

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 97/98 (1931)
Heft: 26

Artikel: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion
Autor: Meissner, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-44800>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion. — Zu den Zeichnungen von Kantonsbaumeister Herm. Fietz †. — Elektrisch geschweissster Blechträger. — Neuartige Fundation beim Bau der Brücke über den Kleinen Belt. — Vom gegenwärtigen Stand der Arbeitsphysiologie. — Mitteilungen: Dampfturbinen von 75 000 PS 3000 Uml/min für Paris. Automobile für die Durchquerung der Wüste

Sahara. Der Flugverkehr der italienischen Linien. Schweizer. Bundesrat. Schweizer. Bundesbahnen. Kraftwerk Wäggital. Eidgen. Kunskommission. Stadtpräsident von Lausanne. — Wettbewerbe: Krematorium beim Friedhof Nordheim in Zürich. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Dieser Nummer ist das Inhalt-Verzeichnis des mit heute schliessenden Bandes 98 beigelegt.

Graphische Analysis vermittelst des Linienbildes einer Funktion.¹⁾

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

5. Integration der totalen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Die meisten Probleme der Mechanik und Physik mit einem Freiheitsgrad und einer unabhängigen Veränderlichen führen auf totale Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die daher im Mittelpunkte des Interesses stehen. Solche Gleichungen geben eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion, ihren ersten Ableitungen und dem Argument, sind also von der Form

$$R(u, p, p', p'') = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

Wenn eine Gleichung nur von der ersten Ordnung vorliegt, oder, wie es gerade in der Mechanik oft vorkommt, wenn sich ein Integral dieser Gleichung angeben lässt (Energie-Integral), so hat man es zu tun mit einer Relation von der Form

$$R_1(u, p, p') = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

Wenn man diese Relation nach u differentiiert, so geht sie in eine solche von der Form (4) über, sodass wir uns auf diese letzte beschränken können. Man löse sie nach p'' auf:

$$p'' = f(u, p, p').$$

Es ist dann auch

$$q = p + p'' = F(u, p, p') \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

ein bekannter Ausdruck in den Grössen u , p und p' . In gewissen einfachen Fällen werden auf der rechten Seite nicht alle drei Argumente auftreten; wenn z. B. ein Integral (5) bekannt ist, kann immer eine der drei Grössen eliminiert werden. Dann vereinfacht sich die Lösung.

Statt die Funktion $p(u)$ zu finden, die der Gleichung (4) bzw. (6) genügt, stellen wir uns jetzt die gleichwertige Aufgabe, ihr Linienbild C zu konstruieren. Dabei hat man sich für die Lösung bestimmte Anfangsbedingungen vorgeschrieben zu denken, etwa

$$p(0) = p_0 \quad p'(0) = p_0' \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

Die Differentialgleichung (6) gibt nun für jede Stelle P_u des Linienbildes C den zugehörigen Krümmungsradius q_u . In infinitesimaler Nähe von P_u kann C ersetzt werden durch den dreipunkig berührenden Krümmungskreis vom Zentrum P_u' und dem Halbmesser $P_u P_u' = p_u$ (Abb. 5 auf Seite 289). Mit Annäherung kann dieser Ersatz auch auf ein endliches Bogenstück ausgedehnt werden, und zwar umso genauer, je kleiner der dazu gehörige Zentriwinkel α ist. Unsere Annäherungsmethode besteht darin, die Kurve C durch solche kleine oskulierende Kreisbogenstücke zu ersetzen.

Man beginnt die Konstruktion bei dem durch (7) gegebenen Punkte P_0 , indem man die Punkte Q_0 , P_0 , Q_0' aufträgt, sodass $OQ_0 = p_0$, $Q_0 P_0 = p_0' = OQ_0'$ wird (Abb. 8). Die Differentialgleichung (6) gibt jetzt den Krümmungsradius $q_0 = P_0 P_0' = F(0, p_0, p_0')$, welche Strecke von P_0 aus auf der Normalen g_0 bis P_0' abgetragen wird. Wenn q_0 positiv ist, geht das Auftragen von P_0 aus in positivem Sinn, dem Pfeilsinn von g_0 , im entgegengesetzten Sinn aber, wenn q_0 negativ ist. Es ist jetzt P_0' der Krümmungsmittelpunkt von C in P_0 . Man wählt nun, je nach der verlangten Genauigkeit, einen kleinen Winkel α_1 und schlägt um P_0' den Kreisbogen $P_0 P_1$ mit diesem Zentriwinkel und dem Halbmesser q_0 . Dieser in P_0 oskulierende Bogen wird näherungsweise als das erste Stück des Linienbildes C betrachtet. Es können jetzt für P_1 die entspre-

chenden Punkte Q_1 , Q_1' gezeichnet und damit die Werte $p_1 = p(\alpha_1) = OQ_1 = P_1 Q_1'$ und $p_1' = p'(\alpha_1) = OQ_1'$ aus der Zeichnung entnommen werden. Sie sind natürlich nur angenähert richtig, werden aber bei kleinem α_1 genugend genau, insbesondere wenn der Krümmungsradius im Intervall 0 bis α_1 nicht stark schwankt. Mit diesen Werten berechnet man jetzt den Krümmungsradius q_1 in P_1 , der durch den Wert

$$q_1 = F(\alpha_1, p_1, p_1')$$

gegeben ist, und wiederholt nun die für P_0 beschriebene Konstruktion an P_1 , indem man $P_1 P_2' = q_1$ macht und um P_1' durch P_1 wieder einen kleinen Kreisbogen $P_1 P_2$ von beliebigem aber kleinem Zentriwinkel α_2 schlägt, der ein weiteres Bogenstück von C approximiert. Wenn nicht wegen starker Schwankung der Krümmung ein kleinerer Wert als α_1 angemessen ist, wird man zweckmäßig $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ setzen, also mit gleichen Intervallen arbeiten. So fährt man weiter und erhält für C die Folge von Kreisbogenstücken $P_0 P_1 P_2 P_3 \dots$

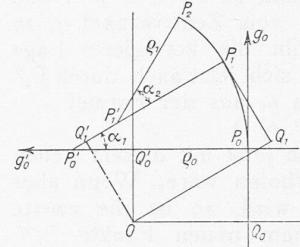


Abb. 8

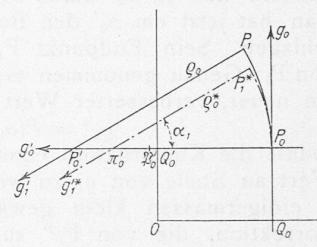


Abb. 9

Es ist klar, dass dieser Konstruktion ein Nachteil anhaftet, der aber in der Natur der Sache liegt. Jeder Punkt P_i wird aus dem vorhergehenden P_{i-1} konstruiert und in der Lage von P_{i-1} enthaltene Ungenauigkeit überträgt sich daher auf P_i . Im ungünstigsten Fall hat man daher eine Häufung der Fehler mit wachsender Zahl von Kreisbogenintervallen zu erwarten. Diese Häufung macht sich praktisch ganz besonders für die p' Werte bemerkbar.

Die Interpolation.

Man kann das besprochene Verfahren wesentlich verbessern, indem man eine einfache Interpolation hinzufügt. Da der Krümmungsradius q sich mit u im allgemeinen ändert, hat der ersetzen Kreisbogen $P_0 P_1$ nur im Anfangspunkt P_0 den durch die Differentialgleichung vorgeschriebenen richtigen Radius; für den Radius im Endpunkte P_1 würde die Differentialgleichung einen andern Wert, nämlich

$$q_1 = F(\alpha_1, p_1, p_1') \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

ergeben. Man wird im allgemeinen eine bessere Annäherung an den wahren Mittelwert erzielen, wenn dem Kreisbogen nachträglich statt mit q_0 mit dem arithmetischen Mittel $q^* = (p_0 + p_1)/2$ geschlagen wird. Dieser neue Bogen $P_0 P_1^*$ hat als Endpunkt einen Punkt P_1^* , der etwas verschieden von P_1 sein wird. Demgemäß ergeben sich an Stelle von p_1 und p_1' neue, korrigierte Werte p_1^* und $p_1'^*$, wobei sich zeigt, dass die Korrektur in p' viel beträchtlicher ist, als in p .

Praktisch ist die neue Konstruktion folgendermassen auszuführen (Abb. 9):

Nachdem P_1 wie früher konstruiert und q_1 aus Formel (8) gefunden worden ist, trage man von P_0 aus auf der Normalen $P_0 Q_0'$ bis nach P_1^* die Länge q_1 ab, und

¹⁾ Diese Artikelfolge wird als Sonderdruck erscheinen. — Red.



Aug. 8. 86.

Schloss Kyburg

Schloss Kyburg nach Bleistiftskizze von † Kantonsbaumeister Hermann Fietz aus dem Jahre 1886.

halbire nun $P_0' \mathfrak{P}_0'$ durch π_0' . Dann ist $P_0 \pi_0' = \varrho^{0*}$, und man hat jetzt um π_0' den Bogen vom Zentriwinkel α_1 zu schlagen. Sein Endpunkt P_1^{**} gibt die korrigierte Lage von P_1 . Genau genommen ergibt sich jetzt auch durch P_1^{**} ein neuer, verbesserter Wert von ϱ_1 aus der Formel

$$\varrho_1^{**} = F(\alpha_1, p_1^{**}, p_1'^{**})$$

sodass die Konstruktion eigentlich jetzt mit diesem neuen Wert an Stelle von ϱ_1 zu wiederholen wäre. Wenn aber α_1 einigermassen klein gewählt wird, so ist die zweite Korrektion, die von P_1^{**} zu einem neuen Punkte P_1^{***} führen würde, so klein, dass sie schon innerhalb der Genauigkeit der Zeichnung liegt und weggelassen werden kann.

Wenn von der Differentialgleichung ein erstes Integral (5) bekannt ist, so wird das besprochene Interpolations-Verfahren durch folgendes ersetzt:

Man konstruiert wie früher zunächst den Punkt P_1 und entnimmt daraus den Wert von p_1 , der ja durch das Interpolationsverfahren nur sehr wenig korrigiert würde. Mit diesem berechnet man jetzt aus der Relation (5) den Wert von p_1' und hat damit eine Korrektur $g_1'^{**}$ der Geraden g_1' . Diese schneidet g_0' in einem Punkte π , der nachträglich als Zentrum des Näherungsbogens verwendet wird. Der Endpunkt des neuen Bogens P_1^{**} ergibt die korrigierte Lage von P_1 .

Bemerkungen zur Ausführung der graph. Integration.

Die Anwendung der graphischen Methode kann noch wesentlich vereinfacht werden, wenn man eine Reihe von Dingen beobachtet.

Zunächst ist es am Platze, für die beiden veränderlichen u und p dimensionslose Zahlen einzuführen, indem man das Verhältnis der ursprünglichen Veränderlichen zu Standardgrössen bildet, die durch das Problem selbst gegeben sind. Ferner wird man jedesmal zu überlegen haben, ob es gelingt, der Differentialgleichung eine für die Integration einfachere Form zu geben. Man hat dabei insbesondere zwei Möglichkeiten zur Verfügung, von denen man häufig Gebrauch machen wird:

Einmal kann man von der zu suchenden Funktion einen Faktor abspalten, sodass für den verbleibenden Rest eine neue einfachere Gleichung resultiert. Wenn die Differentialgleichung z. B. linear ist, so kann man auf

diese Weise etwa das Glied mit p' entfernen; oder man kann den Koeffizienten der Gleichung eine Form erteilen, die der Konstruktion zugänglicher ist.

Als zweites kann man auch für die unabhängige Veränderliche selbst eine neue Funktion substituieren.

Beispiel: Die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \lambda \frac{dy}{dt} + a^2 [1 - q \cos(\omega t)] = 0$$

geht durch die Substitution $y = e^{-\lambda t} p$ über in

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + p [a^2 - \lambda^2 - a^2 q \cos(\omega t)]$$

und durch Einführung von $u = \sqrt{a^2 - \lambda^2} t$ als neuer Veränderlicher in

$$\frac{d^2 p}{du^2} + p \left[1 - \frac{a^2}{a^2 - \lambda^2} q \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}} u\right) \right] = 0$$

was für die Konstruktion wesentlich einfacher ist, da ja jetzt

$$q = -A p \cos(\omega t)$$

$$\text{wobei } A = \frac{a^2}{a^2 - \lambda^2} q; \quad \omega = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}$$

Man wird weiter zu entscheiden haben, welcher Längenmasstab in der Zeichnung für p zu wählen ist. Im allgemeinen ist ein grosser Massstab im Interesse der Genauigkeit; jedoch ist durch die Art der Zeichenmittel natürlich hierfür eine obere Schranke gegeben. Als dann hat man die Grösse der Intervalle α_i zu wählen. Man wird sich dabei vorbehalten, im Laufe der Konstruktion die α_i zu verkleinern, wenn die Ungenauigkeit zu gross wird, zu vergrössern im Interesse der Kürze des Verfahrens, wenn es die Genauigkeit erlaubt. Als Mass dafür wird man die Grösse der Korrektur ansehen dürfen, die das Interpolationsverfahren liefert.

Das Verkleinern der Intervalle ist nur oberhalb einer gewissen Grenze zweckmässig; denn mit zu kleinen Winkeln zu operieren wird wegen der Zeichenfehler ungenau und ist auch sehr mühsam. In den ausgeführten Beispielen ist nie unter 5° hinabgegangen worden; der grösste verwendete Wert von α ist 15° . Wenn die mit $\alpha = 5^\circ$ erzielte Genauigkeit nicht genügt, so transformiert man zweckmässig die zu integrierende Differentialgleichung $p'' = f(u, p, p')$, indem man statt u die neue veränderliche $v = k u$ einführt. Hier bedeutet k eine genügend grosse,



Schloss Kyburg nach Bleistiftskizze von † Kantonsbaumeister Hermann Fietz aus dem Jahre 1918.

zweckmässigerweise ganze Zahl $p(u)$ geht über in eine Funktion $q(v)$, für die die Differentialgleichung gilt

$$q'' = \frac{1}{k^2} f\left(\frac{v}{k}, q, k q'\right)$$

Schwankt u in einem bestimmten Intervall, so schwankt v in einem Intervall von k -facher Grösse, und einer Winkel-differenz α von u entspricht eine solche $k\alpha$ von v .

Der Erwähnung wert ist auch noch der Fall, wo während der Konstruktion der Krümmungsradius ϱ durch Null geht. Die Kurve C hat an jener Stelle im allgemeinen eine *Spitze*. Allerdings kann dies stets vermieden werden, indem man statt $p(u)$ die Funktion $q(u) = p(u) + a$ einführt, wo a genügend gross gewählt wird. Denn das Linienbild von q hat einen Krümmungsradius $q + q'' = p + p'' + a = \varrho + a$, der bei passender Wahl von a in einem gegebenen Intervall von u nicht Null wird. Aber selbst wenn an einer Stelle P_u der Krümmungsradius durch Null geht, versagt die Konstruktion keineswegs. Die Spitze der Kurve C ist dann in unmittelbarer Nähe von P_u mit einer Kreisevolvente identisch; und zwar ist der zugehörige Kreis der Krümmungskreis der Evolute C' von C an jener Stelle, also ein Kreis vom Radius $\varrho' = p' + p''$.

Wenn auch der Radius dieses Kreises wieder Null ist, dann hat man zu höhern Evoluten überzugehen. Ein Beispiel dieser Art gibt die in Abschnitt 12 und in Abbildung 32 behandelte Differentialgleichung.

Eine Abänderung der Konstruktion ist auch erforderlich, wenn die Zentra der Kreisbögen P_0P_1 , P_1P_2 usw. ausserhalb des Zeichnungsblattes fallen. Ist z. B. ϱ_0 der Bogenradius von P_0P_1 , α_1 der Zentriwinkel, so trägt man etwa (Abb. 10) von P_0 aus auf der Tangente g_0 nach S

die Strecke $P_0S = \varrho_0 \operatorname{tg} \alpha_1/2$ auf, und von S aus die selbe Strecke unter dem Winkel $\alpha_1/2$; ihr Endpunkt ist dann der zweite Endpunkt P_1 des Bogens P_0P_1 .

Wenn endlich an einer Stelle die Lösung eine wesentliche Singularität hat, sodass dort etwa p oder die Ableitungen von p unendlich werden, so wird man für diese eine Stelle das graphische Verfahren durch eine analytische Untersuchung ergänzen müssen, in welcher der Charakter der Singularität und das Verhalten der Lösung festgestellt wird.

(Forts. folgt.)

Zu den Zeichnungen von Kantonsbaumeister Hermann Fietz †.

Die Wirksamkeit des anfangs dieses Jahres verstorbenen Zürcher Kantonsbaumeisters Dr. h. c. Hermann Fietz ist bereits früher in dieser Zeitschrift gewürdigt worden. Dank dem Entgegenkommen seiner Erben sind wir heute in der Lage, einige seiner Skizzen in originalgetreuen Reproduktionen hinzuzufügen. Die beiden ersten, die Kyburg von der Südost-Seite, zeigen den Entwicklungsgang einer 30jährigen Zeichentätigkeit, von der zierlichen, etwas zaghaften Fassung von 1886 zur straffen, malerischen Haltung von 1918. Die übrigen Blätter sind aus dem reichen Schatz des an die 1000 Blätter enthaltenden Nachlasses des Verstorbenen ausgewählt und legen Zeugnis ab für sein Bemühen, treu und ehrlich, in liebevoller Nachempfindung das Objekt selbst sprechen zu lassen, ohne sich durch eine gewollte oder gar gespreizte Stilisierung selbst in den Vordergrund zu drängen. Es sind Ferienfrüchte, Erholungsarbeiten eines Mannes, dem nur selten die Musse vergönnt war, mit dem Stift in der Hand seine Umwelt zu schildern. Und etwas wie Feiertagstimmung liegt auch über den sicher hingesetzten Skizzen, die als freundliches Andenken an ihren Schöpfer in dieser Weihnachtsnummer der „S. B. Z.“ Aufnahme gefunden haben.

Dr. R. B.

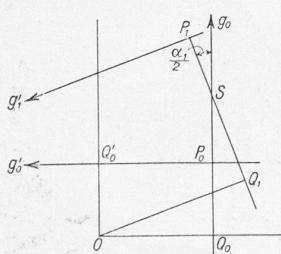


Abb. 10