Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 97/98 (1931)

Heft: 14

Artikel: Ueber die Bewegung von Luftblasen in ruhendem und fliessendem Wasser

Autor: Dubs, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44672

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Ueber die Bewegung von Luftblasen in ruhendem und fliessendem Wasser. — Internationaler Wettbewerb für die Dreirosenbrücke über den Rhein in Basel. — Leipziger Baumesse-Siedlung. — Schweizer Mustermesse Basel, 11. bis 20. April 1931. — Mitteilungen: Die Salinen-Anlage Volterra. Die Weltgewinnung an Roheisen und Rohstahl. Geschweisste Eisenkonstruktionen im Hochbau und Maschinenbau. Groupe pour l'Architecture nouvelle à Genève. Bund Schweizer Architekten. Eidgenössische Technische Hochschule. Neues Rollmaterial auf dem Bündnerischen Eisenbahnnetz. — Wettbewerbe: Schulhaus-Anlage in Seebach. Bebauungsplan der Gemeinde Zollikon. Spital in Zagreb. — Nekrologe: Carlo Müller. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 97 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 14

Ueber die Bewegung von Luftblasen in ruhendem und fliessendem Wasser.

Von Dipl. Masch.-Ingenieur R. DUBS, Professor an der E. T. H. Zürich.

Es ist bekannt, dass alle Flüssigkeiten bei einem bestimmten Druck eine gewisse Menge von Gasen zu absorbieren, d. h. mechanisch zu binden vermögen. Dieses Absorptionsvermögen ist nach dem Gesetz von Henry direkt proportional dem Druck, unter dem die Flüssigkeit steht. Wird der Druck erhöht, so werden mehr Gase gebunden, und wird er erniedrigt, so wird ein entsprechender Teil des mechanisch gebundenen Gases frei. Im folgenden soll nun insbesondere das Verhalten der Luft gegenüber dem Wasser untersucht und die Bewegung von Luftblasen im Wasser theoretisch und experimentell verfolgt werden. Die Abklärung dieses Vorganges hat hauptsächlich für jene technisch-praktischen Fälle eine besondere Bedeutung, wo Wasser während des Fliessens von einem Orte höheren Druckes (Atmosphärendruck) zu einem Orte niedereren Druckes (Unterdruck) gelangt. Dies ist z. B. der Fall bei Wasserturbinen, wo beim Austritt des Wassers aus dem Laufrad einer Reaktionsturbine immer ein ziemlich starker Unterdruck herrschen wird; auch bei Heberleitungen treten solche Unterdrücke auf, die, wie oben erwähnt, ein Ausscheiden von Luft aus dem Wasser zur Folge haben. Der Vollständigkeit halber muss hier noch bemerkt werden, dass auch sehr oft Luft bei sich heftig bewegendem Wasser mitgerissen wird, sie dann aber an den Stellen, wo das Wasser ruhiger fliesst, aus ihm wieder austritt, ohne dass eine Druckänderung stattfindet.

Da infolge von Luftansammlungen oft Störungen im Betrieb von hydraulischen Einrichtungen und Maschinen auftreten, ist es nicht nur von wissenschaftlichem, sondern auch von technisch-praktischem Interesse, die Bewegung von Luftblasen im Wasser bei verschiedenen Wassergeschwindigkeiten nicht nur theoretisch, sondern auch experimentell zu untersuchen. Es können dann die Bedingungen festgestellt werden, die zu erfüllen sind, um die sich im Wasser entwickelnden Luftblasen zu entfernen.

Eine experimentelle Untersuchung über die Bewegung von Luftblasen in ruhendem Wasser findet sich in der „Physikalischen Zeitschrift" Nr. 23 vom 1. Dezember 1927, wo Felix M. Exner unter dem Titel „Ueber die Aufstieggeschwindigkeiten von Luftblasen im Wasser" über seine Beobachtungen mit Luftblasen im Lunzer See berichtet. Als wesentlichstes Ergebnis hat er festgestellt, 1. dass die Steiggeschwindigkeit der Luftblase von der Tiefenlage kaum abhängt, sondern bei bestimmter Blasengrösse ziemlich konstant ist, und 2. dass sie mit der Blasengrösse zunimmt.

Es wurden im See Beobachtungen mit Aufstieghöhen von 5 bis 30 m (unter dem Wasserspiegel) durchgeführt und Luftblasen von etwa 20 mm und etwa 200 mm Durchmesser erzeugt. Für die kleinen Blasen ergab sich eine mittlere Aufstieggeschwindigkeit von 0,26 bis 0,27 m/s, für die grossen Blasen von 0,65 bis 0,70 m/s. Unter der Voraussetzung, die Luftblase hätte eine kugelige Form, leitet dann Exner auf Grund des Energieprinzipes (die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist konstant) eine einfache Beziehung zur Berechnung der Aufstieggeschwindigkeit C_e der Luftblase ab. Er findet:

$$C_e = \frac{4}{\pi}\sqrt{r g\left(l - \frac{\gamma_e}{\gamma_w}\right)}$$

und wenn man das spezfischen Gewicht der Luft gegenüber jenem des Wassers vernachlässigt:

$$C_e = \frac{4}{\pi}\sqrt{r g}$$

wobei r der Radius der Luftblase und g die Anziehung der Erde 9,806 m/s² bedeutet. In Wirklichkeit hat nun aber die Luftblase nicht eine genau kugelige Form, sondern sie ist in vertikaler Richtung etwas zusammengedrückt und gleicht eher einem Rotationsellipsoid, dessen kleine Halbaxe b senkrecht steht. Diese von Exner beobachtete Form stimmt auch mit meinen Beobachtungen überein. Für eine so geformte Luftblase erhält dann Exner zur Berechnung der Aufstieggeschwindigkeit die Beziehung:

$$C_e = \frac{4\, b\sqrt{b\, g\left(1 - \frac{\gamma_e}{\gamma_w}\right)}}{a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)}$$

wobei: $$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

die numerische Exzentrizität bedeutet. Vernachlässigt man auch hier wieder γ_e gegenüber γ_w, so folgt

$$C_e = \frac{4}{\pi}\,\frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{b\, g}}{1 - \varepsilon^2/4}$$

Wenn man nun diese Formel zur Berechnung der Steiggeschwindigkeit der Luftblasen in ruhendem und unbegrenztem Wasser verwendet, so ergibt sich qualitativ und auch quantitativ eine ganz hübsche Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von Exner. Dass die Uebereinstimmung nicht eine vollständige sein kann, ist wohl einerseits dadurch begründet, dass in seinen Beziehungen die Veränderlichkeit des Volumens der Luftblase während des Aufstieges nicht zum Ausdruck gelangt und die Reibung vernachlässigt wurde; anderseits bestehen auch gewisse Unterschiede in den Beobachtungswerten.

Da die Versuche ausserdem in unbegrenztem und ruhendem Wasser (einem See) durchgeführt wurden, bieten sie für die Technik nicht das gleiche Interesse wie solche in begrenztem Wasser (Gefässe, Röhren). Im folgenden soll deshalb, anschliessend an eine kurze theoretische Betrachtung des Bewegungsvorganges, über Versuchsergebnisse berichtet werden, die in der hydraulischen Abteilung der Eidgen. Techn. Hochschule gefunden worden sind.

Der Einfachheit halber soll vorerst angenommen werden, die Luftblase habe eine kugelige Form, und es soll ihre Bewegung in ruhigem Wasser verfolgt werden. Wir denken uns z. B. die Blase in ein gefülltes Rohr unten eingeführt; sie steht dabei unter dem absoluten Druck $p_a + \gamma h$, wo p_a den Atmosphärendruck bedeutet und h die Tiefe unter dem Wasserspiegel an der Stelle, wo die Blase eingeführt wird (Abb. 1). Die Blase wird dann im Rohre aufwärts steigen, und da sie hierbei unter kleinern Druck kommt, wird sie sich ausdehnen. Da die spez. Wärme des Wassers bedeutend grösser ist als jene der Luft und ebenso die Masse des Wassers ganz bedeutend grösser als jene der Luftblase, wird die Expansion der Blase isotherm, d. h. mit der Wassertemperatur erfolgen, und es lässt sich dann leicht die Expansionsarbeit und die der Luftblase vom Wasser zuzuführende Wärmemenge berechnen. Die Expansionsarbeit der Blase setzt sich in Hebearbeit des Wasserspiegels im Rohre um, indem dieser Wasserspiegel entsprechend der Ausdehnung der Blase gehoben wird.

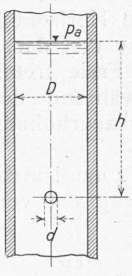


Abb. 1.

Ist v das spez. Volumen $1/\gamma_e$ m³/kg, G das Gewicht in kg, p der Druck (abs.) in der Luftblase in kg/m², so gilt:

$$p\, v = p_1\, v_1 = R\, T = \text{konstant},$$

wo R die Gaskonstante und T die absolute Temperatur.

Bezeichnet man mit Index 1 den Anfangs- und mit Index 2 den Endzustand der Luftblase, so erhält man für die Expansionsarbeit A den Ausdruck:

$$A = p_1 v_1 \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = p_2 v_2 \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

oder auch: $$A = R T_1 \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = R T_1 \lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Es ist dies die Arbeit für 1 kg Luft. Um die Expansionsarbeit der Luftblase zu berechnen, ist dann das Gewicht G der Blase einzusetzen.

Die der Luftblase zuzuführende Wärmemenge Q ist zu berechnen aus:

$$Q = G A R T_1 \lg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = G A R T_1 \lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

wobei $A = 1/427$ das mech. Wärmeäquivalent und T_1 die absolute Temperatur der Luftblase am Anfang bedeutet.

Da das Gewicht der Luftblase sehr klein ist, so ist auch ihre Expansionsarbeit klein und damit auch die Wärmemenge, die vom Wasser ihr zugeführt werden muss, um ihre Temperatur konstant zu halten.

Bezeichnet man den Durchmesser des Rohres, in dem die Luftblase aufsteigt, mit D, so ergibt sich für die Niveauerhöhung h im Rohre infolge der Expansion der Luftblase die Beziehung:

$$\frac{\pi}{4} D^2 \Delta h \frac{\Delta h}{2} \gamma_w = A G$$

Setzt man oben diesen Wert ein, so erhält man:

$$\Delta h^2 D^2 = \frac{8 R T_1}{\pi \gamma_w} \lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right) G$$

$$\Delta h = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{R T_1}{\gamma_w} \lg\left(\frac{p_1}{p_2}\right) G}$$

Nimmt man z. B., wie dies bei den Versuchen im Maschinenlaboratorium zutraf, den Durchmesser der Luftblase zu 4 mm, die Temperatur 12° Celsius, den Druck $p_1 =$ 1,2365 kg/m² und $p_2 =$ 1,000 kg/m², den Durchmesser des Rohres $D = 27$ mm, so folgt:

$$\Delta h = \frac{1}{0{,}027} \sqrt{\frac{8}{\pi} \times \frac{29{,}26 \times 285 \times 2{,}303 \times 0{,}09220}{1000 \times 25{,}4 \times 1000}} = 14{,}0 \text{ mm.}$$

Da bei den Versuchen im Laboratorium die Luftblase in einer Tiefe von 2365 mm unter dem Wasserspiegel in das Rohr eingeführt wurde und infolge der Expansion der Blase der Wasserspiegel im Rohr bis zum Austreten der Blase aus dem Wasser um 14,0 mm gehoben worden wäre, wenn das Rohr oben unmittelbar in die Atmosphäre gemündet hätte, wäre während der Bewegung der Luftblase eine Druckänderung in jeder Niveauhöhe des Rohres erfolgt. Diese Druckänderung hätte z. B. an der Einführungstelle 14,0 mm Wassersäule betragen, d. h. der Druck wäre von 1,2365 kg/cm² auf 1,2379 kg/cm² gestiegen, also um etwa 0,15 %. Obwohl nun diese kleine Druckänderung praktisch bedeutungslos gewesen wäre, wurde doch, um womöglich alle Fehlerquellen auszuschalten, das Rohr oben an einen Behälter von grösserem Horizontalquerschnitt angeschlossen, sodass die Luftblase erst durch den Behälter steigen musste, bevor sie ins Freie treten konnte. In diesem Behälter konnte nun während des Emporsteigens der Luftblase keine sichtbare Niveauerhöhung festgestellt werden.

Für die Expansionsarbeit der Blase von 4 mm Durchmesser erhält man dann unter Zugrundelegung der vorstehenden Daten:

$$A G = \frac{29{,}26 \times 285 \times 2{,}303 \times 0{,}09220}{29{,}9 \times 1000^2} = \frac{6}{10^5} \text{ mkg}$$

und die vom Wasser der Luftblase zuzuführende Wärmemenge beträgt:

$$Q = \frac{A G}{427} = \frac{1}{71{,}3 \times 10^5} \text{ kcal}$$

Wie man aus diesen Rechnungen ersieht, handelt es sich bei der Expansion solcher Luftblasen um sehr kleine Wärmemengen und dementsprechend auch um kleine Expansionsarbeiten. Da sich in unserm Falle z. B. das Volumen der Luftblase während des Aufstieges um maximal 24 % vergrössert, würde sich bei Kugelform der Blase der Radius um maximal 7,5 % vergrössern, und nach den Beziehungen von Exner hätte diese Vergrösserung nur eine maximale Aenderung der Aufstieggeschwindigkeit der Luftblase von nicht ganz 4 % zur Folge. Mit Rücksicht auf diese verhältnismässig kleine Beeinflussung der Bewegung der Luftblase durch die Expansion der Luft könnte also die Expansion bei der theoretischen Betrachtung der Bewegung vernachlässigt werden. Da es sich hier noch weiter um ein Problem der Wärmeleitung handelt (Uebergang der Wärme vom ruhenden und bewegten Wasser in die Luftblase), und dies ein Gebiet ist, über das heute noch keine vollständig übereinstimmenden Ansichten bestehen, soll in den folgenden Ableitungen die Expansionsarbeit der Blase und was damit zusammenhängt, d. h. die Abkühlung des Wassers und die Niveauerhöhung des freien Wasserspiegels nicht berücksichtigt werden.

I. BEWEGUNG DER LUFTBLASE IN RUHENDEM WASSER.

Wir schreiten nun zur Aufstellung der Bewegungsgleichung der Luftblase und zwar vorerst unter der Voraussetzung, dass das Wasser im Rohre ruhe.

Es bedeutet:

V = Volumen der Luftblase in m³,
C_e = Geschwindigkeit der Luftblase in m/s,
d = Durchmesser der Luftblase in m,
r = $d/2$ (ihr Radius),
γ_e = spezifisches Gewicht der Luft kg/m³,
k = Koeffizient des Widerstandes, der eine Funktion der Reynolds'schen Zahl,
$R_e = \frac{C_e d \varrho}{\eta} = \frac{C_e d}{\nu}$ ist,

wobei $\varrho = \gamma_w / g$ = spezifische Masse des Wassers,
η = Zähigkeit des Wassers,
$\nu = \eta/\varrho$ = kinematische Zähigkeit des Wassers,
m = Masse der Luftblase.

Während der Bewegung der Luftblase ist ihre Masse konstant. Es kann zwar vorkommen, dass die Blase sich während der Bewegung in zwei Blasen auflöst, wobei dann nach den Beobachtungen von Exner, in Uebereinstimmung mit seiner Theorie, die Aufstieggeschwindigkeit der zwei kleinern Blasen kleiner ist als die Aufstieggeschwindigkeit der grossen Blase. Es stimmt dies auch mit meinen Beobachtungen überein. Im allgemeinen bleibt aber die Blase intakt, und es soll deshalb in den folgenden Ableitungen mit einer kompakten Blase gerechnet werden. Nach Newton folgt dann:

$$m \frac{d C_e}{dt} = V(\gamma_w - \gamma_e) - k \frac{\pi}{4} d^2 \gamma_w \frac{C_e^2}{2g}$$

Wenn nun die Luftblase eine reine Kugelform hätte und um sie herum eine Potentialströmung herrschen würde, so würde der Widerstand, d. h. das zweite Glied der Gleichung, verschwinden, wie dies aus der Kugelpotentialfunktion von Dirichlet ohne weiteres hervorgeht.

Bezeichnet man nämlich mit C_x, C_y und C_z die Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen der drei Koordinatenaxen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und liegt eine Potentialströmung um die Kugel vor, so besteht eine Geschwindigkeitspotentialfunktion φ, die so beschaffen ist, dass:

$$C_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad C_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad C_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ wird.}$$

Erfolgt nun die Bewegung in Richtung der z-Axe, die in unserm Falle mit der Rohraxe zusammenfällt, so wird $C_e = C_z$, und nach Dirichlet ist:

$$\varphi = -C_e Z \left(1 + \frac{R^3}{2 r^3}\right)$$

wo R der Kugelradius und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bedeutet. Berechnet man nun vermittelst der Potentialfunktion φ die Geschwindigkeitskomponenten C_x, C_y und C_z und hieraus die totale Geschwindigkeit $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$, so erhält man nach dem Satze von Bernoulli die Druckverteilung um die Kugel, wobei sich zeigt, dass die Drücke an symmetrisch liegenden Stellen vor und hinter der Kugel gleich sind, sodass der resultierende Druck auf die Kugel gleich Null wird. Da nun aber in Wirklichkeit die kugelförmige

Blase während ihres Aufstieges einen Widerstand erfährt, kann um sie keine Potentialströmung herrschen, und man hat den Widerstand auf Grund empirischer Beziehungen in die Bewegungsgleichung einzusetzen. Für die Grösse und die Art des Widerstandes ist die Reynolds'sche Zahl massgebend, weshalb diese vorerst bestimmt werden soll.

Es ist: $R_e = \frac{C_e\, d\, \varrho}{\eta}$

Bei den Versuchen war im Maximum:

$$C_e = 0{,}240 \text{ m/s}$$
$$d = 0{,}004 \text{ m}$$
$$\varrho = \gamma/g = 1000/9{,}81 = 102 \text{ kg s}^2/\text{m}^4$$

und bei 12° Celsius: $\eta = 0{,}000126$ kg s/m²

Somit: $R_e = \frac{0{,}240 \times 0{,}004 \times 102}{0{,}000126} = 780$

Für diesen kleinen Wert der Reynolds'schen Zahl wird die Strömung um die Luftblase laminar verlaufen, d. h. wir haben eine reine Reibungsströmung um die Blase.

Nach einer Theorie von Newton[1]) wäre $k = 0{,}5$ zu setzen, während Borda $k = 0{,}56$, Hutton $k = 0{,}594$ und Beaufoy $k = 0{,}383$ fand. Du Buat kehrte zu dem $k = 0{,}50$ Newtons zurück. Bei so kleinen Reynolds'schen Zahlen wie oben ist der Widerstand nicht mehr proportional mit C_e^2, sondern nur proportional mit C_e. Nach G. G. Stokes ist dann der Widerstand gleich $6\pi\eta\frac{d}{2}C_e$, d. h. man erhält für den Widerstandskoeffizienten k den Wert:

$$k = \frac{24}{R_e}$$

Nach C. W. Oseen gilt diese Beziehung jedoch nur in erster Annäherung; mit grösserer Genauigkeit sei:

$$k = \frac{24}{R_e}\left(1 + \frac{3}{8}\,\frac{\gamma_e\, d\, C_e}{2\,\eta\, g}\right)$$

Für eine seitliche Begrenzung des Wassers, d. h. also für unsern Fall, hat H. Faxen die Theorie von Oseen noch weiter ausgebildet, wobei sich zeigt, dass die Wandungen die Bewegung der Kugel beeinflussen. Auf diese Erkenntnis ist bei der Interpretation der Versuchsergebnisse Rücksicht zu nehmen. Die Versuche von H. Liebster und L. Schiller und insbesondere jene von H. S. Allen haben dann gezeigt, dass die Wirklichkeit zwischen den Werten von Oseen und Stokes liegen dürfte.

Setzt man:

$$k = 0{,}5 + \frac{24}{R_e}$$

d. h. ergänzt man die Beziehung von Stokes durch die Konstante von Newton, so erhält man k-Werte, die zwischen denen von Stokes und Oseen, aber durchwegs tiefer als die von Allen gefundenen Werte liegen. Eine ziemlich gute Uebereinstimmung mit den Versuchswerten von Allen erhält man durch die Beziehung:

$$K = 0{,}5 + \frac{40}{R_e}$$

die für Reynolds'sche Zahlen von 1 bis 1000 verwendet werden kann, also einen grossen Teil des laminaren Gebietes bestreicht.

Setzt man diesen Wert von k in die Bewegungsgleichung der Luftblase ein, so folgt:

$$m\frac{d\,C_e}{dt} = V(\gamma_w - \gamma_e) - \left(0{,}5 + \frac{40}{R_e}\right)\frac{\pi}{4}\,d^2\,\gamma_w\,\frac{C_e^2}{2g}$$

Nach den Beobachtungen führt die Luftblase nach dem Einführen in das Wasser vorerst eine beschleunigte Bewegung aus und kommt ziemlich rasch zur gleichförmigen Bewegung mit konstanter Aufstieggeschwindigkeit. Bevor die Bewegung während der Beschleunigungsperiode durch Integration der Differentialgleichung dargestellt wird, soll die konstante Aufstieggeschwindigkeit ermittelt werden.

Es ist: $\frac{d\,C_e}{dt} = 0$

Somit: $\frac{\pi}{6}\,d^3(\gamma_w - \gamma_e) = \left(0{,}5 + \frac{40}{R_e}\right)\frac{\pi}{4}\,d^2\,\gamma_w\,\frac{C_e^2}{2g}$

und hieraus:

$$C_e = \sqrt{\frac{2\left(1 - \frac{\gamma_e}{\gamma_w}\right)}{3\left(0{,}5 + \frac{40}{R_e}\right)}}\sqrt{2\,g\,d}$$

[1]) Siehe *Forchheimer*: „Hydraulik" 1930.

Wie man ohne weiteres erkennt, erscheint der Einfluss des Blasendurchmessers d in dieser Relation in gleicher Form wie in der eingangs erwähnten Beziehung von Exner. Da sie jedoch die Reynolds'sche Zahl R_e, die Geschwindigkeit C_e und den Blasendurchmesser d enthält, dürfte es zweckmässig sein, C_e noch unabhängig von R_e darzustellen. Für grosse Werte der Reynolds'schen Zahl ($R_e \geq 500$) und bei Vernachlässigung von γ_e/γ_w gegenüber der Einheit kann man setzen:

$$C_e = \sqrt{\frac{20}{15}}\sqrt{2\,g\,d}$$

oder

$$C_e = 4\sqrt{\frac{g\,r}{3}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

d. h. die Aufstieggeschwindigkeit wird grösser als nach den Beziehungen von Exner, der für eine kugelförmige Blase

$$C_e = \frac{4}{\pi}\sqrt{g\,r}$$

im unbegrenzten Medium gefunden hat. Wenn man die Reynolds'sche Zahl aus der Gleichung zur Bestimmung von C_e eliminiert und dann nach C_e auflöst, erhält man:

$$C_e = \sqrt{\left(\frac{40\,\eta}{d\,\varrho}\right)^2 + \frac{8\,g\,d}{3}} - \frac{40\,\eta}{d\,\varrho} \quad \ldots \quad (2)$$

Wendet man diese Beziehung auf unser Beispiel an, so ergibt sich bei: $\eta = 0{,}000126\,\frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}$, $d = 0{,}004$ m, $\varrho = 102\,\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$ eine maximale Aufstieggeschwindigkeit der Luftblase von:

$$C_e = 0{,}311 \text{ m/s}$$

während die direkte Beobachtung nur eine Geschwindigkeit ergab von: $C_e = 0{,}240$ m/s

Diese Differenz ist darauf zurückzuführen,

1. dass zur Berechnung des Widerstandes der Koeffizient k nach den Versuchen von Allen eingesetzt wurde,
2. dass die Luftblase keine genaue Kugelform besitzt, sondern ein Rotationsellipsoid mit vertikaler Drehaxe darstellt, wodurch der Widerstand vergrössert wird,
3. kommt noch der Einfluss der Begrenzungswände des Rohres hinzu.

Die Versuche mit verschiedenen Blasengrössen haben nämlich gezeigt, dass die Aufstieggeschwindigkeit der Blase mit ihrem Durchmesser nicht stets zunahm, wie dies nach der Theorie und den Versuchen von Exner der Fall sein sollte, sondern dass sie im Gegenteil von einer gewissen Blasengrösse an wieder abnahm.

Es soll nun vorerst der Einfluss des endlichen Rohrdurchmessers D auf die Aufstieggeschwindigkeit der Luftblase in die Rechnung eingeführt und dann die Beeinflussung durch die Ellipsoidalform untersucht werden.

Infolge des endlichen Rohrdurchmessers D muss das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit C_w an der Blase vorbei nach unten fliessen, womit ihm eine kinetische Energie erteilt wird. Wenn in der Zeit Δt das ganze Volumen V der Luftblase durch deren Aufstieg unten mit Wasser ausgefüllt werden muss, gilt:

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,C_w\,\Delta t = V = \frac{\pi}{6}\,d^3$$

Anderseits ist dann:

$$C_e\,\Delta t = d \qquad \Delta t = \frac{d}{C_e}$$

Daraus folgt:

$$C_w = \frac{2}{3}\,\frac{d^2}{D^2}\,\frac{1}{1 - \frac{d^2}{D^2}}\,C_e$$

Der dem Wasser erteilte Impuls ist dann:

$$P_w = \frac{\gamma_w\,Q}{g}\,C_w$$

und, da $Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{\pi}{6}\,d^3\,\frac{C_e}{d} = \frac{\pi}{6}\,d^2\,C_e$

folgt:

$$P_w = \frac{\pi}{9}\,\frac{\gamma_w}{g}\left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{d^2}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}\,C_e^2$$

Infolge der Strömung des Wassers mit der Geschwindigkeit C_w entstehen an den Wandungen Reibungsverluste, die einen Druckunterschied zwischen oben und unten zur Folge haben.

Es ist allgemein:

$$h_v = f(R_w') \frac{l}{D} \frac{C_w^2}{2g}$$

wo: $R_w' = \frac{C_w D}{\nu}$, $\Delta p = \gamma_w h_v$

Wenn die Luftblase um ihren Durchmesser aufsteigt, legen die Wasserteilchen den Weg d zurück. Man erhält dann:

$$p = \frac{\gamma_w}{2g} f(R_w') \frac{d}{D} \frac{4}{9} \left(\frac{d}{D}\right)^4 \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2} C_e^2$$

und die wirkende Kraft P_v ist dann:

$$P_v = \frac{\pi}{4} D^2 \Delta p$$

Setzt man die betreffenden Werte ein, so ergibt sich:

$$P_v = \frac{\pi}{18} \frac{\gamma_w}{g} f(R_w') \left(\frac{d}{D}\right)^5 \frac{D^2}{\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2} C_e^2$$

Ausser dem Kugelwiderstand müssen vom Auftrieb der Luftblase auch noch die Kräfte P_w und P_v überwunden werden.

Da wir uns, wie vorstehend gezeigt worden ist, meistens im Gebiet der laminaren Strömung befinden, ist $f(R'_w) = \frac{64}{R_w'}$ (wenn $R_w' < 2500$) und man erhält:

$$P_v = \frac{32\pi}{9 R_w'} \frac{\gamma_w}{g} \left(\frac{d}{D}\right)^5 \frac{D^2}{\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2} C_e^2$$

Die allgemeine Bewegungsgleichung der Luftblase geht dann über in:

$$m \frac{dC_e}{dt} = V(\gamma_w - \gamma_e) - \left(0{,}5 + \frac{40}{R_e}\right) \frac{\pi}{4} d^2 \gamma_w \frac{C_e^2}{2g} - P_w - P_v$$

Nimmt man nun die Periode der gleichförmigen Bewegung, so ist:

$$\frac{dC_e}{dt} = 0$$

und man erhält:

$$\frac{\pi}{6} d^3 (\gamma_w - \gamma_e) = \left(0{,}5 + \frac{40}{R_e}\right) \frac{\pi}{4} d^2 \gamma_w \frac{C_e^2}{2g} +$$

$$\frac{\pi}{9} \frac{\gamma_w}{g} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{d^2}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2} C_e^2 + \frac{32}{9} \frac{\pi}{R_w'} \frac{\gamma_w}{g} \left(\frac{d}{D}\right)^5 \frac{D^2}{\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]^2} C_e^2$$

und daraus:

$$C_e = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1 - \frac{\gamma_e}{\gamma_w}}{0{,}5 + \frac{40}{R_e} + \frac{8}{9} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{256}{9 R_w} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon^2)^2}}} \sqrt{2 g d}$$

wobei:

$$\varepsilon = \frac{d}{D} \text{ und } 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Setzt man nun in obiger Gleichung:

$$C_e^* = \sqrt{2 g d},$$

wobei C_e^* eine theoretische Geschwindigkeit bedeutet, so folgt:

$$\frac{C_e}{C_e^*} = K_{C_e} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1 - \frac{\gamma_e}{\gamma_w}}{0{,}5 + \frac{40}{R_e} + \frac{8}{9} \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{256}{9 R_w'} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon^2)^2}}}$$

Da das letzte Glied im Nenner unter der Quadratwurzel gegenüber den andern Gliedern meistens sehr klein ist, kann man es in erster Annäherung ohne wesentlichen Fehler vernachlässigen; der Einfachheit halber soll vorläufig auch das Glied $\frac{40}{R_e}$ nicht berücksichtigt werden, um den Einfluss von ε in den Vordergrund treten zu lassen. Ebenso soll γ_e/γ_w mit Rücksicht auf die Einheit gestrichen werden. Man erhält dann:

$$K_{C_e} = \sqrt{\frac{0.75}{0{,}563 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}} = \psi(\varepsilon)$$

In Abb. 2 ist nun die Aenderung von K_{C_e} in Funktion von ε eingetragen und man erkennt, dass für $\varepsilon = 0$ der Wert von K_{C_e} ein Maximum erreicht.

Berechnet man weiter mit der vereinfachten Formel für K_{C_e} die Geschwindigkeit C_e, wie folgt:

$$C_e = \sqrt{\frac{0{,}75}{0{,}563 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}} \sqrt{2 g d}$$

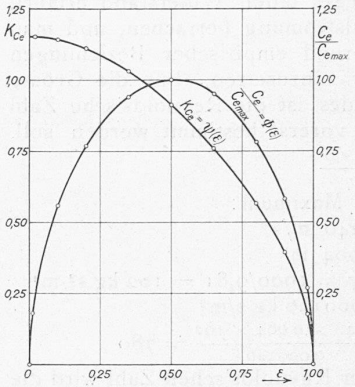


Abb. 2.

UEBER DIE BEWEGUNG VON LUFTBLASEN IN RUHENDEM UND FLIESSENDEM WASSER.

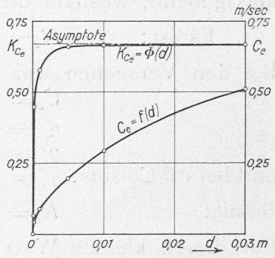


Abb. 3.

und wenn man nach Definition: $d = \varepsilon D$ setzt, so ergibt sich:

$$C_e = \sqrt{\frac{0{,}75\,\varepsilon}{0{,}563 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}} \sqrt{2 g D}$$

Hält man nun D konstant und denkt sich nur d geändert, so variiert ε, und man kann den Punkt bestimmen, für den C_e ein Maximum wird. Durch Differentiation und Nullsetzen erhält man für C_e ein Maximum bei $\varepsilon = 0{,}50$. Damit ergibt sich:

$$C_{e_{max}} = 0{,}6475 \sqrt{2 g D}$$

Bildet man nun:

$$\frac{C_e}{C_{e_{max}}} = \sqrt{\frac{1{,}79}{0{,}563 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}} = \Phi(\varepsilon)$$

so lässt sich für jeden Wert von ε das Verhältnis zwischen der Steiggeschwindigkeit C_e und der maximalen Geschwindigkeit $C_{e_{max}}$ berechnen. Diesen Zusammenhang zeigt Abb. 2. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass insbesondere wegen der Vernachlässigung von R_e die beiden Kurven in Abb. 2 nur ein angenähertes Bild geben.

Wendet man weiter die allgemeine Gleichung zur Berechnung von C_e auf einen unendlich grossen Rohrdurchmesser ($D \rightarrow \infty$) an, so wird für endliche Blasendurchmesser d der Wert $\varepsilon = 0$, und man erhält:

$$C_e = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{0{,}50 + \frac{40}{R_e}}} \sqrt{2 g d}$$

und:

$$K_{C_e} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{0{,}50 + \frac{40}{R_e}}}$$

wobei $R_e = \frac{C_e d}{\nu}$ die Reynolds'sche Zahl der Luftblasengeschwindigkeit bezeichnet.

Rechnet man mit Wasser von 20° Celsius, so ist $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s und man erhält:

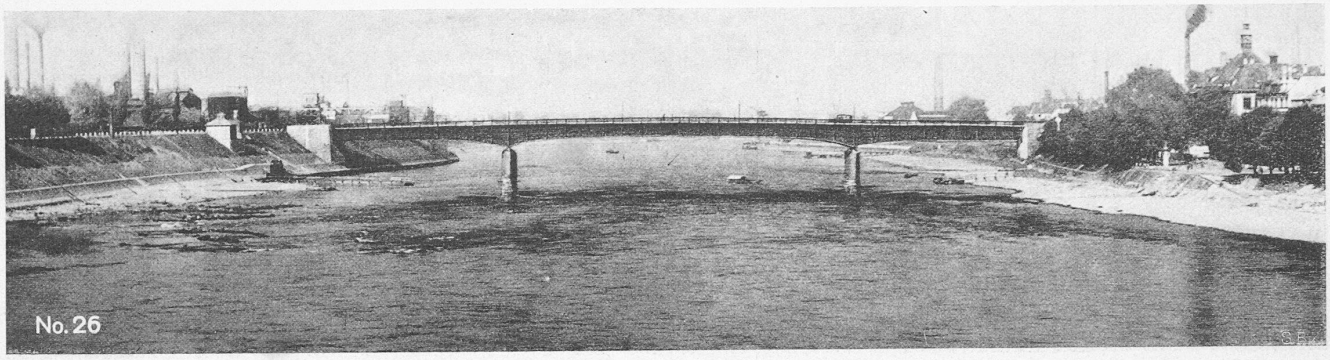
$$K_{C_e} = \sqrt{0{,}444 + \frac{9 \times 10^{-12}}{d^3} - \frac{3 \times 10^{-6}}{d \sqrt{d}}}$$

In Abb. 3 ist nun dieser Verlauf von K_{C_e} in Funktion des Blasendurchmessers dargestellt, sowie auch der Verlauf der Aufstieggeschwindigkeit C_e. Man erkennt, dass beim Aufstieg einer Luftblase im unbegrenzten Medium der Wert K_{C_e} sehr rasch einen konstanten Grenzwert erreicht, sodass dann die Geschwindigkeit C_e nur noch eine Funktion des Blasendurchmessers ist.

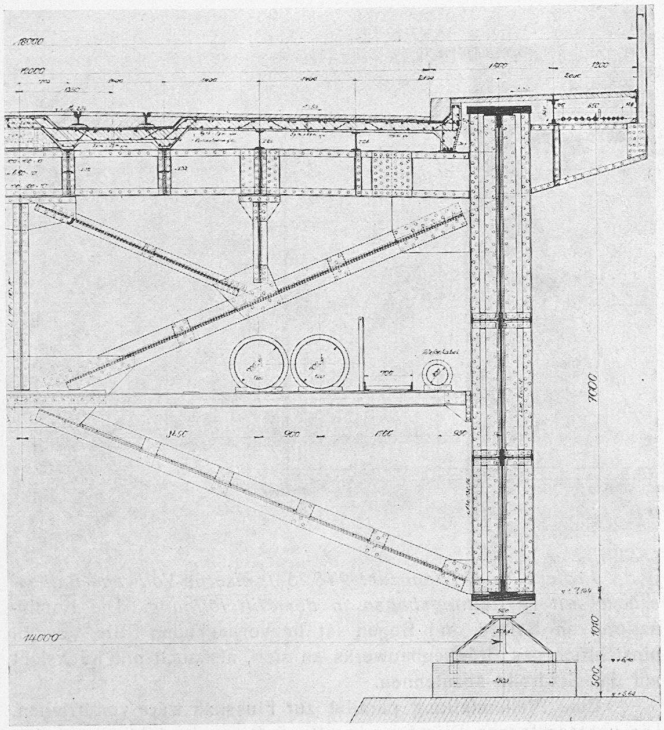
In unserm Falle war:

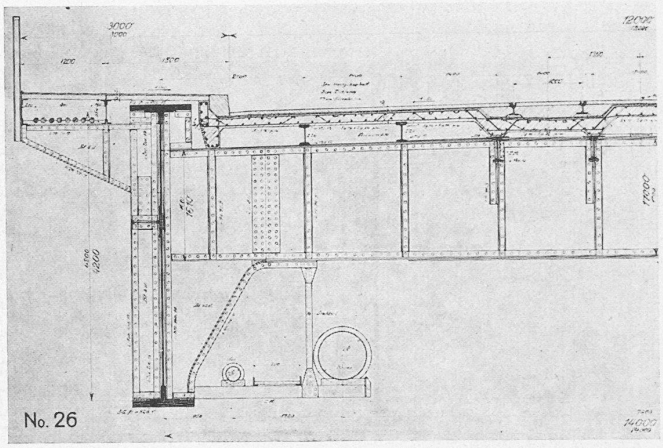
$\varepsilon = \frac{4}{27} = \frac{1}{6{,}75}$, $R_e = 780$ (angenähert), $\gamma_e = 1{,}200$ kg/m³ $\gamma_w = 1000$ kg/m³, $d = 0{,}004$ m, $D = 0{,}027$ m, und man erhält: $C_e = 0{,}303$ m/s

während wir früher 0,311 m/s gefunden hatten. Der Einfluss des endlichen Rohrdurchmessers war also bei den



V. Preis (10000 Fr.), Entwurf Nr. 26. — Verfasser: Aug. Klönne, Dortmund, Ed. Züblin & Cie. A.-G., Zürich. — Ansicht stromabwärts, darunter Querschnitte 1 : 100.





Versuchsverhältnissen noch ein sehr geringer, und die Differenz zwischen dem Versuchsergebnis ($C_e = 0{,}24$ m/s) und der Rechnung kann nun nur noch entweder durch den grössern Widerstandskoeffizienten k oder dann durch die Ellipsoidalform der Luftblase erklärt werden. Nimmt man nun die Luftblase als Rotationsellipsoid mit senkrechter Drehaxe an, so ändern sich die Widerstandsziffern, und bei gleichem Volumen wie die Kugel erhält man die Beziehung:

$$r^3 = a^2 b$$

wobei b mit der Drehaxe zusammenfällt.

Setzt man nun z. B.

$$a = 1{,}2\, b$$

so wird:

$$b = 0{,}885\, r \qquad a = 1{,}063\, r$$

und damit folgt bei $2r = 0{,}004$ m

$$b = 0{,}00177 \text{ m} \qquad a = 0{,}002126 \text{ m}$$

somit:

$$2a = 0{,}004252 \text{ m}$$

Die Widerstandsziffer wird dann 0,6 anstatt $0{,}5 + \frac{40}{R_e}$ und man erhält:

$$C_e = 0{,}298 \text{ m/s.}$$

Die Abplattung der Luftblase muss somit noch wesentlich stärker gewesen sein, da die berechnete Geschwindigkeit immer noch etwa 24 % grösser ist als die gemessene. Nimmt man z. B. die Luftblase im Durchmesser so gross an, wie der innere Durchmesser des Glasrohres, so wird:

$$\varepsilon = 1{,}00$$

und aus unserer Gleichung für C_e folgt:

$$C_e = 0$$

was mit den Beobachtungen auch gut übereinstimmt, da eine so grosse Luftblase nur äusserst langsam aufstieg.

(Schluss folgt.)

Internationaler Wettbewerb für die Dreirosen-Brücke über den Rhein in Basel.

(Fortsetzung statt Schluss von Seite 146.)

Projekt 26 (Kennzahl 152 277), eiserne Vollwand-Balkenbrücke

Die Gestaltung ist in ähnlicher Weise wie bei Nr. 18 erfolgt, aber mit verstärktem Nachteil in der Erscheinung. Die Verbindung der Brücke mit Rampe und Treppenanlage ist unbefriedigend. Ebenso ist die Ausbildung der Sichtflächen der Hauptträger über den Pfeilern unschön.

Eine Pfeilerstellung parallel zur Flussaxe wäre vorzuziehen. Die für die Gründung der Widerlager vorgeschlagene Methode ist nicht wirtschaftlich. Das übermässig tiefe Einrammen der eisernen Spundwände, der Aushub und das Einbringen des Beton unter Wasser können vermieden werden. Die pneumatische Pfeilergründung ist zweckmässig. Das Montagegerüst mit Schiffahrts-Oeffnungen von je 40 m links und rechts eines Mitteljoches ist flusstechnisch zulässig.

Die Brückennivellette ist gut. Der Gerberträger würde zweckmässiger durch einen kontinuierlichen Träger ersetzt. Die Querschnittanordnung ist befriedigend. Die armierte Fahrbahnplatte kann jedoch nicht als voller Ersatz für einen Windverband angesehen werden. Die Hauptträgeraussteifungen über den Pfeilern sind verbesserungsbedürftig. Die Montage ist gut.

Das vorliegende Projekt stellt die billigste Lösung unter den in engste Wahl gezogenen Entwürfen dar. (Uebernahms-Angebot 2 154 313 Fr.)

Projekt Nr. 3 (Kennzahl 818 818), eiserne Vollwand-Balkenbrücke. Die vorgeschlagene eiserne Balkenkonstruktion erscheint