Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 95/96 (1930)
Heft: 5

Artikel: Bestimmung der Eigenfrequenz von Drehschwingungen
Autor: Lieberherr, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43940

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Bestimmung der Eigenfrequenz von Drehschwingungen. — Die Hebungen und Senkungen der Rheinsohle in der Strecke Landquartmündung-Bodensee. — Das Krematorium in Rüti-Zürich (mit Tafeln 1 und 2). — Gustave Louis Naville (mit Tafel 3). — Le soixantième anniversaire de la G. E. P. — Mitteilungen: Gasbetrieb für Luftschiffe. Von der Cité universitaire in Paris. Dreirosenbrücke in Basel. Internationaler Kongress für Maschinenbau, Lüttich 1930. Eine „Holz-Tagung" in Berlin. — Wettbewerbe: Beseitigung der Niveauübergänge der Durchgangstrassen in Baden. Erweiterung des Kursaals Lugano. — Mitteilungen der Vereine: Schweizer. Ingenieur- und Architekten-Verein. Maschineningenieur-Gruppe Zürich der G. E. P. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 95 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 5

Bestimmung der Eigenfrequenz von Drehschwingungen.

Von HANS LIEBERHERR, Dipl. Ing., Winterthur.

Im allgemeinen geht man zur Ermittlung der Eigenfrequenz der Drehschwingung einer mit Trägheitsmomenten besetzten Welle so vor, dass man für jede einzelne Masse die Bewegungsgleichung der Drehung unter dem Einfluss der an ihr angreifenden Momente aufstellt. Durch Einführung eines Cosinus-Ansatzes mit der noch unbestimmten Frequenz λ und der Amplitude A, die für jede Masse verschieden ist, geht dieses System von Differentialgleichungen über in ein System linearer homogener Gleichungen für die Amplituden A. Diese können von Null verschiedene Werte nur dann besitzen, wenn die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet. Aus dieser Bedingung ermittelt man durch Probieren und Interpolation diejenigen Werte von λ, die die Determinante zu Null machen, die sog. Eigenfrequenzen des Problems. Für ein System von n schwingenden Massen erhält man auf diese Art $(n-1)$ Werte für die Eigenfrequenzen. Für die technische Anwendung kommt jedoch fast ausschliesslich nur die unterste in Betracht. Hier gelangt man viel rascher zum Ziel durch die nachstehende Methode. Wie sich zeigen wird, stellt sie das genaue Analogon dar zum bekannten Verfahren der Bestimmung der Eigenfrequenz der Biegungschwingung einer mit Massen besetzten Welle (Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 5. Auflage, Seite 381).

Als Ausgangspunkt der Untersuchung dient die Schwingungsgleichung einer Welle von konstantem Trägheitsmoment, die stetig mit Massenträgheitsmomenten belegt ist. Als solche fallen in Betracht die Eigenmasse der Welle, aber auch aufgesetzte Massen, wie Schwungrad, Generator, Schiffschrauben, Kupplungen und die reduzierten Massen des Kurbeltriebes. Da in den praktischen Anwendungen gewöhnlich das Trägheitsmoment längs der Welle veränderlich ist, unter welche Abweichungen auch in den Wellenstrang eingeschaltete elastische Kupplungen zu rechnen sind, so hat man die Welle vorerst zu „reduzieren". Dies bedeutet, dass man die einzelnen Elemente der Welle, die abweichendes Trägheitsmoment haben, ersetzt durch Wellenstücke des gegebenen Durchmessers und von solcher Länge, dass bei gleichem Drehmoment die Verdrehung entsprechender Querschnitte gegeneinander gleich wird wie bei der ursprünglichen Welle. Das Massenträgheitsmoment über einem bestimmten Wellenstück wird man über die entsprechende reduzierte Länge bei unverändertem Gesamtbetrag sinngemäss verteilen.

Bezeichnet man das polare Trägheitsmoment der reduzierten Welle mit J_p, das Massenträgheitsmoment pro Längeneinheit, das eine Funktion des Abstandes x vom Wellenende sein soll, mit Θ_1, das verdrehende Moment im Querschnitt x mit M, so lautet die Bewegungsgleichung der Drehung für das Element der Welle zwischen x und $x + dx$, wenn φ der Verdrehungswinkel,

$$(\Theta_1\, dx)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M}{\partial x}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

M lässt sich ausdrücken durch die Verdrehung gemäss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{M}{G\, J_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Damit folgt die Schwingungsgleichung

$$\Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G\, J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Führt man hierin den Normalschwingungsansatz ein, $\varphi = A \cos(\lambda t)$, worin A unabhängig von der Zeit sein soll, so folgt

$$-\Theta_1 \lambda^2 A = G\, J_p \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\Theta_1}{\frac{G J_p}{\lambda^2}} A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Bedingungen zu erfüllen, dass das übertragene Moment an beiden Enden der Welle verschwindet, was nach (2) durch die Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \text{in} \quad x = 0, l$$

oder gleichbedeutend

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \qquad \text{in} \quad x = 0, l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dargestellt wird.

$\frac{\partial A}{\partial x}$ ergibt sich durch einmalige Integration aus (4) als

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\int_0^x \Theta_1\, dx\, A}{\frac{G J_p}{\lambda^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

sodass, da die erste Bedingung des Verschwindens der Neigung der Tangente der elastischen Linie im Anfangspunkt ohne weiteres erfüllbar ist, die Bedingung verbleibt

$$\int_0^l \Theta_1\, A\, dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Bedenkt man, dass $\Theta_1\, dx\, A\, \lambda^2$ das an jedem Massenelement angreifende Moment der Trägheitskräfte darstellt, so hat diese Gleichung die einfache Bedeutung, dass das resultierende Moment der Trägheitskräfte über die ganze Welle verschwindet. Da keine äussern Kräfte auf die Welle einwirken, ist dies eine Selbstverständlichkeit.

Zur Lösung der Differentialgleichung wird jetzt so vorgegangen, dass man zuerst eine willkürliche Annahme über den Verlauf der elastischen Linie macht, die aber die Randbedingungen erfüllen muss. Während die erste sofort berücksichtigt ist, verlangt die zweite das Bestehen der Gleichung $\int_0^l \Theta_1\, A\, dx = 0$, die jetzt in etwas veränderter Form wiederholt sei

$$\int_0^l \Theta_1\, A\, dx = \int_0^l \Theta_1\, (A + a)\, dx - a \int_0^l \Theta_1\, dx = 0 \quad . \quad (7a)$$

A stellt die Amplitude der Schwingung, also die maximale Auslenkung gegenüber der Axenrichtung dar. Sie ist vorläufig noch unbekannt. Dagegen gibt die Annahme die Abstände $A + a$ von einer beliebigen Axe, die parallel zur Schwingungsaxe im Abstand a verläuft, sodass sich a aus den gegebenen Werten von $(A + a)$ und Θ_1 ergibt.

Gemäss Gleichung (6) ist der Neigungswinkel der elastischen Linie gegenüber der Axe im Punkte x

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\int_0^x A\, \Theta_1\, dx}{\frac{G J_p}{\lambda^2}}$$

sodass man ihn graphisch dadurch erhält, dass man auf einer Horizontalen $G J_p / \lambda_0^2$ aufträgt, λ_0 vorläufig geschätzt und von deren Ende aus abwärts die Teilintegrale $\int_1^2 A\, \Theta_1\, dx$, wenn man sich die Welle in einzelne Teilstücke zerlegt denkt, aneinanderreiht. Damit kann man die Lösung der Differentialgleichung für den angenommenen Verlauf von A aufzeichnen und hat auch hier wieder zuerst die Lage der Schwingungsaxe zu bestimmen. Wären angenommene elastische Linie und λ richtig gewesen, so hätte das Resultat

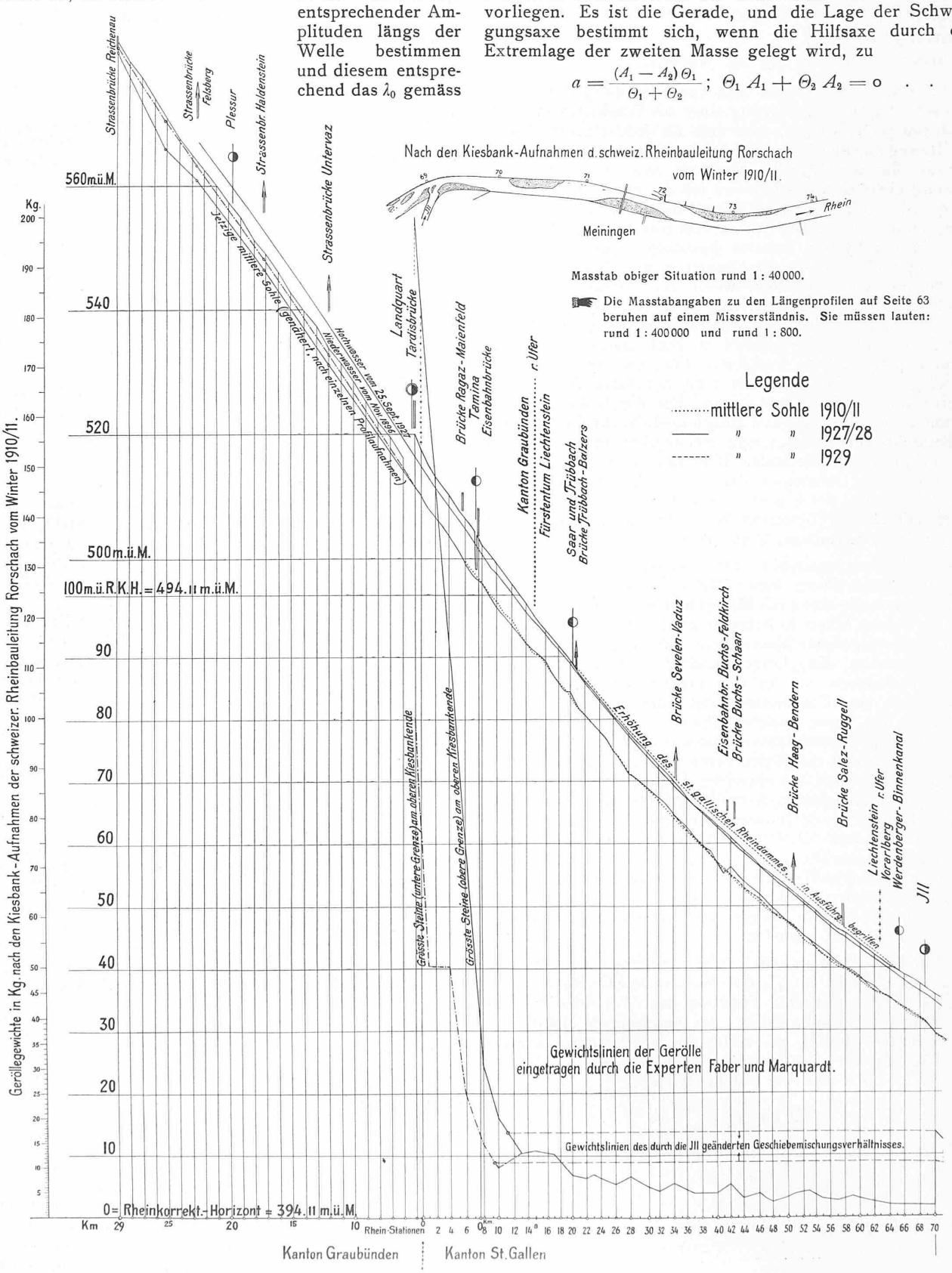
wieder die Annahme ergeben. Bei nur unrichtigem λ_0 könnte man die erhaltene Kurve durch einfache affine Verzerrung in die ursprüngliche überführen, wobei sich das neue λ_1, das bei der gleichen Annahme von A die richtige Kurve ergeben hätte, als

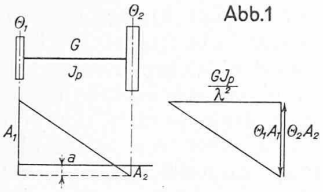
$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{A_0}{A_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

darstellt. Weichen Annahme und Ergebnis wesentlich voneinander ab, so wird man den Mittelwert des Verhältnisses entsprechender Amplituden längs der Welle bestimmen und diesem entsprechend das λ_0 gemäss obiger Gleichung berichtigen. Mit dieser ersten Näherung als neuer Annahme und dem berichtigten λ wird dann die Konstruktion wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wird, was, wie die praktische Verwendung des Verfahrens zeigt, schon sehr rasch der Fall ist.

Zwei einfache Beispiele sollen die Anwendung der Methode dartun. Als erstes sei das einfachste Schwingungsystem mit zwei einzelnen Massen gewählt (Abb. 1). Hier kann über die Wahl der elastischen Linie kein Zweifel vorliegen. Es ist die Gerade, und die Lage der Schwingungsaxe bestimmt sich, wenn die Hilfsaxe durch die Extremlage der zweiten Masse gelegt wird, zu

$$a = \frac{(A_1 - A_2)\,\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}\,; \quad \Theta_1 A_1 + \Theta_2 A_2 = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$





λ ist nun richtig gewählt, wenn die Neigung der wirklichen elastischen Linie übereinstimmt mit der Richtung der Hypothenuse des Dreiecks der $\Theta_1 A_1$ und GJ_p/λ^2. Somit $\frac{A_1 - A_2}{l} = \frac{A_1 \Theta_1}{\frac{G J_p}{\lambda^2}}$

Setzt man den Wert von A_2 aus (9) ein, so folgt

$$\frac{A_1 + A_1 \frac{\Theta_1}{\Theta_2}}{l} = \frac{A_1 \Theta_1}{\frac{G J_p}{\lambda^2}}$$

woraus die bekannte Formel für die Eigenfrequenz eines Zweimassensystems folgt

$$\lambda^2 = \frac{G J_p}{l} \; \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2} \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Das zweite Beispiel soll die Bestimmung der Eigenfrequenz eines einfachen Viermassensystems zeigen (Abb. 2). Der Wellendurchmesser sei 25 cm und $G = 830\,000$ kg/cm², sodass $G J_p = 324\,10^8$ kgcm². Als erste, absichtlich sehr grobe Annahme über den Verlauf der elastischen Linie wurde die gerade Verbindungslinie zwischen den Amplituden von erster und letzter Masse angenommen. Es ist

$$\int_0^l \Theta_1 \, dx \, (A + a) = \sum_{i=1}^{4} \Theta_i \, (A_i + a)$$

und

$$\int_0^l \Theta_1 \, dx = \sum_{i=1}^{4} \Theta_i$$

sodass sich a damit bestimmen lässt. Die Amplituden A wurden aus $A + a$ durch rechnerische Subtraktion von a ermittelt. λ_0 wurde auf 150 sec geschätzt und $G J_p/\lambda^2$ horizontal aufgetragen. Daran schliessen sich vertikal aneinander die Teilintegrale $A_i \, \Theta_i$, sodass sich die Neigungswinkel der elastischen Linie ergeben und die elastische Linie sich in erster Annäherung aufzeichnen lässt. Auch hier ist wieder die Axe zu bestimmen, sodass die neuen Amplituden jetzt auch bekannt sind. Das mittlere Verhältnis der Amplituden zwischen Annahme und Ergebnis ist 1,192, die mittlere Abweichung davon 7,5 %, die maximale 12,9 %, was angesichts der rohen Annahme weiter auch nicht verwundert. Für die zweite Näherung wurde die Frequenz korrigiert entsprechend $\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{1{,}192} = 162{,}5$ und die gewonnene erste Annäherung als neue Annahme gewählt. Damit ergab sich ein mittleres Verhältnis zwischen Annahme und Resultat von 1,026, bei einer mittlern Abweichung von 1,7 % und einer maximalen von 3,16 % an der ersten

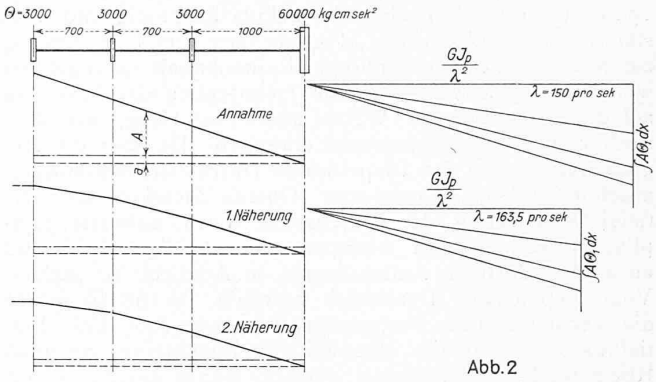


Abb. 2

Masse, wo auch bei der ersten Näherung die grösste Abweichung auftrat. Die Winkelgeschwindigkeit ist also nur noch um $\sqrt{1{,}026} - 1 = 1{,}3$ % zu korrigieren, sodass die gewonnene Annäherung technischen Ansprüchen bereits vollauf genügt.

Das Verfahren ergibt aber nicht nur die Schwingungsfrequenz, sondern auch gleichzeitig die Schwingungsform. Dadurch ist man in den Stand gesetzt, bei bekannten Dämpfungsgrössen auch die Amplituden bei Resonanz zu bestimmen (Eichelberg in Festschrift Prof. Stodola). Zugleich hat es den Vorteil, dass es die Berücksichtigung der nicht auf einen Punkt der Welle konzentrierten Massen, wie auch den Einfluss der Eigenmasse der Welle, auf dem gleichen sehr einfachen Wege gestattet, während die analytische Behandlung hier auf so grosse Rechenarbeit stösst, dass die gewonnenen Resultate in keinem Masse diesem Aufwand entsprechen.

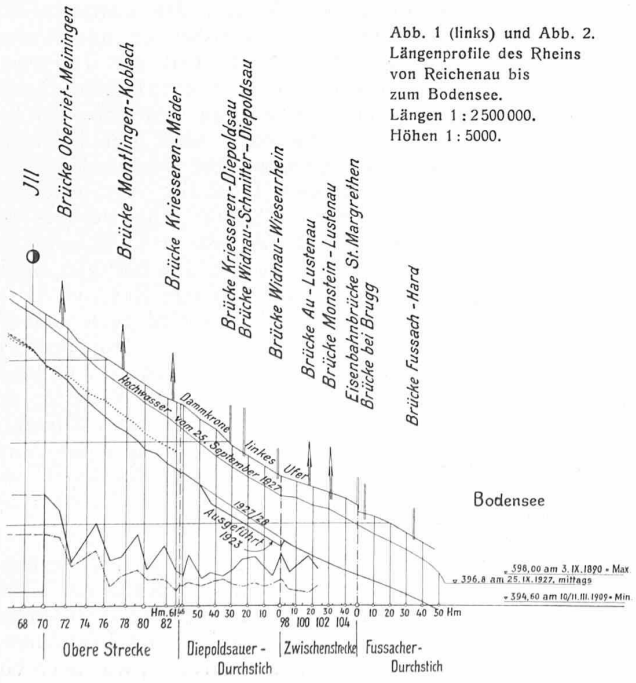


Abb. 1 (links) und Abb. 2. Längenprofile des Rheins von Reichenau bis zum Bodensee. Längen 1 : 2 500 000. Höhen 1 : 5000.

Die Hebungen und Senkungen der Rheinsohle in der Strecke Landquartmündung-Bodensee.

Vom EIDGEN. OBERBAUINSPEKTORAT, Bern.

Der Rhein ist in der Strecke zwischen der Einmündung der Landquart und dem Bodensee den verschiedenartigen Einflüssen unterworfen, die das Geschiebe einerseits und die Räumungskraft des Flusses anderseits mitsichbringen. Die Menge der jährlich in den See geförderten festen Bestandteile wird zu durchschnittlich 2,8 Millionen m³ berechnet. Wenn diese Geschiebemassen jeweilen im Flussbett selber zur Ablagerung gelangen würden, so genügten 10 bis 20 Jahre, um das ganze Durchflussprofil auszufüllen. Zum Glück wirkt die Schleppkraft des Gewässers in entgegengesetztem Sinne, und einzig der Unterschied der im Spiele stehenden Naturkräfte kann sich als Sohlenauftrag bezw. Abtrag bemerkbar machen.

In Abb. 1 und 2 ist das Längenprofil des Rheines mit den Veränderungen im Zeitraum von 1910 bis 1928, bezw. 1929, dargestellt; Abb. 3 (Seite 65) zeigt für die an den Rheinstationen mit ganzen Nummern erhobenen Querprofile, wie sich die mittlere Sohle von 1848 bis 1928 bezw. 1929 gehoben oder gesenkt hat. Diese Darstellungen geben ein Bild von den Vorgängen in der Vergangenheit, sie lassen auch einige Schlüsse ziehen für die Zukunft.

Im gegenwärtigen Zeitpunkt lässt sich die Tendenz der Veränderungen der mittlern Sohle des Flussbettes ungefähr folgendermassen charakterisieren. Es besteht von:

Landquart bis Rh. St. 14a (Grenze) .	Vertiefung.
Rh. St. 14a bis Rh. St. 29 (unterhalb Weite)	Beharrung.
Rh. St. 29 bis Illmündung	Erhöhung.
Illmündung bis Diepoldsauer Durchstich	Vertiefung.
Diepoldsauer Durchstich bis Bodensee .	Beharrung.

Die Aufnahmen vom Winter 1928/29 zeigen, dass nun in der Erhöhungstrecke von Buchs auch Abtragung einsetzen kann, indem das ganze vom Hochwasser 1927 daselbst aufgelandete Material restlos, ebenso der Auftrag der Periode 1921/27 abgespült worden ist. Dieser Abtrag ist grösser als die damals nur am rechten Ufer ausgeführte Materialentnahme. Die bedeutenden Kiesentnahmen, die seit