der Kurve  $b$  allein ist jedoch nicht möglich; es muss erst noch eine eingehendere Analyse vorgenommen werden.

Eine solche Untersuchung wurde für Gangdifferenzen von  $R = 0$  bis  $R = 2\mu$  ausgeführt<sup>18)</sup>. In dieser Untersuchung

<sup>18)</sup> Baud und Wright: The Analysis of the Colors Observed in Photoelastic Experiments, „The Journal of the Optical Society of America“, Vol. 20, No. 7, July 1930, p. 381.

ist die Mischfarbe durch Faktoren der drei Grundfarben, Rot  $R$  ( $\lambda = 0,65 \mu$ ), Grün  $G$  ( $\lambda = 0,53 \mu$ ) und Blau  $B$  ( $\lambda = 0,46 \mu$ ) ausgedrückt, und zwar so, dass die Summe dieser Faktoren gleich Eins ist. Es ist deshalb möglich, zwei der Faktoren in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufzutragen, und den Faktor  $K$  der dritten Farbe aus der Beziehung  $K_R + K_G + K_B = 1$  zu berechnen.

Abb. 12 gibt einen Teil der Resultate der erwähnten Untersuchung wieder. Auf der Abszissenaxe ist  $K_R$ , auf der Ordinatenaxe  $K_G$  aufgetragen. Die äussere Kurve  $a$  stellt den geometrischen Ort der Spektralfarben, die innere Schleife  $b$  denjenigen der zu erwartenden Mischfarben dar. Auf der Schleife  $b$  sind die Gangdifferenzen  $R$  in Abständen von  $0,1 \mu$  aufgetragen. Indem man irgend einen Punkt  $R$  auf dieser Schleife mit dem Punkt  $W$ , der „weiss“ darstellt, verbindet, erhält man eine Gerade, die die Kurve  $a$  in Punkt  $S$  schneidet. Dieser Punkt  $S$  deutet dann die Mischfarbe an, und zwar mehr oder wenig weiss oder in der betreffenden Spektralfarbe, je nachdem er sich näher bei  $W$  oder bei  $S$  befindet. Für  $R = 1,5 \mu$  ist  $S = 0,596 \mu$ , sodass dieser Gangdifferenz die Farbe gelblich-orange entspricht, die aber nicht sehr deutlich erscheint, da  $R$  etwa in der Mitte zwischen  $W$  und  $S$  liegt.

Ausser den Farben selbst ist noch die Intensität, die für die Wahrnehmung der Strahlung im Auge in Frage kommt, d. h. die Helligkeit, festzustellen. Die betreffende Verteilung wird für die Lichtquelle aus der Kurve  $a$  in Abb. 10 dadurch gewonnen, dass man die Ordinaten der

Kurve  $a$  mit den Ordinaten der relativen Helligkeit für konstante Energie multipliziert. Abb. 13 stellt das endgültige Resultat der erwähnten Untersuchung in dieser Beziehung dar<sup>13</sup>. Es zeigt sich, dass jeder Gangdifferenz eine bestimmte Helligkeit entspricht, und ferner dass in ziemlich genau gleichen Abständen von  $0,285 \mu$  ein Maximum und Minimum an Helligkeit zu erwarten ist.

Man beobachtet also im projizierten Bild des Modells Linien

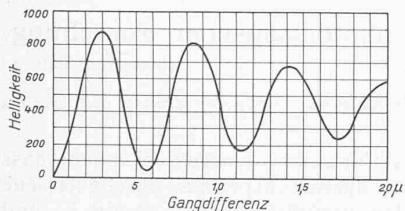


Abb. 13. Helligkeit für Gangdifferenzen von 0 bis  $2 \mu$ .

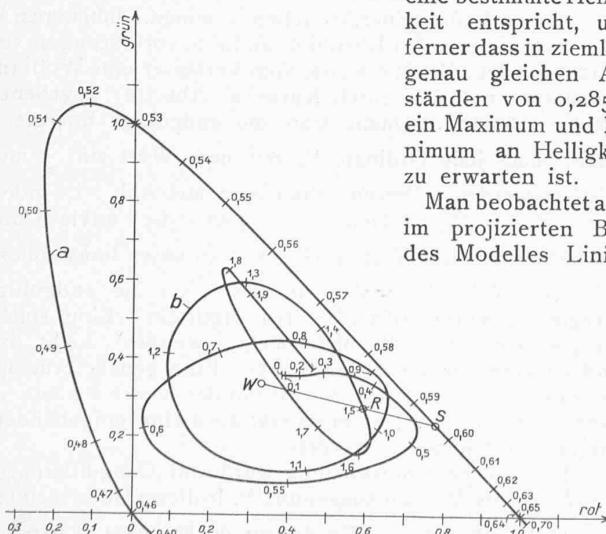


Abb. 12. Farbendiagramm: a) geometrischer Ort der Spektralfarben.  
b) Interferenzfarbschleife für Gangdifferenzen von 0 bis  $2 \mu$ .

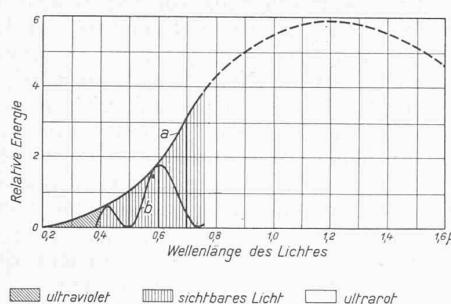


Abb. 10. Energiediagramm einer Wolfram-Glühlampe.  
a) vor dem Durchgang, b) nach dem Durchgang durch das Modell für den Fall  $R = 1,5 \mu$ .

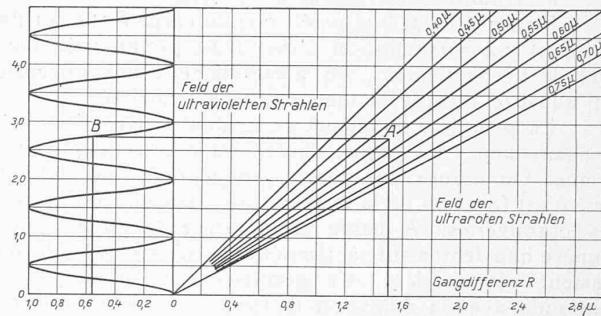


Abb. 11. Diagramm zur Ermittlung der Werte  $\sin^2 \phi/2$ .

gleicher Farbe, sogenannte Isochromaten, die also auch Linien gleicher Helligkeit sind. Es sind dies Linien konstanter Hauptschubspannung. Sie geben ein ungemein anschauliches Bild über die Verteilung dieser für die Technik so wichtigen Spannung.

*b) Messmethoden.* 1. *Methode der empfindlichen Farbe.* Diese Methode beruht auf der Erscheinung, dass bei gewissen Werten von  $R$  eine geringe Änderung derselben einen rapiden Umschlag in der Farbe erzeugt. Für  $R \approx 0,55 \mu$  z. B., beobachtet man purpur. Bei einer kleinen Verringerung von  $R$  zeigt sich die Mischfarbe vorherrschend als rot, bei einer geringen Vergrösserung von  $R$  dagegen als ein deutlich Blau. Das Purpur ist deshalb die „empfindliche Farbe“. Aehnlich verhält es sich bei  $R \approx 1,1 \mu$ . Diese Erscheinung kann wie folgt für Messzwecke verwertet werden.

Man projiziert Modell und Vergleichstreifen aus gleichem Material und gleicher Dicke nebeneinander auf den Schirm und unterwirft den Vergleichstreifen einer Zugkraft von solcher Grösse, dass die empfindliche Farbe erscheint, sodass also, da  $\sigma_{2e} = 0$ ,  $R_e = c \sigma_{1e} t$ , wobei sich  $\sigma_{1e}$  aus der Division von Zugbelastung und Querschnitt ergibt. Für einen beliebigen Messpunkt  $n$  des Modells variiert man ferner die Belastung  $P_n$  des Modells so lange, bis die gleiche Farbe wie im Bilde des Vergleichstreifens erscheint, somit  $R = c(\sigma_1 - \sigma_2)_n t = R_e$ . Aus diesen beiden Gleichungen folgt  $(\sigma_1 - \sigma_2)_n = \sigma_{1e}$ . Da für alle Messpunkte die Spannungsdifferenzen für die gleiche Last, z. B. 100 kg, gewünscht sind, so ist die einfache Umrechnung mittels der Formel  $(\sigma_1 - \sigma_2)_n 100 = \frac{100}{P_n} \sigma_{1e}$  erforderlich.

Dieses Verfahren kann man für irgend eine passende Farbe wiederholen und den Mittelwert für die gefundenen Spannungsdifferenzen nehmen. Kleine Gangdifferenzen können durch Einschalten eines Glimmerplättchens bis auf die empfindliche Gangdifferenz erhöht werden. Zur Erhöhung der Genauigkeit sind die Axen des Vergleichstreifens mit den Hauptspannungsrichtungen des Messpunktes  $n$  in Ueber-einstimmung zu bringen.<sup>14)</sup>

2. *Photographische Methode.* Bei Farbenaufnahmen beruht die Methode auf der Erscheinung, dass entsprechende Isochromaten-Linien gleicher Spannungsdifferenz  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  darstellen. Um diese Erscheinung zur Messung heranzuziehen, unterwirft man einen Vergleichstab einem reinen Biegungsmoment  $M$  von bestimmter Grösse und macht photographische Aufnahmen in verschiedenen Winkelstellungen<sup>14)</sup>. Die Farbe, die man im Abstand  $y$  von der neutralen Axe beobachtet, entspricht der Spannung  $\sigma_v = \frac{M}{I} y$ . Dann wird eine Aufnahme des Modells bei einer in gewissen Grenzen beliebigen, passenden Belastung gemacht. Für die entsprechenden Isochromaten im Modell und Vergleichstab und den korrespondierenden Hauptspannungsrichtungen ist

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_v$$

sodass auf diese Weise die Spannungsdifferenz aller Isochromaten des Modells in einfacher Weise gemessen

<sup>14)</sup> Baud: Contribution to Study of Elliptical Polarization upon Energy Transmission. „The Journal of the Optical Society of America“ Vol. 21, No. 2, February 1931, p. 119.

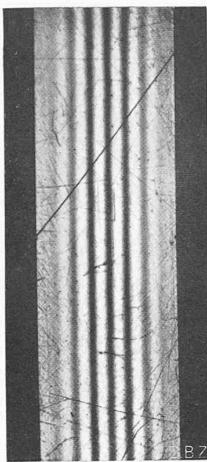


Abb. 14. Hauptschubspannungslinien eines Vergleichstreifens bei reiner Biegung.

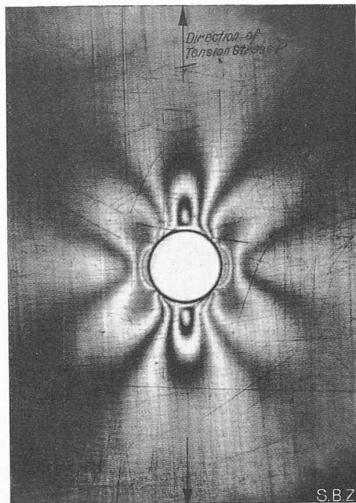


Abb. 15. Hauptschubspannungslinien eines gelochten Zugstabes.

werden kann.<sup>15)</sup> Statt der etwas umständlichen Farbenaufnahmen können die Isochromaten von Hand aufgezeichnet werden, z. B. in der Durchsicht, wie eingangs gedeutet wurde, oder es können gewöhnliche Schwarz-Weiss-Aufnahmen gemacht werden. Bei Schwarz-Weiss-Aufnahmen mit Spezialplatten beruht die photographische Methode auf der Erscheinung, dass Linien gleicher Helligkeit im Bild des Modells und des Vergleichsstreifens, Linien gleicher Spannungsdifferenz darstellen.

3. Kompensationsmethode von Coker. Diese Methode unterscheidet sich dadurch von den beiden ersten, dass der Gangunterschied im Vergleichstab dazu benutzt wird, denjenigen im Modell zu kompensieren, indem man das Licht durch beide nacheinander schickt. Sie unterscheidet sich von der üblichen Kompensationsmethode dadurch, dass man einen Vergleichstreifen von dem selben Material wie das Modell an Stelle eines Kristallkompensators benutzt. Man stellt den Streifen so ein, dass seine Axen mit den Hauptspannungsrichtungen des Messpunktes  $n$  des Modells übereinstimmen, und zwar so, dass die nach Austritt aus dem Modell um  $R_n$  voreilende Schwingung im Streifen um den Betrag  $R_c = R_n$  zum Nacheilen kommt, sodass also die totale Gangdifferenz und somit auch die Energie  $E$  gleich Null ist. Für  $R_n = R_c$  ist  $(\sigma_1 - \sigma_2)_n = \sigma_c$ . Es ist üblich, die Ablesungen aller Messpunkte  $n$  für eine einzige

<sup>15)</sup> Baud: Further Development in Photoelasticity „The Journal of the Optical Society of America“ and „Review of Scientific Instruments“, Vol. 18, No. 5, Mai 1929, p. 422.

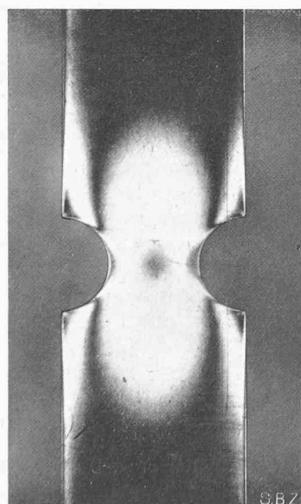


Abb. 17. Stab mit Rundkerbe, links Zug-, rechts Biegungsbeanspruchung.

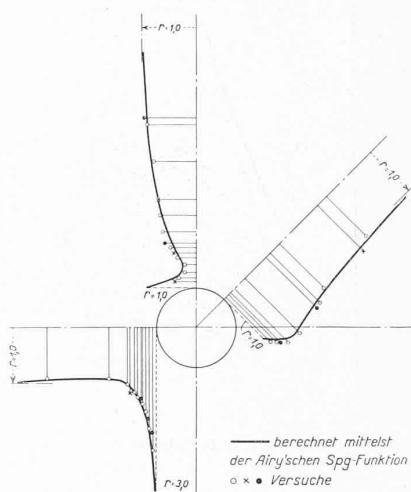


Abb. 16. Werte der Hauptschubspannungen für drei Schnitte des Stabes Abb. 15.

bestimmte Belastung des Modelles zu machen, indem man die Zugspannung  $\sigma_c$  so verändert, dass die Spannungsdifferenz  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  von Messpunkt zu Messpunkt kompensiert wird.

Einige Beispiele für die Hauptschubspannungsfelder. Abb. 14 zeigt einen Vergleichstreifen aus Bakelite, der einem in der Ebene des Streifens wirkenden Biegemoment unterworfen ist.

Mit der photographischen Methode wurde unter anderem der gelochte Zugstab, Abb. 15,

untersucht.<sup>16)</sup> Die Isochromaten einer Farbenaufnahme wurden durchgepaust und mit den entsprechenden Linien, die man für diesen Belastungsfall aus der Airy'schen Spannungsfunktion berechnen kann, verglichen. Dabei fand man vorerst in der Form der Kurven sehr gute Uebereinstimmung. Um das Resultat numerisch zu prüfen, wurden in der Abb. 16 die berechneten Werte

$$r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_0}$$

aufgetragen und durch Kurven verbunden, wobei  $\sigma_0$  die mittlere Zugspannung im ungelochten Teil des Stabes ist. Die Versuchswerte  $r$  sind als Kreise usw., eingezeichnet. Es zeigt sich für die betreffenden Dimensionen also auch numerisch eine gute Uebereinstimmung von Theorie und Experiment.

Abb. 17 links stellt einen gezogenen Stab mit Rundkerbe dar, Abb. 17 rechts den selben Stab auf reine Biegung beansprucht. Abb. 18 zeigt das Hauptschubspannungsfeld eines Turbinenschaufelfusses. Linien gleicher Helligkeit dieser Aufnahme wurden durchgepaust (Abb. 19) und für jede Linie der Wert  $r = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_0}$  berechnet, wobei in diesem Fall  $\sigma_0$  die mittlere Zugspannung im engsten Querschnitt ist.

Die Abb. 20 bis 23 beziehen sich auf Zahnräderuntersuchungen.<sup>17)</sup> Abb. 20 zeigt den Zahn eines treibenden Rades, des kleineren in diesem Falle, in einer mittleren Lage, Abb. 22 den selben Zahn kurz vor Abschluss des Eingriffes. In den entsprechenden Abb. 21 und 23 sind die durchgepausten Linien gleicher Hauptschubspannung zu sehen. Die gegebenen Zahlen sind wiederum als Verhältniswerte aufzufassen und zwar in diesem Fall

$$r = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{p_{\max}}$$

wobei  $p_{\max} = 1,5 \frac{P}{b}$  und  $b$  aus der bekannten Hertz'schen

Formel  $b = 3,04 \sqrt{\frac{P}{E} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$  berechnet wurden.

#### Trennung der Hauptspannungen.

Aus den bisherigen Erörterungen geht hervor, dass die beschriebenen Methoden zur Ermittlung der Richtungen  $\alpha$  und der Differenzen  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  der Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  verhältnismässig einfach sind, und auch bei vielen dynamischen Belastungsarten im allgemeinen kaum unüberwindliche Schwierigkeiten bieten. Etwas umständlicher sind dagegen die Methoden zur Trennung der beiden Haupt-

<sup>16)</sup> Nadai, Baud und Wahl: Stress Distribution and Plastic Flow in Elastic Plate with Circular Hole, „Mechanical Engineering“, Vol. 52, No. 3, March 1930, p. 187.

<sup>17)</sup> Baud: Contact Stresses in Gears, „Mechanical Engineering“, Vol. 53, No. 9, Sept. 1931.

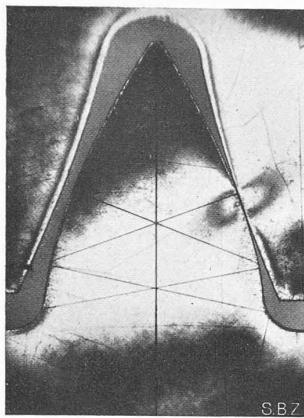


Abb. 20 und 21. Hauptschubspannungslinien im Zahn eines Zahnrades in der Mittellage des Eingriffs.

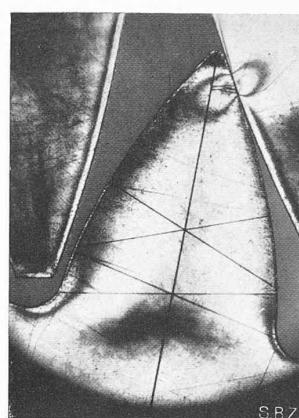
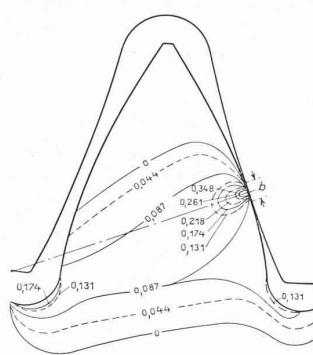
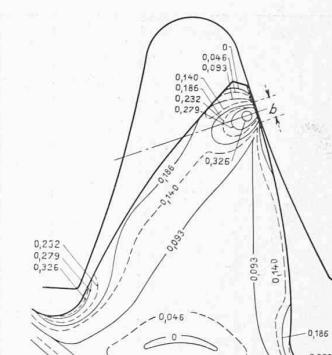


Abb. 22. Hauptschubspannungslinien im Zahn eines Zahnrades kurz vor Vollendung des Eingriffs.



spannungen, die auf der Anwendung der Differentialgleichungen beruhen, die den Gleichgewichtszustand eines Elementes ausdrücken. Man kann sich hierzu verschiedener Koordinatensysteme bedienen, deren Wahl im allgemeinen von der Belastung und den Umrissen des Modells bedingt ist.

In *Polar-Koordinaten*<sup>18)</sup> lauten die Gleichgewichts-Differentialgleichungen für den Fall, dass der Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_p}{r} + \varrho r \omega^2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial r} + 2 \tau_{rp} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

und daraus

$$\sigma_r = \sigma_{r_0} - \int_{r_0}^r \left[ \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial \varphi} + (\sigma_r - \sigma_p) + \varrho r^2 \omega^2 \right] dr \quad \dots \quad (3)$$

$$\sigma_p = \sigma_{p_0} - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( r \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial r} + 2 \tau_{rp} \right) d\varphi \quad \dots \quad (4)$$

oder umgeformt

$$\sigma_r = \frac{r_0}{r} \sigma_{r_0} + \frac{1}{r} \int_{r_0}^r \left( \sigma_p - \frac{\partial \tau_{rp}}{\partial \varphi} - \varrho r^2 \omega^2 \right) dr \quad \dots \quad (5)$$

$$\sigma_p = \sigma_{p_0} - \frac{1}{r} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial r^2 \tau_{rp}}{\partial r} d\varphi \quad \dots \quad (6)$$

In diesen Gleichungen bedeuten  $\varrho = \gamma/g$  die spezifische Masse,  $\sigma_{r_0}$  und  $\sigma_{p_0}$  die Normalspannungen eines Elementes in radialer und tangentialer Richtung, und zwar in einem Punkt, wo diese Größen bekannt sind, etwa am unbelasteten Rand des Modells;  $\sigma_r$  und  $\sigma_p$  bzw.  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (Abb. 23 und 24) sind die gewünschten Normalspannungen in einem Punkt innerhalb des Modells;  $\tau_{rp}$  ist die Schubspannung in radialer und tangentialer Richtung; sie wird mittelst der Gleichung

$$\tau_{rp} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2(\alpha - \varphi) \quad \dots \quad (7)$$

von Punkt zu Punkt bestimmt und als Funktion von  $r$  und  $\varphi$  aufgetragen, ebenso das Produkt  $r^2 \tau_{rp}$ . Die so erhaltenen Kurven werden dazu benutzt, die in den Formeln vorkommenden Differentialquotienten graphisch zu ermitteln. Der Wert für den Ausdruck  $(\sigma_r - \sigma_p)$  im Integral der Gleichung (3) ist ebenfalls experimentell gegeben, und zwar, wie man sich mittelst des Mohr'schen Spannungsdigramms (Abb. 26) überzeugt, durch

$$\sigma_r - \sigma_p = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2(\alpha - \varphi) \quad \dots \quad (8)$$

Bei ungleichförmiger Rotation muss bei der Ableitung der Differentialgleichungen (1) und (2) noch die Tangentialkraft  $\varrho r^2 \omega' dr d\varphi$  berücksichtigt werden, wodurch ein

<sup>18)</sup> Baud: „On the Determination of Principal Stresses from Crossed Nicol Observations“, The Journal of the Franklin Institute, Vol. 211, No. 4, April 1931, p. 457.

weiteres Glied mit  $\varrho r \omega'$  in die Gleichungen eingeführt wird. Für den ruhenden Zustand dagegen vereinfacht sich die Aufgabe, indem das Glied  $\varrho r \omega'^2$  wegfällt. Bei rotierenden kreisrunden Scheiben ohne zusätzliche Belastung ist andererseits

$$\tau_{rp} = 0 \quad \dots \quad (7a)$$

$$\sigma_r - \sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 \quad \dots \quad (8a)$$

wodurch die Integration wesentlich vereinfacht wird.

*Rechtwinklige Koordinaten*. Für eine Bewegung mit der Beschleunigung  $b$  lauten die Gleichgewichts-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \varrho b_x = 0 \quad \dots \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \varrho b_y = 0 \quad \dots \quad (11)$$

und daraus erhält man

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} - \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \varrho b_x \right) dx \quad \dots \quad (12)$$

$$\sigma_y = \sigma_{y_0} - \int_{y_0}^y \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \varrho b_y \right) dy \quad \dots \quad (13)$$

Für ruhende Belastung  $b = 0$  sind die obigen Gleichungen zuerst von Filon und Coker zur Spannungstrennung vorgeschlagen worden.<sup>19)</sup> Sie sind sehr einfach auszuwerten, indem man  $\tau_{xy}$  aus der Gleichung

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad \dots \quad (14)$$

berechnet, die erhaltenen Werte dann als Funktion von  $x$  und  $y$  aufträgt, die Differentialquotienten  $d\tau_{xy}/dy$  und  $d\tau_{xy}/dx$  graphisch ermittelt und diese als Funktion von  $x$  und  $y$  aufträgt. Das Integral ist dann gleich den so erhaltenen Flächen, die schrittweise nach einer der üblichen Methoden zu ermitteln sind.

Bei den bisher behandelten Methoden der Trennung der Hauptspannungen erhält man zuerst die  $\sigma_r$ ,  $\sigma_p$  bzw.  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  Werte; daraus lassen sich  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  analytisch oder graphisch bestimmen. Aus dem Mohrschen Diagramm ist ersichtlich, dass die experimentelle Bestimmung von  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  den Durchmesser des Kreises, nicht aber dessen Koordinatenursprung ergibt. Um diesen festzulegen, genügt ein weiterer Wert, z. B.  $\sigma_x$ . Hat man auch  $\sigma_y$  bestimmt, so erhält man eine Kontrolle, von der noch die Rede sein wird.

Wenn man die *Hauptspannungstrajektorien als Koordinaten* wählt, dann lauten die Gleichgewichts-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_2} + \varrho b_{s_1} = 0 \quad \dots \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial s_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varrho_1} + \varrho b_{s_2} = 0 \quad \dots \quad (16)$$

<sup>19)</sup> Filon and Coker: Experimental Determination of the Distribution of Stress and Strain in Solids, „British Assoc. Report“, 1914.

<sup>20)</sup> Filon: On the Graphical Determination of Stress from Photoelastic Observation, „Engineering“, Oct. 19, 1923, p. 511.

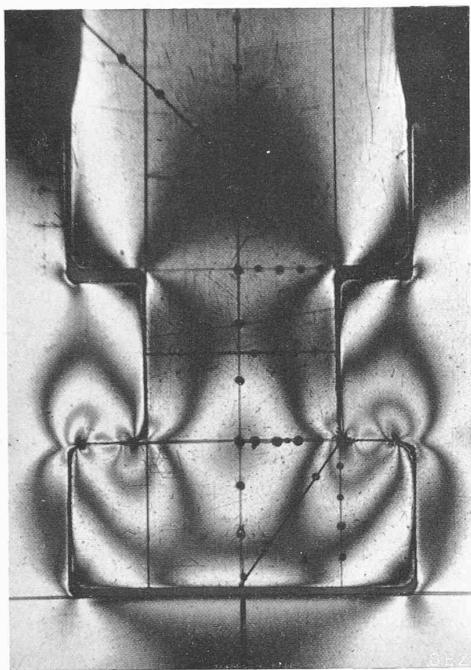


Abb. 18. Hauptschubspannungslinien im Fuss einer Dampfturbinen-Schaufel.

Auf den Originalphotographien sind die Übergänge zwischen „weiss“ und „schwarz“ nicht scharf, sondern stetig, was bei der Clichierung z. T. verloren gegangen ist, weshalb die Abbildungen die photogr. Aufnahmen nicht ganz getreu wiedergeben.

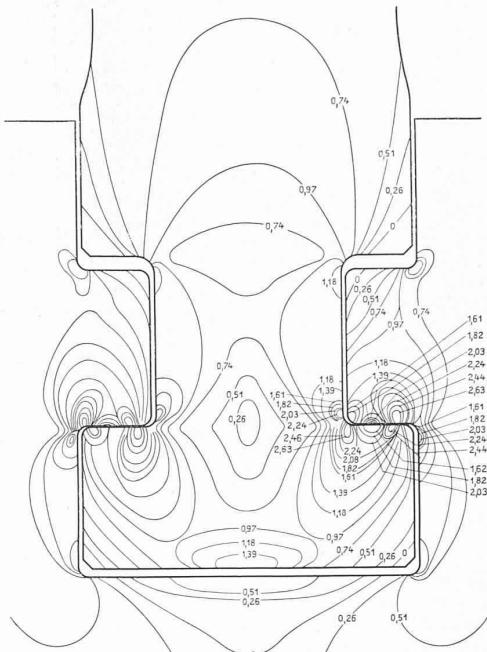


Abb. 19. Hauptschubspannungslinien im Fuss einer Dampfturbinen-Schaufel.

Auf den Originalphotographien sind die Übergänge zwischen „weiss“ und „schwarz“ nicht scharf, sondern stetig, was bei der Clichierung z. T. verloren gegangen ist, weshalb die Abbildungen die photogr. Aufnahmen nicht ganz getreu wiedergeben.

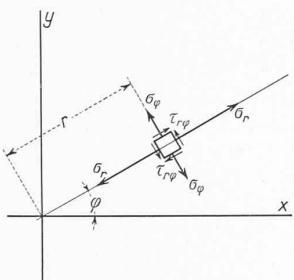


Abb. 24.

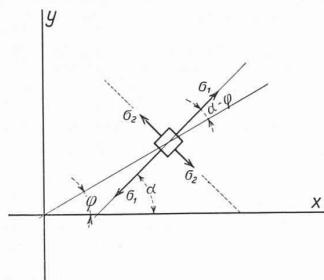


Abb. 25.

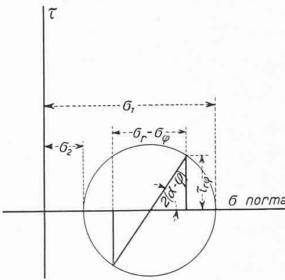


Abb. 26.

und aus diesen erhält man

$$\sigma_1 = \sigma_{10} - \int_{s_0}^{s_1} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1}{\varrho_2} + \varrho b_{s_1} \right] ds_1 \quad . . . \quad (17)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{20} - \int_{s_0}^{s_2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1}{\varrho_1} + \varrho b_{s_2} \right] ds_2 \quad . . . \quad (18)$$

Praktische Vorschläge, wie die Integrale für  $b = 0$  auszuwerten sind, haben Filon<sup>20)</sup> (1923), Föppl<sup>21)</sup> (1928) und der Verfasser<sup>18)</sup> (1931) gemacht. Föppl schlägt die

alternative Benutzung der Hauptschubspannungs-Trajektorien als Koordinaten vor. Ein Nachteil der krummlinigen Koordinaten-Integration besteht darin, dass man die Spannungen entlang gekrümmten Linien bekommt, während es für Zwecke der Kontrolle und Anwendung viel vorteilhafter ist, die Spannungsverteilungen zum vornherein in geraden Schnitten, bezw. Kreisschnitten zu erhalten.

Für alle drei angegebenen Methoden der Trennung der Hauptspannungen auf Grund der Differential-Gleichungen ist eine Kontrolle dadurch möglich, dass die Differenzen  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  nach der Trennung gleich den experimentellen  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  Differenzen sein müssen. Falls man auf diese Kontrolle verzichtet, wird die für die Integration notwendige Zeit ganz erheblich gekürzt, da dann  $\sigma_2 = \sigma_1 - (\sigma_1 - \sigma_2)$ .

Bezüglich der Integrationskonstanten ist zu bemerken, dass diese in all denjenigen Fällen gleich Null sind, bei denen der Weg der Integration senkrecht zum Rand einmündet; vorausgesetzt ist dabei, dass der betreffende Randpunkt unbelastet ist.

*Beispiele einiger Integriertionen.* Birnbaum<sup>22)</sup> (1924)

hat bei der Untersuchung von T-Stücken die graphische Methode zur Trennung der beiden Hauptspannungen angewandt. Filon<sup>20)</sup> (1923) hat sie benutzt, um die Spannungen getrennt bei einer diametral durch zwei Druckkräfte belasteten Scheibe zu ermitteln.

In Amerika und Japan hat sich die Integration besonders stark eingebürgert, und es sind dort eine beträchtliche

<sup>21)</sup> Föppl: Siehe Fußnote 7, Seite 1.

<sup>22)</sup> Birnbaum: Optische Untersuchung des Spannungszustandes in Maschinenteilen, „Zeitschrift für techn. Physik“, Vol. 5, Nr. 4, 1924.



Abb. 37. Augenoperationsraum der „Privatklinik Hirslanden“.

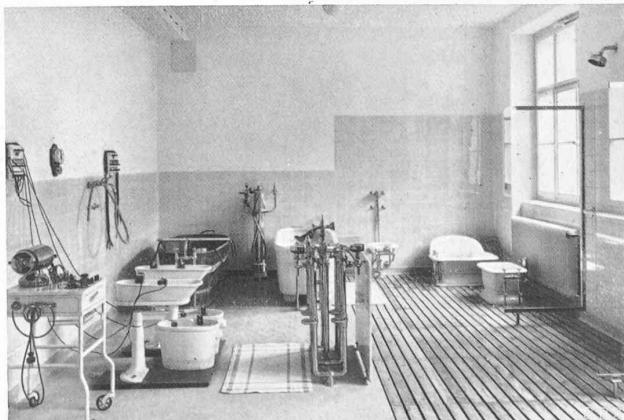


Abb. 38. Hydrotherapie-Abteilung der „Privatklinik Hirslanden“.



Abb. 15. Krankenzimmer, Südecke (zweiseitig beleuchtet).



Abb. 16. Treppe einer Krankenabteilung.

Anzahl von Problemen auf diese Weise gelöst worden, so z. B. Kettenglieder von Hitoshi Yasnoka<sup>23)</sup> (1927), Rahmen ecken von Tuzi<sup>24)</sup> (1927), Augbolzen von Frost und Richards<sup>25)</sup> (1925), und Polbefestigungen vom Verfasser.<sup>26)</sup>

*Anmerkung.* Die Abbildungen zu diesem Artikel stammen grösstenteils aus Untersuchungen, die der Verfasser in den Forschungslaboratorien der Westinghouse El. and Mfg. Co. in East Pittsburgh, U. S. A., ausgeführt hat.

### Die „Privatklinik Hirslanden“ in Zürich.

Architekt HERMANN WEIDELI, Zürich. (Schluss von Seite 8.)

Ueber die Krankenzimmer, Wohn- und Wirtschaftsräume geben die hier beigefügten Bilder Aufschluss; von den 32 Schwesterzimmern, alles freundliche Einzelzimmer (Abb. 21), liegen sieben in den Krankenabteilungen, die übrigen im I. und II. Stock des Verwaltungstraktes (Abb. 23,

<sup>23)</sup> Hitoshi Yasnoka: On Photoelastic Investigation for the Distribution of Stress in a Chain Link, „Electrotechnical Laboratory, Ministry of Communication“, Tokyo, Oct. 1927.

<sup>24)</sup> Tuzi: „A new Material for the Study of Photoelasticity, „Scientific Paper of the Inst. of Phys. and Chem. Research“, Tokyo, No. 112, Oct. 1927.

<sup>25)</sup> Frost and Richards: Eyebolt Stresses as Determined by Photoelastic Tests, „Journal of the Society of Automotive Engineers“, August 1925.

<sup>26)</sup> Dissertation E. T. H. Zürich, eingereicht 1932.

unten rechts). Das übrige Personal ist in 28 Betten, teils in acht Zweierzimmern im Operationstrakt, teils in 14 Einzelzimmern im Dienstgebäude untergebracht. Das Schwester-Esszimmer (Abb. 20) im Erdgeschoss kann durch eine Faltwand mit dem Lese- und Konferenzzimmer vereinigt werden.

Bemerkenswert sind die horizontal dreiteiligen Schiebefenster mit Spiegelverglasung der Krankenzimmer. Wie aus Abb. 22 ersichtlich, können die drei breiten Flügel aneinander vorbeigeschoben werden, so, dass alle drei in die Mitte, nach unten oder nach oben geschoben und dementsprechend die Fensteröffnung freigelegt werden kann; natürlich kann man hierdurch in beliebiger Höhe auch nur schmale Lüftungsschlitzte herstellen. Die Fensterfläche der Krankenzimmer beträgt 30 bis 45% der Bodenfläche.

Um mit den Betten ohne Erschütterung aus den Zimmern über die Korridore fahren zu können, sind Türschwellen vermieden worden. Dabei wird aber der unerwünschte Türspalt durch eine sinnreiche Konstruktion der Fenster- und Türenfabrik E. Göhner (Zürich 8), der Lieferantin auch der eben erwähnten Schiebefenster, vermieden. In der schmalen Untersicht des Türflügels ist eine Nut ausgefräst, in der ein metallgefasster Filzstreifen derart federnd eingelegt ist, dass er erst im Moment des Türschliessens aus seiner normalen Hochlage auf den Fußboden niedergedrückt wird und einen dichten Abschluss



Abb. 19. Esszimmer für das Personal.



Abb. 20. Esszimmer der Krankenschwestern, Faltwand geöffnet.