Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 99/100 (1932)

Heft: 11

Artikel: Statische Untersuchung quadratischer, allseitig elastisch eingespannter Platten

Autor: Ritter, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45463

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Statische Untersuchung quadratischer, allseitig elastisch eingespannter Platten. — Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. — Wettbewerb für ein Kinderhaus der Bündner Heilstätte in Arosa. — Zulässige Zugspannungen in Nieten. — Wettbewerb für ein Spital und Asyl in Menton an der französischen Riviera. — Mitteilungen: Hochdrucklokomotive der P. L. M. Ein Strassen- und Schienenautomobil. Der poröse Leichtbeton „Schima". Elektrische Ausrüstung der Ford-Fabrik, Köln. Eidg. Technische Hochschule. Neuer Dieseltriebwagen Bauart „S. L. M. Winterthur". Basler Rheinhafenverkehr. Ein interessanter Transport von vier Autobus-Chassis. Spitalbauten. Deutscher Betonverein. Internat. Automobil- und Fahrrad-Ausstellung in Genf. — Nekrologe: Dr. Jul. Weber. Harold Zangger. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 99 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 11

Statische Untersuchung quadratischer, allseitig elastisch eingespannter Platten.

Von Prof. Dr. M. RITTER, Zürich.

Die rechteckige, auf allen Seiten gestützte, kreuzweise armierte Platte bildet im Eisenbetonbau ein wichtiges Konstruktionselement. Ihre statische Berechnung erfolgt in der Praxis heute noch meist nach der sogenannten „Streifenmethode", die sich vermöge ihrer Einfachheit eingebürgert hat und in zahlreichen Eisenbetonvorschriften empfohlen wird. Indessen ist bekannt, dass die Streifenmethode lediglich ein rohes Näherungsverfahren darstellt und ihrer Natur nach nicht im Stande ist, das statische Verhalten einer allseitig gelagerten, auf räumliche Biegung beanspruchten Platte richtig wiederzugeben. Hierzu dient vielmehr die klassische Elastizitätstheorie der ebenen Platten, wie sie vor mehr als hundert Jahren durch *Lagrange & Navier* begründet und später durch zahlreiche Forscher weiter ausgebaut wurde.

Die Anwendung der Plattentheorie im Eisenbetonbau erfordert vor allem die zutreffende Berücksichtigung der vorhandenen Auflagerung der Platte, da die Gestalt der elastischen Fläche und die Biegungsmomente in hohem Masse von den „Randbedingungen" der Platte abhängen. In dieser Hinsicht befriedigen die klassischen Lösungen der Plattentheorie den Eisenbetoningenieur nicht, denn sie beschränken sich auf die Fälle der freien Auflagerung und der vollständigen Einspannung der Plattenränder, also auf Sonderfälle, die im Eisenbetonbau selten vorkommen. Hier liegt meist der allgemeinere Fall der „teilweisen" oder „elastischen" Einspannung vor, sei es, dass die Platte in nachgiebige Mauern eingespannt ist, oder dass sie an den Rändern in monolytischer Bauweise in elastische Tragwerke (Randträger, Nebenfelder bei durchlaufenden Platten) übergreift. Die analytische Behandlung der Platte mit elastischer Einspannung bietet wesentliche Schwierigkeiten, da die von Navier angegebene Integrationsmethode hier versagt. Es bestand bisher die Möglichkeit, mit Hilfe der Differenzenrechnung die elastische Fläche unter Berücksichtigung eines beliebigen Einspannungsgrades näherungsweise darzustellen. Die Literatur enthält Berechnungen dieser Art (*Nielsen, Markus* u. a.), doch ist dieses Vorgehen umständlich und gestattet nicht ohne weiteres, den wichtigen Zusammenhang zwischen dem Einspannungsgrad und den Biegungsmomenten zu erkennen.

Im folgenden wird die Berechnung der allseitig elastisch eingespannten Platte für gleichförmig verteilte Belastung vorgeführt. Die Lösung ergibt sich in einfacher Weise, indem die elastische Fläche durch Potenzfunktionen dargestellt wird, die den Randbedingungen der Platte genügen. Streng genommen führt dieser Ansatz zwar zu einer Näherungslösung, da die zugehörige Belastung nicht gleichmässig, sondern in Form eines Hügels über die Platte verteilt ist. Indessen lässt sich durch passende Wahl von Koeffizienten erreichen, dass der Belastungshügel plateauartige Gestalt annimmt und dann die gleichen Biegungsmomente erzeugt, wie die konstante, spezifische Belastung. Der Einfachheit halber bleibt nachstehend die Untersuchung auf die quadratische Platte mit gleichem Einspannungsgrad aller Randpunkte beschränkt; der eingeschlagene Weg soll später zur Behandlung schwierigerer Aufgaben weiter beschritten werden.

1. *Einführung. Der elastisch eingespannte Balken.*

Wir beginnen mit einer kurzen Erläuterung der Theorie des elastisch eingespannten, gleichmässig belasteten Balkens, da die Grundlagen dieser Theorie auch zur Untersuchung der Platte benötigt werden. Bei konstanter Biegungssteifigkeit EJ folgen die Einsenkungen z der Stabaxe nach den Lehren der Baustatik bekanntlich der Differentialgleichung

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = \frac{p}{EJ}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

in der p die Belastung pro Längeneinheit bezeichnet. Durch viermalige Integration ergibt sich daraus die Gleichung der elastischen Linie als Potenzkurve vierter Ordnung. Wenn die Einspannungsgrade beider Auflager gleich gross sind, so ist die elastische Linie symmetrisch zur Mitte.

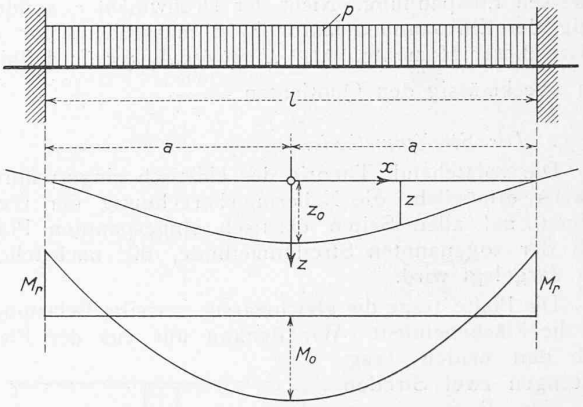

Abb. 1.

Bezieht man die Gleichung auf das in Abb. 1 angegebene Koordinatensystem, so fallen der Symmetrie wegen die Glieder mit ungeraden Potenzen weg, und die Gleichung lässt sich in der Form schreiben

$$z = z_0 \left(1 + c_1 \frac{x^2}{a^2} + c_2 \frac{x^4}{a^4}\right), \quad \ldots \quad (2)$$

wo z_0 die Einsenkung in Balkenmitte und a die halbe Stützweite bedeutet. Die Momentenfläche sieht wie in Abb. 1 skizziert aus; das Moment an der Stelle x berechnet sich nach bekannter Formel zu

$$M = -EJ \frac{d^2 z}{dx^2} = -EJ \frac{2 z_0}{a^2}\left(c_1 + 6 c_2 \frac{x^2}{a^2}\right).$$

In Balkenmitte entsteht das grösste positive Moment, das sogenannte *Feldmoment*

$$M_0 = -EJ \frac{2 z_0}{a^2} c_1;$$

an den Auflagern entstehen die negativen Einspannmomente oder *Randmomente*

$$M_r = -EJ \frac{2 z_0}{a^2}(c_1 + 6 c_2).$$

Die beiden Integrationskonstanten c_1 und c_2 ergeben sich aus den Auflager- oder Randbedingungen. An den Auflagern ist die Einsenkung $z = 0$, daher

$$1 + c_1 + c_2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Die elastische Einspannung der Trägerenden ist dadurch gekennzeichnet, dass an den Auflagern die Neigung der elastischen Linie proportional ist dem Einspannmoment, also

$$\frac{dz}{dx} = \varepsilon M_r = -\varepsilon EJ \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \ldots \quad (4)$$

worin ε die Drehung der Einspannquerschnitte infolge „$M_r = 1$" bezeichnet. Mit Hilfe von Gl. (2) erhält man aus dieser Beziehung

$$\frac{2 z_0}{a}(c_1 + 2 c_2) = -\varepsilon EJ \frac{2 z_0}{a^2}(c_1 + 6 c_2)$$

oder

$$c_1 (1 + k) + 2 c_2 (1 + 3 k) = 0, \quad \ldots \quad (5)$$

indem zur Abkürzung

$$k = \frac{\varepsilon E J}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

gesetzt wird. Die Grösse k heisst „Einspannungsfaktor". Die Auflösung der Gl. (3) und (5) liefert die Integrationskonstanten zu

$$c_1 = -\frac{2(1+3k)}{1+5k}, \qquad c_2 = \frac{1+k}{1+5k}.$$

Die Einsenkung z_0 in Balkenmitte findet man, indem man Gl. (2) viermal differentiert und in Gl. (1) einsetzt. Führt man noch die Stützweite $l = 2a$ ein, so ergibt sich

$$z_0 = \frac{p\,l^4}{384\,c_2\,EJ} = \frac{p\,l^4}{384\,EJ}\,\frac{1+5k}{1+k} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man die Ausdrücke für z_0, c_1 und c_2 in die Formeln für das Feldmoment und die Einspannmomente ein, so folgt

$$M_0 = \frac{p\,l^2}{24}\,\frac{1+3k}{1+k}, \qquad M_r = -\frac{p\,l^2}{12}\,\frac{1}{1+k} \quad . \quad (8)$$

Mit $k = 0$ und $k = \infty$ erhält man daraus die bekannten Sonderwerte für vollständige Einspannung bezw. freie Auflagerung; dazwischen liegen alle möglichen Fälle der teilweisen Einspannung. Nicht der Drehwinkel ε, sondern einzig der Einspannungsfaktor k ist massgebend für die Grösse dieser Momente. Als „*Einspannungsgrad*" definiert man zweckmässig den Quotienten $\frac{1}{1+k}$.

2. Die Streifenmethode.

Die vorstehende Theorie des elastisch eingespannten Balkens ermöglicht die Näherungsberechnung der rechteckigen, auf allen Seiten elastisch eingespannten Platte nach der sogenannten Streifenmethode, die nachstehend kurz dargelegt wird.

Die Platte trage die gleichmässig verteilte Belastung p auf die Flächeneinheit. Wir denken uns aus der Platte nach den beiden Tragrichtungen zwei Streifen von der Breite $b = 1$ herausgeschnitten, die sich an der Stelle der grössten Einsenkung kreuzen, (vergl. Abb. 2). Die Belastung p zerfällt dann in den Anteil p_1, der durch den einen Streifen in der Richtung l_1 nach den Auflagern übertragen wird und in den Anteil p_2, der durch den andern Streifen in die Richtung l_2 übergeht. Es ist $p = p_1 + p_2$. Zur Bestimmung dieser Lastanteile dient die Bedingung, dass die beiden Streifen an der Kreuzungsstelle dieselbe Einsenkung haben. Setzt man voraus, dass sich die Streifen wie selbständige, elastisch eingespannte Balken durchbiegen, so berechnet sich die gemeinsame Einsenkung nach Gl. (7) zu

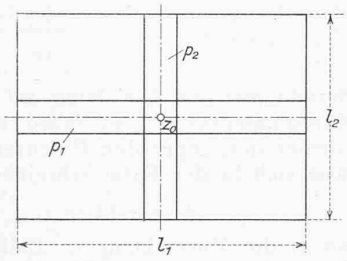

Abb. 2.

$$z_0 = \frac{p_1\,l_1^4}{384\,EJ}\,\frac{1+5k_1}{1+k_1} = \frac{p_2\,l_2^4}{384\,EJ}\,\frac{1+5k_2}{1+k_2},$$

wobei k_1 und k_2 die Einspannungsfaktoren der beiden Streifen sind. Mit den Abkürzungen

$$v_1 = \frac{1+5k_1}{1+k_1} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1+5k_2}{1+k_2}$$

folgt aus obiger Beziehung

$$p_1 = p\,\frac{v_2\,l_2^4}{v_1\,l_1^4 + v_2\,l_2^4}, \qquad p_2 = p\,\frac{v_1\,l_1^4}{v_1\,l_1^4 + v_2\,l_2^4}.$$

Werden diese Lastanteile in die Gleichungen (8) eingesetzt, so lassen sich die Feldmomente und die Randmomente beider Streifen leicht berechnen. Für $v_1\,l_1^4 = v_2\,l_2^4$ wird $p_1 = p_2 = 1/2\,p$. Das trifft bei der quadratischen Platte zu, wenn $k_1 = k_2$; doch ist die Methode keineswegs auf diesen Sonderfall beschränkt.

Die Streifenmethode liefert aus mehreren Gründen unrichtige Ergebnisse. Einmal sind die Lastanteile p_1 und p_2 von Punkt zu Punkt verschieden. Auch verhalten sich die beiden Streifen nicht wie selbständige Balken, sondern es treten an den lotrechten Seitenflächen wagrechte Schubspannungen auf. Schliesslich lässt die Methode den Einfluss der Querdehnung ausser acht. Der grosse Vorzug der Streifenmethode besteht darin, dass sie in einfachster Weise die Platte mit beliebigen Einspannungsfaktoren k_1 und k_2 bewältigt und daher ganz besonders für durchlaufende Platten geeignet ist. Für die Berechnungen in der Praxis erscheint es deshalb wohl am Platze, die Streifenmethode beizubehalten, jedoch lediglich im Sinne einer empirischen Regel und nach Berichtigung durch den Vergleich mit der genauern Plattentheorie.

3. Grundlagen der Plattentheorie.

Eine eingehende Darlegung der Theorie elastischer Platten überschreitet den Rahmen der vorliegenden Arbeit; wir beschränken uns hier auf eine gedrängte Zusammenstellung der Grundlagen, soweit sie für die folgenden Berechnungen benötigt werden und verweisen für nähere Aufschlüsse auf die vorhandene, reichhaltige Literatur.[1])

Die klassische Plattentheorie bezieht sich auf die homogene, ebene Platte, deren Material dem Hooke'schen Gesetze folgt. Bezeichnet man mit z die Einsenkung der Mittelfläche an irgend einer Stelle mit den rechtwinkligen Grundrisskoordinaten x und y, so gelten unter den Annahmen von Navier für die Krümmungen der elastischen Fläche die bekannten Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{EJ}\left(M_1 - \frac{M_2}{m}\right) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{EJ}\left(M_2 - \frac{M_1}{m}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

worin M_1 und M_2 die Biegungsmomente sind, die in den Richtungen der Koordinaten auf die Einheit der Breite wirken. J ist das Trägheitsmoment des Querschnittes auf die Einheit der Breite; EJ heisst die Biegungssteifigkeit

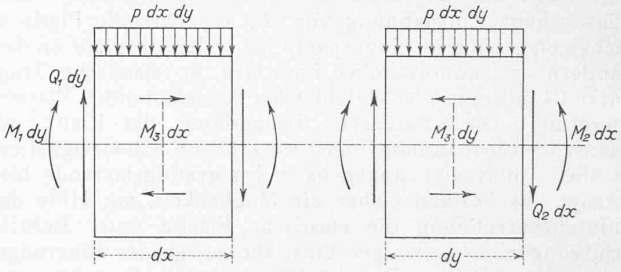

Abb. 3.

der Platte. Durch die Poissonzahl m kommt der Einfluss der Querdehnung auf die Krümmungen zum Ausdruck. Aus den Gleichungen (9) berechnen sich die *Biegungsmomente* zu

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -\frac{EJ}{1-\frac{1}{m^2}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\ M_2 &= -\frac{EJ}{1-\frac{1}{m^2}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Eine einfache Betrachtung liefert auch noch einen Ausdruck für die sogenannte Verdrillung der Querschnitte, die durch die wagrechten Schubspannungen zustande kommt, die in den lotrechten Schnitten wirken und auf die Einheit der Breite das Drillungsmoment

$$M_3 = -\frac{EJ}{1+\frac{1}{m}}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

liefern. Denkt man sich weiter nach Abb. 3 ein Plattenelement vom Grundrisse $dx\,dy$ abgegrenzt, so folgt aus den drei Gleichgewichtsbedingungen die sogenannte *Grundgleichung der Plattentheorie.*

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 M_3}{\partial x\,\partial y} = -p,$$

wo p die im allgemeinen veränderliche spezifische Belastung

[1]) Vergl. die Lehrbücher von Föppl, Lorenz, Love, Mesnager, Nadai, Pigeaud u. a.

der Platte darstellt. Setzt man darin für die Momente die Ausdrücke (10) und (11) ein, so erhält man die Differentialgleichung der elastischen Fläche, die aber nur im Falle einer konstanten Biegungssteifigkeit einfache Gestalt annimmt, nämlich die Form von *Lagrange*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{p}{EJ}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \quad . \quad . \quad (12)$$

Durch Integration mit Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt sich daraus die Gestalt der elastischen Fläche, aus der schliesslich die Momente und Querkräfte an jeder Stelle der Platte leicht zu berechnen sind.

Navier hat bereits im Jahr 1821 die Integration der Differentialgleichung von Lagrange für die rechteckige, gleichmässig belastete Platte mit Hilfe einer zweidimensionalen Fourier'schen Reihe durchgeführt. Da die Funktionen $\sin c\,x$ und $\cos c\,x$ die Eigenschaft besitzen, dass ihre zweiten Ableitungen bis auf einen Faktor mit den Funktionen selbst übereinstimmen, so gelten an den Plattenrändern ausser der Bedingung $z = 0$ auch noch die Beziehungen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ bezw. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, d. h. die Navier'sche Lösung bezieht sich ausschliesslich auf die allseitig frei aufliegende Platte. Die elastische Fläche der eingespannten, rechteckigen Platte ist deshalb nicht durch trigonometrische Doppelreihen darstellbar, bei denen jedes Glied die Randbedingungen erfüllt. Die Aufgabe der allseitig eingespannten Platte bietet durch diesen Umstand wesentliche Schwierigkeiten und wurde erst in neuerer Zeit in mehreren theoretischen Arbeiten behandelt. Zu einer geeigneten Grundlösung, die die Differentialgleichung von Lagrange, jedoch nicht alle Randbedingungen befriedigt, wurden in Reihenform darstellbare Zusatzlösungen hinzugefügt, die der Differentialgleichung für $p = 0$ genügen und die geforderten Randbedingungen herstellen.[1])

4. Anwendung auf die quadratische Platte.

Die erwähnte, exakte Integration liefert leider im Falle der allseitig elastisch eingespannten Platte eine komplizierte, wenig übersichtliche Lösung, die den praktisch so wichtigen Einfluss des Einspannungsgrades der Ränder nicht in genügend einfacher Weise zum Ausdruck bringt. Zur Berechnung der quadratischen Platte ziehen wir deshalb — in Anlehnung an eine wertvolle Bemerkung von *A. Föppl*[2]) — eine angenäherte Lösung der Aufgabe vor, indem wir die elastische Fläche durch Potenzfunktionen darstellen, die die Randbedingungen streng erfüllen. Die Differentialgleichung (12) ergibt hierfür eine veränderliche, spezifische Belastung $p = f(x, y)$, an die wir die Forderung stellen, dass sie im mittlern Bereich der Platte nur ganz unbedeutend variieren darf.

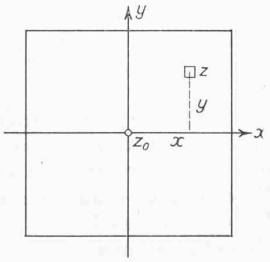

Abb. 4.

Mit Bezug auf das in Abb. 4 angegebene Koordinatensystem und Beachtung der Symmetrie-Verhältnisse lässt sich die Einsenkung z der elastischen Fläche durch den Ansatz darstellen

$$z = z_0\left(1 + c_1\frac{x^2}{a^2} + c_2\frac{x^4}{a^4} + c_3\frac{x^6}{a^6}\right)\left(1 + c_1\frac{y^2}{a^2} + c_2\frac{y^4}{a^4} + c_3\frac{y^6}{a^6}\right), \quad (13)$$

worin z_0 die Einsenkung in Plattenmitte ist und c_1, c_2, c_3 Koeffizienten darstellen, die vor allem den Randbedingungen genügen müssen. a bedeutet die halbe Stützweite der Platte.

Am Rande ist $z = 0$, somit

$$1 + c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die elastische Einspannung der Plattenränder wird in gleicher Weise definiert, wie beim elastisch eingespannten Balken, nur ist in Gl. (4) für das Einspannmoment der entsprechende Ausdruck der Plattentheorie, aus Gl. (10), einzusetzen. Für die Plattenränder parallel der y-Axe gilt darnach die Beziehung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varepsilon M_r = -\frac{\varepsilon EJ}{1 - \frac{1}{m^2}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \quad . \quad . \quad (15)$$

wo ε die Neigung der elastischen Fläche, bezw. die Drehung der Einspannstelle infolge $M_r = 1$ bezeichnet. Wir beschränken die Betrachtung auf den Fall, dass ε längs den Auflagerbahnen konstant ist. Der Ansatz (13) liefert für $x = \pm a$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 z_0}{a}(c_1 + 2 c_2 + 3 c_3)\left(1 + c_1\frac{y^2}{a^2} + c_2\frac{y^4}{a^4} + c_3\frac{y^6}{a^6}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 z_0}{a^2}(c_1 + 6 c_2 + 15 c_3)\left(1 + c_1\frac{y^2}{a^2} + c_2\frac{y^4}{a^4} + c_3\frac{y^6}{a^6}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Mit Einführung des „Einspannungsfaktors" (analog Gl. 6)

$$k = \frac{\varepsilon EJ}{a\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

geht Gl. (15) über in

$$c_1(1 + k) + 2 c_2(1 + 3 k) + 3 c_3(1 + 5 k) = 0 \quad . \quad (17)$$

Die Beziehungen (14) und (17) gestatten, die Koeffizienten c_2 und c_3 durch c_1 wie folgt auszudrücken:

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= -\frac{3(1 + 5 k) + 2 c_1(1 + 7 k)}{1 + 9 k}, \\ c_3 &= \frac{2(1 + 3 k) + c_1(1 + 5 k)}{1 + 9 k}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Es liegt nahe, zur Bestimmung des Koeffizienten c_1 die Forderung aufzustellen, dass der Mittelwert der Belastung p längs der Koordinatenaxen dem Wert p_0 in der Plattenmitte gleich sein soll, also

$$\int_0^a p\,dx = p_0\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Die Erfüllung dieser Beziehung hat zur Folge, dass die Belastung im mittlern Bezirk der Platte wenig veränderlich ist und nur gegen die Ränder stärker abweicht, dass also der Belastungshügel zu einem Plateau wird. Man könnte auch daran denken, den Mittelwert der gesamten Belastung gleich p_0 zu setzen, jedoch ist dann, wie man leicht erkennt, die Gestalt des Belastungshügels nicht so günstig. Um die Beziehung (19) auszuwerten, berechnen wir die Belastung p als Funktion der Koordinaten, indem wir den Ansatz (13) in die Differentialgleichung (12) einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{p}{EJ}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{24 z_0}{a^4}\Bigg[&\left(c_2 + 15 c_3\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 + c_1\frac{y^2}{a^2} + c_2\frac{y^4}{a^4} + c_3\frac{y^6}{a^6}\right) \\ &+ \left(c_2 + 15 c_3\frac{y^2}{a^2}\right)\left(1 + c_1\frac{x^2}{a^2} + c_2\frac{x^4}{a^4} + c_3\frac{x^6}{a^6}\right) \\ &+ \frac{1}{3}\left(c_1 + 6 c_2\frac{x^2}{a^2} + 15 c_3\frac{x^4}{a^4}\right)\left(c_1 + 6 c_2\frac{y^2}{a^2} + 15 c_3\frac{y^4}{a^4}\right)\Bigg]. \end{aligned} \quad (20)$$

Auf die Plattenmitte ($x = y = 0$) angewandt, ergibt sich hieraus die grösste Einsenkung der Platte zu

$$z_0 = \frac{p_0\,a^4\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{8\,EJ(c_1^2 + 6 c_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Längs der x-Axe ($y = 0$) beträgt die Belastung, wenn für z_0 der Ausdruck (21) eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} p = \frac{p_0}{c_1^2 + 6 c_2}\Bigg[&c_1^2 + 6 c_2 + 9(c_1 c_2 + 5 c_3)\frac{x^2}{a^2} \\ &+ 3(5 c_1 c_3 + c_2^2)\frac{x^4}{a^4} + 3 c_2 c_3\frac{x^6}{a^6}\Bigg]. \end{aligned}$$

Die Integration längs der x-Axe liefert

$$\int_0^a p\,dx = p_0\,a\left(1 + 3\,\frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 + \frac{c_2^2}{5} + \frac{c_2 c_3}{7} + 5 c_3}{c_1^2 + 6 c_2}\right)$$

Die Bedingung (19) wird erfüllt für

$$c_1(c_2 + c_3) + \frac{c_2^2}{5} + \frac{c_2 c_3}{7} + 5 c_3 = 0.$$

Setzt man hier für c_2 und c_3 die Ausdrücke (18) ein, so findet man schliesslich für c_1 die folgende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} c_1^2(1813 k^2 + 358 k + 17) - 3 c_1(2395 k^2 + 826 k + 63) \\ - (10\,575 k^2 + 4590 k + 383) = 0. \quad . \quad . \quad (22) \end{aligned}$$

Im statischen Institut der E. T. H. wurde die numerische Berechnung der Werte c_1, c_2, c_3 für verschiedene

[1]) Vergl. *A. Nadai:* „Die elastischen Platten", Seite 180 ff.

[2]) Vergl. *A. Föppl:* „Vorlesungen über technische Mechanik", 5. Band, 1907, Seite 109 (unten).

Einspannungsfaktoren k mit Hilfe einer Rechenmaschine durchgeführt. Die nachstehende Tab. 1 enthält einen Auszug.

Tabelle 1: Koeffizienten nach Gl. (22).

k	c_1	c_2	c_3	c_0	c_r
0	— 1,751	0,502	0,249	55,5	19,4
1/4	— 1,400	0,292	0,108	42,4	30,2
1/3	— 1,359	0,265	0,094	40,5	33,5
1/2	— 1,307	0,229	0,078	37,7	40,0
2/3	— 1,275	0,207	0,068	36,0	46,5
1	— 1,238	0,181	0,057	33,8	59,4
2	— 1,194	0,149	0,045	31,1	97,7
∞	— 1,142	0,111	0,032	27,6	∞

5. Berechnung der Biegungsmomente.

Mit Hilfe der Gleichung (10) lassen sich die Biegungsmomente M_1 und M_2 in Richtung der Koordinatenaxen und damit auch in jeder andern Richtung an irgend einer Stelle der Platte berechnen. Von besonderer Wichtigkeit für die Dimensionierung ist das positive Biegungsmoment M_0 in der Plattenmitte, das „Feldmoment", das in jeder Richtung gleich gross ist, sowie das negative „Einspannmoment" M_r am Rande in der Mitte jeder Auflagerbahn.

Die Gl. (13) und (21) liefern für die Plattenmitte

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_0 \frac{2\,c_1}{a^2} = \frac{p_0\, a^2\, c_1 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{4\,EJ\,(c_1^2 + 6\,c_2)}.$$

Wird dieser Wert in Gl. (10) für $x = y = 0$, also in

$$M_0 = -\frac{EJ}{1 - \frac{1}{m^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

eingesetzt, so ergibt sich für das *Feldmoment:*

$$M_0 = -\frac{p_0\, a^2\, c_1}{4\,(c_1^2 + 6\,c_2)} \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Für die Mitte des Randes $x = a$ erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{dx^2} = \frac{2\,z_0}{a^2}\,(c_1 + 6\,c_2 + 15\,c_3) = \frac{p_0\, a^2\,(c_1 + 6\,c_2 + 15\,c_3)}{4\,EJ\,(c_1^2 + 6\,c_2)} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

somit hat das *Einspannmoment* den Wert

$$M_r = -\frac{EJ}{1 - \frac{1}{m^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{p_0\, a^2\,(c_1 + 6\,c_2 + 15\,c_3)}{4\,(c_1^2 + 6\,c_2)}.$$

Nach Einführung der Stützweite $l = 2a$ und der Abkürzungen

$$c_0 = -\frac{16\,(c_1^2 + 6\,c_2)}{c_1}, \qquad c_r = \frac{16\,(c_1^2 + 6\,c_2)}{c_1 + 6\,c_2 + 15\,c_3}$$

nehmen die Momente die für die Anwendung bevorzugte Form an:

$$M_0 = \frac{p_0\, l^2}{c_0} \left(1 + \frac{1}{m}\right), \qquad M_r = -\frac{p_0\, l^2}{c_r} \quad . \quad . \quad (23)$$

In Tabelle 1 sind die Nennerwerte c_0 und c_r für die verschiedenen Einspannungsfaktoren ebenfalls zusammengestellt. Man erkennt aus den beiden Zahlenreihen, dass sich c_0 und c_r mit guter Genauigkeit durch folgende Formeln darstellen lassen:

$$c_0 = 27\,\frac{3\,k + 2}{3\,k + 1}, \qquad c_r = 20\,(2\,k + 1).$$

Damit ergeben sich für die Momente einfache Näherungsausdrücke, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Feldmoment} & M_0 = \dfrac{p_0\, l^2\,(3\,k + 1)}{27\,(3\,k + 2)} \left(1 + \dfrac{1}{m}\right), \\ \text{Einspannmoment} & M_r = -\dfrac{p_0\, l^2}{20\,(2\,k + 1)}. \end{array}\right\} \quad . \quad (24)$$

Die Poissonzahl m ist von Einfluss auf das Feldmoment, nicht aber auf die Randmomente. Für die praktische Anwendung im Eisenbeton dürfte es zweckmässig sein, mit $m = 4$ zu rechnen. Zwar lässt sich zeigen, dass im Stadium der Rissebildung m wesentlich grösser ausfällt. Die vorliegende Theorie bezieht sich indessen auf die Platte aus homogenem Baustoff mit konstanter Biegungssteifigkeit. Mit diesen Voraussetzungen erscheint die Annahme einer höhern Poissonzahl m unvereinbar. Die Annahme $m = \infty$, die in der Eisenbetonliteratur mehrfach empfohlen wurde, lässt sich wohl begründen für den Fall der Platte ohne Drillungswiderstand (Theorie des Balkenrostes), jedoch nicht im Verein mit den in dieser Abhandlung benützten Voraussetzungen der klassischen Plattentheorie.

6. Nachweis der Lastverteilung.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die variable Belastung nach Gleichung (20) mit genügender Genauigkeit als Ersatz für eine gleichmässig verteilte Belastung dienen kann. Zu diesem Zwecke berechnet man am einfachsten für verschiedene Lastpunkte den Quotienten p/p_0 und überzeugt sich, dass im mittlern Bereich der Platte dieser Wert nur unwesentlich von 1 abweicht. Gegen die Plattenränder und namentlich in den Ecken ist die Abweichung gross, indessen sind die dort befindlichen Lasten überhaupt nur von geringem Einflusse auf die Biegungsmomente. Die Tabelle 2 enthält auszugsweise das Ergebnis dieser Berechnung und zwar für die Einspannungsfaktoren $k = 0$, $1/3$ und ∞, und die Lastpunkte $x/a = 0$, $1/4$, $1/2$, $3/4$, 1, sowie die entsprechenden Werte von y/a, vergl. Abb. 5.

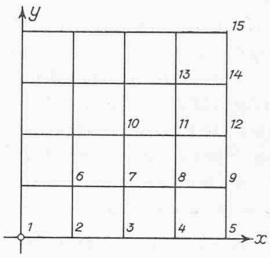

Abb. 5.

Tabelle 2: Lastverteilung p/p_0, vergl. Abb. 5.

Lastpunkt Nr	$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$	$k = 0$	$k = \frac{1}{3}$	$k = \infty$
1	0		1,00	1,00	1,00
2	1/4		1,03	1,02	1,01
3	1/2	0	1,08	1,04	1,02
4	3/4		1,02	1,01	1,01
5	1		0,65	0,81	0,90
6	1/4		1,04	1,02	1,01
7	1/2	1/4	1,04	1,02	1,01
8	3/4		0,94	0,96	0,97
9	1		0,60	0,74	0,84
10	1/2		0,94	0,95	0,96
11	3/4	1/2	0,78	0,81	0,86
12	1		0,52	0,58	0,65
13	3/4	3/4	0,77	0,62	0,66
14	1		1,38	0,48	0,36
15	1	1	4,11	0,78	0,00

Es ist leicht möglich, diese Lastverteilung noch zu verbessern, indem man die Potenzfunktionen der Gl. (13) um ein oder mehrere Glieder erweitert. Die numerische Berechnung ergab jedoch, dass diese Erweiterung überflüssig ist, weil bereits die vorliegende Darstellung die Biegungsmomente mit grosser Annäherung so liefert, wie sie bei konstanter spezifischer Belastung entstehen. Für die Fälle der freien Auflagerung ($k = \infty$) und der totalen Einspannung ($k = 0$) überzeugt man sich hiervon auch leicht durch den Vergleich mit den exakten, durch Auswertung der trigonometrischen Reihen erhaltenen Ergebnissen der Elastizitätstheorie, die aus der Literatur bekannt sind. Bei freier Auflagerung beträgt darnach der exakte Wert für das Feldmoment

$$M_0 = \frac{p\, l^2}{27{,}2} \left(1 + \frac{1}{m}\right);$$

bei vollständiger Einspannung aller Ränder lauten die exakten Werte nach *H. Leitz* [1])

$$M_0 = \frac{p\, l^2}{54{,}3} \left(1 + \frac{1}{m}\right), \qquad M_r = -\frac{p\, l^2}{19{,}4}.$$

Man erkennt, dass unsere Berechnung mit Potenzfunktionen nur ganz unbedeutende Fehler mit sich bringt. Selbst die

[1]) *H. Leitz:* „Berechnung ebener Platten", Betonkalender 1928. Im neuesten Jahrgang dieses Taschenbuches finden sich die Tabellen von Leitz nicht mehr.

überaus einfachen Näherungsausdrücke (24) ergeben Resultate, die um weniger als 3 % von den Ergebnissen der mathematischen Elastizitätstheorie abweichen.

7. *Vergleich der Plattentheorie mit der Streifenmethode.* In Tabelle 3 sind die nach der Plattentheorie (Gl. 24 mit $m = 4$) berechneten Feldmomente und Einspannmomente den Ergebnissen der Streifenmethode für verschiedene Einspannungsfaktoren gegenüber gestellt.

Tabelle 3: Nenner c in $M = \frac{p\,l^2}{c}$.

Einspannungsfaktor k	Einspannungsgrad $\frac{1}{1+k}$	Plattentheorie M_0	Plattentheorie M_r	Streifenmethode M_0	Streifenmethode M_r
0	1	43,2	— 20,0	48,0	— 24,0
1/4	4/5	33,9	— 30,0	34,3	— 30,0
1/3	3/4	32,4	— 33,3	32,0	— 32,0
1/2	2/3	30,2	— 40,0	28,8	— 36,0
2/3	3/5	28,8	— 46,7	26,7	— 40,0
1	1/2	27,0	— 60,0	24,0	— 48,0
2	1/3	24,7	—100,0	20,6	— 72,0
∞	0	21,6	∞	16,0	∞

Wie man sieht, weichen bei den grössern Einspannungsgraden die Ergebnisse der Streifenmethode von der Plattentheorie wenig ab. Bei schwacher Einspannung und besonders bei freier Auflagerung liefert aber die Streifenmethode viel zu grosse Feldmomente.

Die Theorie der elastisch eingespannten Platte bildet die Grundlage zur Berechnung der durchlaufenden Platten, die im Eisenbetonbau von grosser Bedeutung sind. In der Praxis berechnete man bisher die durchlaufenden Platten notgedrungen stets nach der Streifenmethode und überschätzte darnach die Feldmomente wesentlich. Es ist nämlich zu beachten, dass der Einspannungsgrad eines Plattenfeldes hier durch die Formänderung der Nachbarfelder zu Stande kommt und deshalb einen höhern Wert erreicht, als nach der Balkentheorie zu erwarten ist. Theoretische und experimentelle Untersuchungen im Institut für Baustatik an der E. T. H. haben gezeigt, dass man die bekannten Ausdrücke für die Auflagerdrehwinkel eines Balkens infolge „$M = 1$" wenigstens halbieren muss, um die entsprechenden Werte bei der allseitig gelagerten Platte zu erhalten. Diese Korrektur ergibt sich bei der Anwendung der Streifenmethode auf durchlaufende Platten in einfacher Weise, indem man bei der Bestimmung der Festpunkte jeder Oeffnung die Nachbarfelder mit ungefähr dem doppelten Trägheitsmoment in die Rechnung einführt. Eine eingehendere Erläuterung und Begründung dieser Regel, die die genauere statische Untersuchung durchlaufender Platten wesentlich erleichtert, bleibt einer besondern Abhandlung vorbehalten.

Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau.

Die Internationale Vereinigung für Brücken- und Hochbau, über deren Gründung wir auf Seite 278 von Band 94 (30. November 1929) berichteten, wird ihren ersten Kongress vom 19. bis 25. Mai in Paris abhalten. Es ist der Vereinigung gelungen, einige der bekanntesten Vertreter der Wissenschaft und des Bauwesens zu gewinnen, die die Diskussionen der einzelnen Fragen, die auf dem Programm des Kongresses vorgesehen sind, einleiten werden. Der Kongress umfasst eine Eröffnungssitzung, sieben Arbeitssitzungen und eine Schlussitzung, in der die am Ende der Arbeitssitzungen festgelegten Schlussfolgerungen nochmals vorgetragen werden sollen.

Das Kongressprogramm ist so aufgestellt worden, dass die Kongressteilnehmer sich sowohl an der Besprechung der Fragen des Stahlbaues, als auch des Eisenbetonbaues beteiligen können. Für jedes der acht vorgesehenen Themata wurden verschiedene Referate vorbereitet, die vollinhaltlich im „Vorbericht", der an alle Kongressteilnehmer verschickt wird, veröffentlicht werden. Die Referenten werden in den Sitzungen jeweils nur eine kurze Zusammenfassung ihrer Arbeit geben. Die Kognressteilnehmer, die sich an der Diskussion zu beteiligen wünschen, haben sich bei den Generalsekretären der Vereinigung (Prof. Dr. L. Karner, Prof. Dr. M. Ritter, E. T. H., Zürich) anzumelden. Die Sprechdauer jedes Redners wird entsprechend der für die Diskussion zur Verfügung stehenden Zeit streng begrenzt.

Das Programm umfasst folgende Themata:

I. Stabilität und Festigkeit von auf Druck und Biegung beanspruchten Bauteilen. 1. Einleitendes Referat (Prof. Dr. L. Karner, Zürich); 2. Frage des Knickens aussermittig oder querbelasteter gerader Stäbe (Prof. Dr. Roš, Zürich); 3. Das Ausbeulen der Stegbleche gedrückter Stäbe (Dr. F. Bleich, Wien); 4. Das Ausbeulen der Stegbleche von auf Biegung beanspruchten Trägern (Prof. S. Timoshenko, Ann Arbor, U. S. A.).

II. Platten und Schalen im Eisenbetonbau. 1. Einleitendes Referat (Prof. Dr. M. Ritter, Zürich); 2. Rechteckige, allseitig aufliegende Platten (Prof. Dr. Gehler, Dresden); 3. Pilzdecken (Prof. Dr. Huber, Warschau); 4. Schalen, Scheiben und Faltwerke (Dr. W. Petry, Obercassel-Siegkreis).

III. Schweissen im Stahlbau. 1. Allgemeines Referat (Prof. T. Godard, Pau); 2. Festigkeit, Berechnung und bauliche Durchbildung von geschweissten Stahlkonstruktionen (Dir. Dr. Kommerell, Berlin); 3. Erfahrung bei der praktischen Anwendung (mit Einschluss der Wirtschaftlichkeit) (Dir. L. Kopeček und Dr. Ing. F. Faltus, Plzen); 4. Zusammenwirken von Niet- und Schweissverbindungen (Prof. H. Dustin, Bruxelles).

IV. Grössere Balkenbrücken in Eisenbeton. 1. Allgemeines Referat (Henry Lossier, Argenteuil); 2. Besondere Konstruktionen (Prof. Dr. Ing. e. h. Spangenberg, München); 3. Besondere Konstruktionen (Ministerialrat M. Gombos, Budapest).

V. Brückendynamik. 1. Allgemeines Referat (Reichsbahnoberrat Homann, München); 2. Apparate zur Erzeugung und Messung von Schwingungen (Reichsbahnrat Dr. Ing. Bernhard, Berlin); 3. Berechnung des Einflusses dynamischer Lasten auf Bauwerke: a) Theoretische Grundlagen (Dr. F. Bleich, Wien; b) Anwendung und Ergebnisse im Hochbau (David Cushman Coyle, New York).

VI. Ausbau der Statik des Eisenbeton mit Rücksicht auf die Baustoffeigenschaften. 1. Einleitendes Referat (Prof. F. Campus, Lüttich); 2. Elastizität, Plastizität und Schwinden (Dr. Oscar Faber, London).

VII. Verbindung von eisernen Trägern mit Beton. 1. Einleitendes Referat (Prof. L. Santarella, Milano); 2. Verbundsäulen (Stahlstützen mit Ummantelung in Beton und Eisenbeton) (Oberbaurat Dr. techn. e. h. F. v. Emperger, Wien); 3. Einbetonierte Stahlsäulen und ihre Bedeutung für den Stahlskelettbau (Prof. Dr. Ing. Hawranek, Brünn); 4. Profilträger, kombiniert mit Beton oder Eisenbeton, auf Biegung beansprucht (Dr. C. H. Lobban, London).

VIII. Baugrundforschung. 1. Tragfähigkeit der Flachgründungen (Prof. Dr. Ing. K. v. Terzaghi, Wien).

Die Vereinigung bezweckt die internationale Zusammenarbeit der Vertreter der Wissenschaft, der Industrie und des Bauwesens auf dem Gebiete des Ingenieurbaues in Stahl, Eisenbeton oder andern Baustoffen. Zur Erreichung dieses Zweckes werden unter anderem Kongresse in Zeiträumen von drei bis fünf Jahren durchgeführt. Ausserdem veröffentlicht die Vereinigung von Zeit zu Zeit wissenschaftliche Abhandlungen. Sie gibt Anregung zu wissenschaftlichen Untersuchungen und praktischen Versuchen oder führt diese selbst aus.

Die Zusammensetzung des Vorstandes dieser Vereinigung ist aus unserer frühern Mitteilung ersichtlich. Anstelle des unterdessen verstorbenen J. Mitchell Moncrieff ist Prof. Sir Thomas Hudson Beare (Grossbritannien) zum Vizepräsidenten ernannt worden.