Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 97/98 (1931)
Heft: 23

Artikel: Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion
Autor: Meissner, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44790

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion. — Von den Völkerbund-Gebäuden in Genf. — Schweizer. Elektrotechnischer Verein und Verband Schweizerischer Elektrizitätswerke. — Mitteilungen: Gleichrichter mit Steuergitter. Sicherung der „Galleria" in Mailand. Zum Oberingenieur des Kantons Graubünden. Der Bau der Dreirosenbrücke in Basel. Versuche mit 60 m langen Eisenbahnschienen. Eidgenössische Technische Hochschule. Schweizer Mustermesse 1932. — Wettbewerbe: Sekundarschulhaus Oberwinterthur. Neubau eines Stadthauses in Bern. Verwaltungsgebäude der städtischen Werke Baden. Hotel Viktoria-Umbau in Zürich. Krematorium beim Friedhof Nordheim in Zürich. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender. — An unsere Abonnenten.

Band 98 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 23

Graphische Analysis vermittels des Linienbildes einer Funktion.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, E. T. H., Zürich.

Vorwort. In zwei Aufsätzen, die in der „Schweiz. Bauzeitung" erschienen sind [1]), habe ich ein graphisches Integrationsverfahren für totale Differentialgleichungen entwickelt, das seither in der Praxis Anwendung gefunden hat und seit einiger Zeit auch regelmässig an der Abteilung für Maschineningenieure der E. T. H. benützt wird. Infolgedessen ist der als Sonderdruck im Buchhandel erschienene grundlegende erste Aufsatz vergriffen. Statt ihn einfach neu drucken zu lassen, erschien es mir zweckmässig, seinen Inhalt mit jenem des zweiten Aufsatzes und mit weiterm, in Vorlesungen vorgetragenem Stoff zusammenzuarbeiten. Es lag nahe, an anderer Stelle von mir publizierte Dinge gelegentlich mit einzubeziehen. So ist die vorliegende Arbeit entstanden. Ihr Stoff ist, soweit er schon veröffentlicht wurde, den drei erwähnten Aufsätzen entnommen. Die durchgeführten Beispiele und ebenso die Figuren des Textes sind zum grossen Teil neu. Für die Herstellung der letzten bin ich meinen Assistenten Druey, Waldvogel und insbesondere Herrn Salzmann zu Dank verpflichtet.

Der Aufsatz wendet sich an Ingenieure und Techniker, die analytisch schwer oder gar nicht zugängliche totale Differentialgleichungen numerisch zu lösen haben. Die Anwendungsbeispiele sind daher meist der Mechanik entnommen.

1. Einleitung.

Die graphische Darstellung ist das ureigenste Ausdrucksmittel und Handwerkszeug des Ingenieurs. Wo immer es angeht, wird er die Anschaulichkeit der Zeichnung der abstrakten Blässe der Formel vorziehen. So werden in der Statik der Baukonstruktionen die verwickelten algebraischen Beziehungen durch die Kräfte- und Verschiebungspläne geometrisch konstruiert und Aehnliches gilt in andern Gebieten, wie Kinematik, Elektrotechnik, usw. Allerdings hat die analytische Behandlung den ungeheuren Vorteil, dass sie sich nicht auf eine ganz bestimmte Aufgabe festzulegen braucht, sondern dass sie gerade die Abhängigkeit der Lösung von den Parametern des Problems zum Gegenstand der Untersuchung machen kann. Man wird ihr daher nie entraten können, umsomehr auch, als sie allein die Lösung mit unbegrenzter Genauigkeit zu ermitteln erlaubt. Aber in den technischen Anwendungen hat man es immer mit einem eindeutig bestimmten Sonderfall zu tun, und mehr als die allgemein gültigen Eigenschaften der Lösung interessieren den Ingenieur die numerischen Besonderheiten dieses Einzelfalles.

In der Mechanik und Physik führen die meisten nicht algebraischen Probleme auf Differentialgleichungen, aus denen die unbekannten Funktionen bestimmt werden müssen.[2]) Je nachdem diese von mehreren oder nur einer einzigen Veränderlichen abhängig sind, hat man es mit partiellen oder mit totalen Differentialgleichungen zu tun. Diese letzten treten in der Mechanik besonders häufig auf; sie sind dort meist von der zweiten Ordnung.

Für die analytische Lösung totaler Differentialgleichungen liegen eine Reihe von Integrationsmethoden vor, die aber nur in den einfachern Fällen zum Ziele führen, d. h. für die gesuchte Funktion einen Ausdruck in elementaren Funktionen (x^n, e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\lg(x)$ usw.) zu finden erlauben; denn in der Mehrzahl der Fälle werden durch die Differentialgleichungen neue Funktionen definiert, die sich überhaupt nicht elementar darstellen lassen. So führen viele Bewegungsaufgaben, z. B. das Pendel- und das Kreiselproblem, auf elliptische Funktionen, während andere wieder Funktionen ergeben, die auch dem Mathematiker unbekannt sind (Dreikörperproblem der Himmelsmechanik).

Nun ist für den Techniker und Physiker der Standpunkt gegenüber solchen „unlösbaren" Differentialgleichungen durchaus nicht der selbe wie für den Mathematiker. Während dieser nach der Existenz, dem Charakter und den Eigenschaften der Lösung fragen wird, begnügt sich der Techniker, wenn er bei gegebenen Anfangsbedingungen den Verlauf der Funktion qualitativ, womöglich auch quantitativ beurteilen kann, wobei es ihm auf Fehler von einigen Prozenten im allgemeinen kaum viel ankommen dürfte. Er wird also nach Verfahren suchen, die die Lösung wenigstens mit Annäherung zu berechnen erlauben.

Zu diesem Zweck kann er einmal für die Lösung eine Potenzreihe (oder eine andere Funktionenreihe mit genügend vielen verfügbaren Konstanten) ansetzen und so der Differentialgleichung zu genügen suchen. Aber diese Methode ist selten praktisch durchführbar und man hat häufig Konvergenzschwierigkeiten.

Ein zweites Mittel besteht darin, schon die Differentialgleichung zu vereinfachen, indem etwa Glieder vernachlässigt werden, deren Einfluss voraussichtlich klein ist. Das tut man z. B. bei der Behandlung der gewöhnlichen Pendelschwingungen, wo die genaue Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi)$$

unter Voraussetzung von kleinen Schwingungen durch die viel einfachere

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left[\frac{g}{l}\varphi\right]$$

ersetzt wird. Aber dieses Verfahren hat stets gewisse Voraussetzungen, die nicht immer erfüllt sind; auch ist man im Unsichern über den Geltungsbereich der gefundenen Lösung.

Eine dritte Methode benützt das sogen. Differenzenverfahren. Sie ersetzt die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung, die Differentiale durch endlich grosse, wenn auch sehr kleine Differenzen und berechnet so schrittweise die Funktion angenähert aus den gegebenen Anfangswerten. Schon in einfachen Fällen kommt man aber auf diese Weise zu umfangreichen Rechnungen und mehr oder weniger unübersichtlichen Zahlentabellen.

Es liegt nahe, den Gedanken, der hier zu Grunde liegt, zu verwenden, um ein graphisches Verfahren darauf aufzubauen. Das ist auch deswegen empfehlenswert, weil gelegentlich die schon in der Differentialgleichung auftretenden Funktionen und umsomehr die Lösung sich entweder garnicht oder nur umständlich analytisch beschreiben lassen, während sie graphisch einfach durch ein Dia-

[1]) „Ueber graphische Integration von totalen Differentialgleichungen", erschienen in „S. B. Z.", Bd. 62, Nr. 15 und 16 (11./18. Oktober 1913).

„Zur Schwingungslehre", erschienen in „S. B. Z.", Bd. 84, Nr. 23 und 24 (6./13. Dezember 1924).

S. a. „Ueber die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik", in der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 54 (1909).

[2]) Zwar ist häufig auch die Formulierung als Variationsproblem möglich; doch wird man überall da, wo es sich nicht nur um den Verlauf der Lösung im Ganzen, sondern um ihre lokalen Besonderheiten handelt, die Bestimmung durch die Differentialgleichung vorziehen.

gramm gegeben werden. Dies trifft z. B. zu, wenn die Funktionen in verschiedenen Gebieten verschiedenen analytischen Gesetzen folgen (Biegungsmoment eines belasteten Stabes), oder wenn sie etwa aus den Aufzeichnungen eines Instrumentes entnommen werden.

Um die Grundlagen für eine solche „graphische Analysis" zu schaffen, müssen augenscheinlich zeichnerisch einfache Methoden für das Differentieren und das Integrieren einer graphisch gegebenen Funktion angegeben werden.

Wenn man die Grundoperationen der Funktionenrechnung, nämlich die Bildung des Differentialquotienten und des Integrals einer Funktion, graphisch durchführen will, so muss man die Funktion irgendwie zeichnerisch darstellen. Man kann dazu Kurven, Flächen oder Winkel verwenden. Gewöhnlich benützt man die Darstellung der Funktion in rechtwinkligen Koordinaten x, y. Alsdann ist der Differentialquotient der Tangens des Neigungswinkels der Kurventangente zur Abszissenaxe. Der Prozess des Differentierens wird mit dem Legen der Kurventangente identisch, wobei der Berührungspunkt vorgeschrieben ist. Das Integral der Funktion wird durch den Flächeninhalt dargestellt, der zwischen Kurve, Endordinaten und Abszissenaxe liegt. Während die Funktion selbst durch eine Länge gemessen wird (die Kurvenordinate), braucht es für die Ableitung das Verhältnis zweier Längen bezw. eine Winkelmessung, und für das Integral hat man eine Flächenmessung vorzunehmen. Will man gar die zweite Ableitung der Funktion ermitteln, so hat man den Krümmungsradius ϱ der Kurve zu bestimmen und jene aus der Beziehung

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

zu errechnen. Höhere Ableitungen hängen in noch verwickelterer Art mit den Aenderungen der Krümmung zusammen, und höhere Integrale würden sich aus dieser Darstellung überhaupt nicht direkt ermitteln lassen.

Wenn nun z. B. die Funktion als Lösung einer Differentialgleichung zu bestimmen ist, so sind für ihr Kurvenbild Beziehungen zwischen Abszisse, Ordinate und Ableitungen vorgeschrieben, und es wird sich jetzt komplizierend geltend machen, dass diese letzten in unanschaulicher und verwickelter Art mit der Kurve in Beziehung stehen. Eine graphische Konstruktion des durch die Differentialgleichung geforderten Zusammenhanges wird, wenigstens bei Gleichungen höherer als erster Ordnung, nur in Ausnahmefällen möglich sein und selten einfach werden.

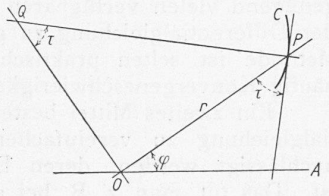

Abb. 1

Ein Hauptgrund für das Versagen der Darstellung liegt darin, dass die verschiedenen Ableitungen verschiedene Dimensionen haben, und dies rührt davon her, dass als unabhängige Variable eine dimensionsbehaftete Grösse, die Länge der Abszisse, gewählt wurde.

Wählt man zur Darstellung der Funktion *Polarkoordinaten* r, φ (Abb. 1), so ist dieser Uebelstand beseitigt. Alle Ableitungen haben jetzt die Dimension einer Länge. Es ist z. B.

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{r}{r'}$$

also die erste Ableitung r' von r nach φ durch die Länge der Strecke OQ in Abbildung 1 dargestellt. Indessen ist der Zusammenhang der zweiten Ableitung mit der Kurvenkrümmung wieder nicht einfach, da der Krümmungsradius ϱ durch den Ausdruck

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

dargestellt wird. Auch die Polarkoordinatendarstellung eignet sich daher nicht allgemein zur graphischen Analyse.

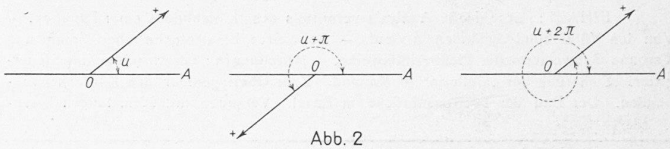

Abb. 2

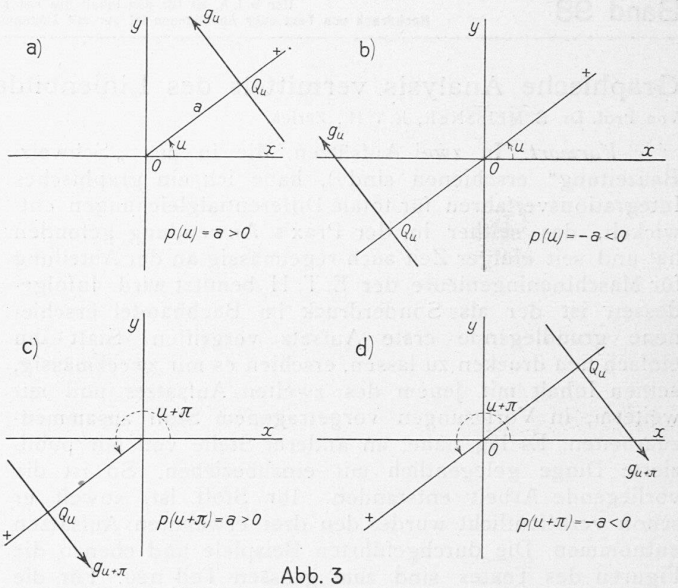

Abb. 3

2. Linienbild und Stützfunktion.

Im folgenden soll eine graphische Darstellung einer Funktion verwendet werden, die erlaubt, in einfachster und vollkommen gleichartiger Weise alle Ableitungen und Integrale daraus zu entnehmen. Diese Darstellung heisse das *Linienbild der Funktion,* die zu einer Kurve als Linienbild gehörige Funktion heisse umgekehrt *Stützfunktion dieser Kurve.*

Als unabhängige Veränderliche wird ein Winkel u gewählt, der von einer vorgegebenen Polaraxe OA aus im Gegenzeigersinn positiv aufgetragen wird (Abb. 2). Der Winkel u kann alle positiven und negativen Werte annehmen. Sein beweglicher Schenkel bildet einen Halbstrahl, auf dem wir die Richtung von O aus nach aussen als positiv bezeichnen wollen, und den wir nachträglich durch einen negativen Halbstrahl zu einen Vollstrahl ergänzen, der nun wie eine Koordinatenaxe einen positiven und einen negativen Teil hat. Die zu den Winkeln u und $u + \pi$ gehörigen Strahlen unterscheiden sich dann gerade durch den auf ihnen festgelegten Richtungsinn, während die zu den Winkeln u und $u + 2\pi n$ (n = ganze Zahl) gehörenden Strahlen identisch sind.

Die darzustellende Funktion sei $p = p(u)$.

Auf dem freien Schenkel des Winkels u tragen wir die Strecke $OQ_u = |p(u)|$ auf, und zwar nach der positiven oder negativen Seite, je nachdem p positiv oder negativ ist (Abb. 3). Die Gesamtheit aller so erhaltenen Punkte Q_u bildet eine Kurve, die mit dem früher erwähnten Polardiagramm identisch ist, jedoch hier keine Rolle spielt. Vielmehr errichten wir jetzt in Q_u die Normale zu OQ_u, eine Gerade, die wir mit $g(u)$ oder g_u bezeichnen wollen, und auf der wir durch einen Pfeil einen Richtungsinn festlegen. Dieser Richtungsinn soll derjenige sein, den der Halbstrahl u angibt, wenn er im Gegenzeigersinn um 90° gedreht wird. Die Geraden $g(u)$ und $g(u + \pi)$ fallen zusammen, wenn $p(u + \pi) = -p(u)$ ist, aber sie unterscheiden sich dann immer noch durch den Pfeil.

Die Gleichung der Geraden $g(u)$ in rechtwinkligen Koordinaten x, y ist

$$g(u) = x \cos(u) + y \sin(u) - p(u) = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Zu jedem Werte von u gehört eine solche Gerade, eine Stützlinie, und die Gesamtheit dieser Stützlinien umhüllt eine Kurve C, deren Form für die Funktion $p(u)$ charakteristisch ist, und die *das Linienbild von p(u)* heisst.

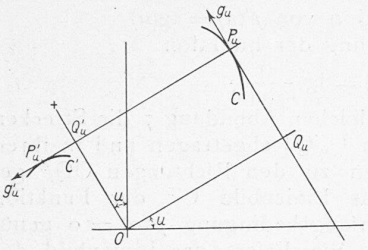

Abb. 4

Umgekehrt kann aus der Kurve C die Stützfunktion $p(u)$ wieder entnommen werden, indem man den Abstand vom Anfangspunkt O für jene Tangente konstruiert, die mit der y-Axe den Winkel u einschliesst.

Die Gerade $g(u)$ berührt die Kurve C in einem Punkte P_u (Abb. 4), der nach bekannten Prinzipien auch auf der durch

$$g'(u) = -x \sin(u) + y \cos(u) - p'(u) = 0 \quad . \quad (2)$$

gegebenen Kurve liegt.[1]) Aber diese Gleichung ist identisch mit

$$g'(u) = +x \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) - p'(u) = 0 \quad (2')$$

und diese stellt eine Gerade g_u' dar, die zu g_u normal steht. Es ist also g_u' die *Kurvennormale von C in P_u*. Aber g_u' ist die Stützlinie der Funktion $p'(u)$, wenn man die Polaraxe aus der ursprünglichen Lage um einen rechten Winkel im Gegenzeigersinn dreht, also den Winkel u von der y-Axe aus nimmt. Ihr Abstand OQ_u' von O, auf dem Strahl im vereinbarten Sinn positiv gerechnet, ist folglich gleich der Ableitung $p'(u)$, und man hat in Abb. 4 die Beziehung $OQ_u' = Q_uP_u = p'(u)$.

Die Kurve C', die von den Geraden g' umhüllt wird, das Linienbild der Funktion $p'(u)$ von der y-Axe aus gerechnet, ist demnach nichts anderes als die Evolute der Kurve C, und es gilt der Satz: *Das Linienbild der Ableitung einer Funktion ist die Evolute des Linienbildes der Funktion.*

Wenn man diesen Satz wieder auf die Funktion $p'(u)$ anwendet, so folgt, dass die Evolute C'' der Kurve C', die wir als die zweite Evolute der Kurve C bezeichnen wollen, das Linienbild der zweiten Ableitung $p''(u)$ darstellt, und indem so weiter gegangen wird, ergibt sich: *Die n^{te} Evolute C^n der Kurve C ist das Linienbild der n^{ten} Ableitung $p^{(n)}(u)$ der Funktion $p(u)$. Die Polaraxe ist um n rechte Winkel in positivem Sinne gedreht.*

In den Abb. 5a und 5b ist dies zur Darstellung gebracht. In 5a sind alle Ableitungen positiv, in 5b sind positiv $p(u)$ und $p''''(u)$, während p', p'' und p''' negativ ausfallen.

Da der Krümmungsradius einer Kurve immer von Kurvenpunkte bis zur Evolute hinreicht, ist der Krümmungsradius $\varrho(u)$ der Kurve C in P_u durch die Strecke P_uP_u' dargestellt. *Rechnen wir einen Krümmungsradius allgemein positiv, wenn er von dem Kurvenpunkt aus auf der Normalen in ihrem Pfeilsinn aufgetragen wird, negativ im andern Fall,* so ist mithin

$$\varrho(u) = p(u) + p''(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Der Krümmungsradius wird also in einfachster Weise linear, nämlich durch Addition der zweiten Ableitung zur Stützfunktion, erhalten.

[1]) Hier und im folgenden immer, wenn nichts besonders bemerkt ist, bedeuten beigefügte Striche Ableitungen nach der Veränderlichen u.

Auf der Einfachheit dieser Beziehung beruht die Verwendbarkeit des Linienbildes zur graphischen Analyse.

Die Anwendung dieser Formel auf die Funktion $p'(u)$ und ihr Linienbild ergibt, dass der Krümmungsradius der Kurve C' im Punkte P_u', d. h. die Strecke $P_u'P_u''$ durch den Ausdruck

$$p'(u) + p'''(u)$$

gegeben ist. Dies ist aber gerade die Ableitung von $\varrho(u)$. Es gilt also der Satz: *Die n^{te} Ableitung des Krümmungshalbmessers der Kurve C ist gleich dem Krümmungsradius der n^{ten} Evolute $C^{(n)}$ dieser Kurve.*

$$\varrho^{(n)}(u) = p^{(n)}(u) + p^{(n+2)}(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

3. Graphisches Differentieren und Integrieren.

1. Differentiation. Es sei für eine gegebene Funktion $p(u)$ die Ableitung $p'(u)$ zu finden.

Wie man in rechtwinkligen Koordinaten ein Funktionsbild punktweise aufzeichnet, wird hier das Linienbild C von $p(u)$ linienweise gezeichnet, indem man von der Schar der Geraden $g(u)$ so viele konstruiert, dass mit genügender Genauigkeit in das von ihnen gebildete Polygon die Kurve C einbeschrieben werden kann.

Während man bei rechtwinkligen Koordinaten zur Ermittlung der Ableitung in einem vorgegebenen Kurvenpunkte die Tangente ziehen muss, so muss hier zu einer gegebenen Geraden $g(u)$ der Berührungspunkt P_u gefunden werden. Es ist alsdann die Strecke Q_uP_u gleich $p'(u)$ (Abb. 4).

Die Konstruktionen verlaufen vollkommen dual. Indem man in den Kurvenpunkten P_u überall die Normalen errichtet, erhält man die Geradenschar $g'(u)$, aus der man in ganz analoger Weise die Kurve C' gewinnt, die von g_u' in P_u' berührt wird. Alsdann ist auch die zweite Ableitung $p''(u)$ gewonnen; sie ist durch die Strecke $Q_u'P_u'$ dargestellt usw.

Dem *Differentiations*prozess entspricht das Zeichnen der *Evoluten* des Linienbildes.

Man hat dieses Verfahren nur rückwärts auszuführen, um von der Funktion zu ihrem Integral zu kommen.

2. Integration. Es sei die Funktion $p(u)$ gegeben und ihr erstes Integral

$$p_I(u) = a + \int_\alpha^u p(u)\, du$$

zu finden, das für $u = \alpha$ den Wert a annimmt, und dessen Linienbild C_I sei. Für diese Kurve ist C die Evolute (Abb. 6); C_I ist mithin eine Evolvente der gegebenen Kurve C, und zwar die eindeutig bestimmte, für die $p(\alpha) = a$ wird. Dabei ist zu beachten, dass die Polaraxe, von der aus u gerechnet wird, für die Kurve C_I um einen rechten Winkel im Zeigersinn nach rückwärts gedreht ist, also mit der negativen y-Axe zusammenfällt.

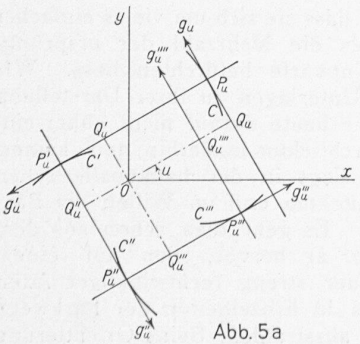

Abb. 5a

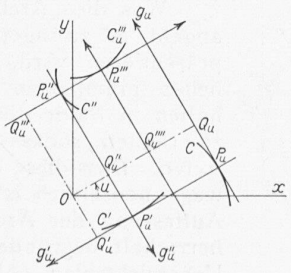

Abb. 5b

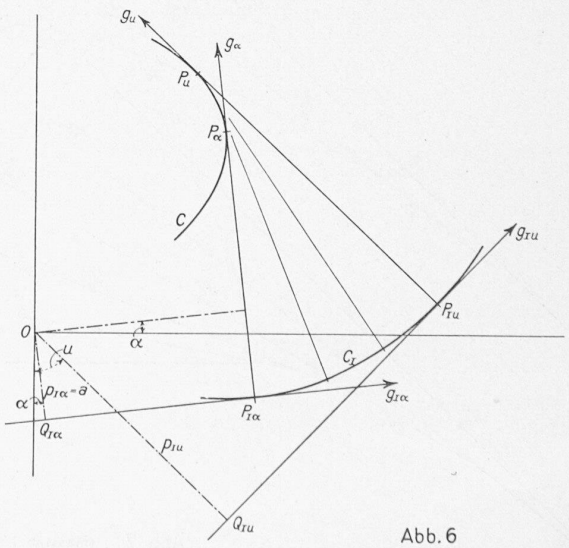

Abb. 6

Dem Prozess des *Integrierens* entspricht das Zeichnen der *Evolvente* des Linienbildes.

Den unendlich vielen möglichen Anfangswerten der Integralfunktion (Integrationskonstante) entsprechend gibt es unendlich viele Evolventen, die aber alle Parallelkurven sind, sodass sich die Stützfunktionen nur um eine additive Konstante voneinander unterscheiden.

4. Graphische Ausführung der Integration.

Man zeichnet zunächst vom Linienbild C der Funktion $p(u)$ eine genügend dichte Schar von Stützlinien $g(u)$. Im allgemeinen wird man den Zwischenwinkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Stützlinien gleich nehmen. Wenn irgendwo die Genauigkeit kleinere Winkelintervalle erfordert, können weitere Stützlinien eingeschaltet werden. Ist das Winkelintervall klein genug, so kann jetzt der Evolventenbogen zwischen zwei benachbarten Stützlinien g angenähert durch einen Kreisbogen ersetzt werden, dessen Mittelpunkt im Schnitt der zwei Stützlinien liegt. Da die einzelnen Kreisbögen gar nicht gezeichnet, vielmehr nur ihre Endpunkte mit dem Zirkel abgestochen werden müssen, ist das Verfahren rasch und einfach. Seine Genauigkeit hält den Vergleich mit den Resultaten der bekannten Integraphenapparate aus. Das Integrieren ist hier identisch mit dem Abwickeln eines Kurvenbogens auf eine Gerade, fusst also auf dem anschaulichen Begriff der Bogenlänge.

Beispiel 1. (Abb. 7) Integration von $p'(u) = 1/\cos(u)$.

In Abb. 7 wurde $OQ_0' = 1\ dm$ gemacht und $Q_0'Q_1' = Q_1'Q_2' = Q_2'Q_3' = Q_3'Q_4' = Q_4'Q_5' = 0{,}2\ dm$ abgetragen. Die Normalen g_i' auf die Linien OQ_i' geben dann Stützlinien an das Linienbild der Funktion $p' = 1/\cos(u)$. Nunmehr wurde die Evolvente C konstruiert, die der Annahme $p(0) = 0$ entspricht, also das Integral

$$p(u) = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} = \lg \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)$$

darstellt. Nachfolgend sind die gemessenen Werte $Q_i'P_i$ mit den nachträglich berechneten zusammengestellt.

Gemessen	Berechnet	Fehler
0,195	0,197	— 0,002
0,390	0,390	0,000
0,570	0,570	0,000
0,738	0,733	0,005
0,886	0,881	0,005

Die Ziffer der letzten Zeile, 0,886, stellt den Wert der Funktion für $u = \frac{\pi}{4}$ dar, also den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \lg (3 + \sqrt{2}).$$

Die Genauigkeit beträgt dort noch etwa $^1/_2$ %.

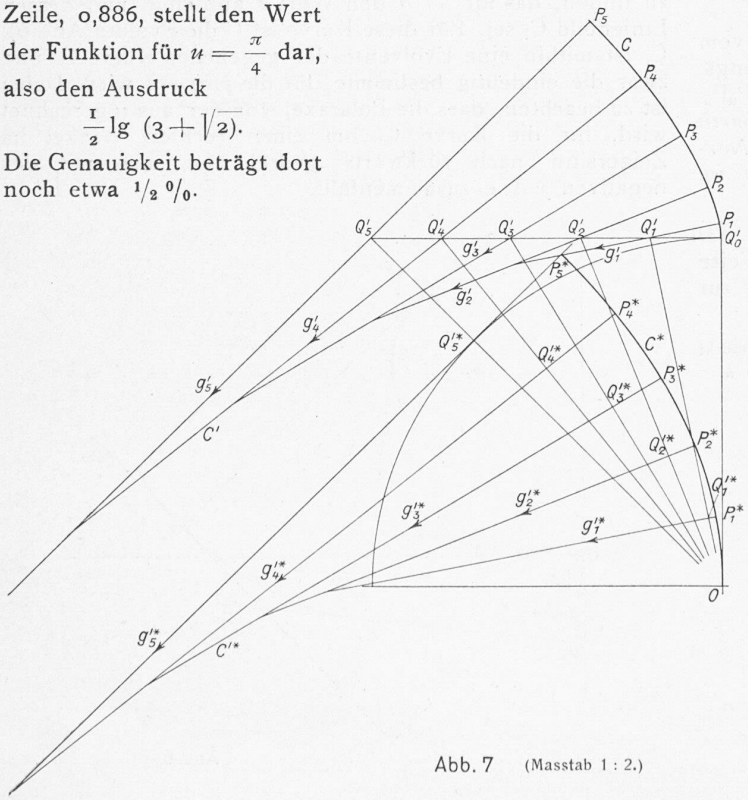

Abb. 7 (Masstab 1 : 2.)

2. Beispiel. Integration von $p'(u) = \operatorname{tg}(u)$ mit $p(0) = 0$, also Ermittlung der Funktion

$$p(u) = \lg \frac{1}{\cos(u)}$$

Es wurden in der gleichen Abbildung 7 die Strecken OQ_i^* gleich den Strecken $Q_0'Q_i'$ abgetragen und in ihren Endpunkten die Normalen zu den Richtungen OQ_i^* gezogen. Sie umhüllen das Linienbild C'^* der Funktion $p'(u) = \operatorname{tg}(u)$. Die der Anfangsbedingung $p(0) = 0$ genügende Evolvente ist C^*. Sie liefert das Linienbild der Funktion $p(u)$. Es ergab sich für die $Q_i'^* P_i^*$:

Gemessen	Berechnet	Fehler
0,017	0,018	— 0,001
0,070	0,074	— 0,004
0,154	0,154	0,000
0,249	0,247	0,002
0,348	0,347	0,001

Die letzte Ziffer, 0,348, ist ein Wert von $^1/_2 \lg(2)$. Er ergibt sich auf etwa 3 ‰ genau.

Die Uebereinstimmung ist sonach in beiden Fällen sehr gut und für praktische Zwecke wohl genügend. Dass sich beim Fortsetzen der Integration die Fehler anhäufen, liegt in der Natur der Sache. (Forts. folgt.)

Von den Völkerbund-Gebäuden in Genf.

Vor kurzem las man in der Tagespresse („N. Z. Z." vom 5. Okt. d. J., Nr. 1884) einen besorgniserregenden Bericht über die voraussichtlichen Kostenüberschreitungen beim Bau des Völkerbundgebäudes. Der Korrespondent bezog sich auf die Berichterstattung des schwedischen Delegierten Boheman vor der Völkerbundsversammlung über einen Sonderbericht der „Kontrollkommission", Unterkommission der „Budgetkommission", wonach der letztjährige *Voranschlag für das Völkerbundgebäude* nach neuesten Berechnungen der Architekten um etwa 7 Mill. Fr. überschritten werden dürfte. Zusammen mit der (auf Rechnung der Schenkung Rockefeller gehenden) *Bibliothek* wäre mit insgesamt 35,3 Mill. Fr. Baukosten zu rechnen. Nach dem gleichen Bericht denke die Budgetkommission an die „energischsten Massnahmen", wie vorübergehende gänzliche Einstellung der Bauten und Aenderung der Bauleitung, die den fünf Architekten abzunehmen und in eine Hand zu legen wäre. — Sodann verbreitete die Schweiz. Depeschenagentur am 1. November die Mitteilung, dass der *erste Teil (!)* der Arbeiten für die *Zufahrtstrassen* zum Ariana-Areal einen Kostenvoranschlag von *4 Mill. Fr.* aufweise, an die Bund und Kanton Genf erhebliche Beiträge leisten werden. Endlich soll die das Areal im untern Teil durchquerende Eisenbahnlinie Genf-Lausanne mit einem Kostenaufwand von rd. 830 000 Fr. bergwärts in einen Einschnitt verlegt und dadurch von obenher unsichtbar gemacht werden.

Diese allerdings alarmierenden Nachrichten haben uns veranlasst, an zuständiger Stelle Erkundigungen einzuziehen. Wir erhielten auch einen heute gültigen Uebersichtsplan (Abb. 2); die Abb. 1 (wiederholt aus Bd. 94) möge die allgemeine Situation in Erinnerung rufen (in der aber die Orientierung der Gebäude ungenau ist).

Was die „Architektur" der Völkerbund-Gebäude angeht, ist zu sagen, dass sie sich um vieles einfacher präsentieren wird, als die Mehrzahl der ursprünglichen prämiierten Entwürfe befürchten liess. Wir hoffen in Bälde die Unterlagen zu ihrer Darstellung zu erhalten, sodass wir heute darauf nicht näher eintreten. Dass diese Architektur immerhin noch keineswegs neuzeitlich ist, liegt in der baukünstlerischen Auffassung der Architekten und im Willen der Bauherrschaft begründet. Es geht dies schon aus dem Uebersichtsplan (Abb. 2) hervor, der auf einem System kreuz und quer streng rechtwinkliger Axen aufgebaut ist, die bis in Einzelheiten der Parkwege in den untern Teilen ausstrahlen. Seine Orientierung