Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

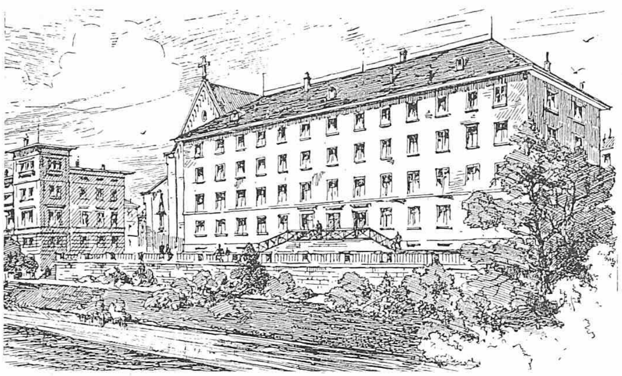
Band: 95/96 (1930)

Heft: 18: Zur Feier des 75jährigen Bestehens der Eidg. Technischen Hochschule

Artikel: Les Mathématiques et la Réalité

Autor: Gonseth, Ferdinand

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44075



Das „Hinteramt" (alte Universität) beim „Augustinerhof" am Fröschengraben, beherbergte im Erdgeschoss und I. Stock die Bau- und Maschinen-Ingenieur-Schule, die Forstschule und die Allgemeine (philosophische) Abteilung.

Les Mathématiques et la Réalité.

Par FERDINAND GONSETH, Professeur à l'E. P. F., Zurich.[1])

Qu'il me soit permis tout d'abord de rendre hommage et d'exprimer ma respectueuse et sincère affection à Mr. le professeur Franel, dont je fus l'élève et l'assistant pendant plusieurs années et dont j'ai l'honneur d'être le successeur.

Mr. Franel profita de la dernière heure de son cours où il prenait congé de ses auditeurs pour leur faire une conférence remplie d'autant de sagesse que de savoir sur le sujet: Pourquoi apprenons-nous les mathématiques? [2]) Or j'ai toujours admiré le symbole de la torche qui passe de la main du coureur qui vient de fournir son effort dans la main de celui qui va le relayer. C'est pourquoi, en écoutant Mr. Franel, j'ai été séduit par l'idée de prendre comme sujet de ma conférence d'aujourd'hui un sujet apparenté à celui qu'il traitait, afin que mes réflexions puissent rejoindre les siennes.

Je ne m'attarderai pas à décrire combien l'application des mathématiques à l'étude de la réalité est efficace. L'enseignement dans cette Ecole et dans toutes les écoles similaires est dans une large mesure basé sur cette efficacité. La question que j'aimerais examiner est plutôt la suivante: Comment cette efficacité s'explique-t-elle? Comment, lorsque nous réfléchissons à la façon dont se constitue notre connaissance du monde, notre connaissance des réalités objectives, comment pouvons-nous envisager le rôle certainement primordial et tout à fait particulier des mathématiques? Peut-on pénétrer jusqu'à une certaine compréhension de l'harmonie comme préétablie qui existe entre la nature d'une part, les formes et les nombres d'autre part?

C'est là une de ces questions auxquelles chaque âge de la science fournit sa réponse, réponse le plus souvent traditionnelle. Mais s'il arrive que cette réponse se renouvelle, c'est là le signe qu'un ample mouvement d'idées s'est opéré, entraînant un considérable déplacement de point de vue. Peut-être sommes-nous engagés dans un tournant de ce genre.

Les premières tentatives de fournir une réponse à notre question datent de l'époque même où la science mathématique a pris forme de science théorique et abstraite. On s'accorde à attribuer le mérite de cette création aux mathématiciens et philosophes grecs de Thalès à Euclide, qui prennent place entre 600 et 300 avant notre ère. Mais dans les doctrines mathématico-philosophiques des Pythagoriciens, et surtout dans celles de l'école platonicienne, c'est moins le caractère d'efficacité des mathématiques que leur caractère de vérité qui fournissait la note dominante.

Pour les Grecs, essentiellement et en dehors de toutes autres considérations, une proposition de mathématiques était vraie. Ce fait fondamental, pour développer ses conséquences, pour s'épanouir et prendre la position que son importance comportait, ce fait fondamental exigeait la création d'un monde spirituel où la vérité est identique à la réalité, je veux dire le monde des idées de Platon.

Un axiome de géométrie, par exemple, est une de ces vérités, qu'un esprit suffisamment éclairé perçoit immédiatement, une vérité évidente par elle-même.

D'autre part, en restant fidèle à cette façon de voir, on pourrait raisonner comme suit: Ce qui est vrai ne peut être à la fois vrai et faux, vrai dans le monde spirituel et faux dans le monde des choses. C'est pourquoi le monde des choses lui-même ne trouvera sa réalisation qu'en accord avec les vérités préétablies. Il ne les réalisera peut-être qu'imparfaitement, parce que, disait-on chez les Grecs, le monde des choses est par nature imparfait. Mais jamais il ne pourra les infirmer. Ainsi s'explique le fait que la nature aime à s'exprimer en formes géométriques et en nombres. La doctrine que j'esquisse semble ainsi trouver comme sa clef de voûte.

C'est un assemblage d'idées qui ne manque pas de consistance et de fermeté et sa force de persuasion est loin d'être épuisée. On en retrouve des échos jusque dans les traités élémentaires de géométrie, qui presque tous reprennent à leur compte la définition de l'axiome à laquelle je viens de faire allusion:

L'axiome est une vérité évidente par elle-même. Toutefois, pour un esprit d'aujourd'hui, des constructions de ce genre paraissent être, comme on dit, purement verbales et profondément irréelles. Nous ne croyons plus qu'il suffise de dire: „Le vrai ne peut être à la fois vrai et faux" pour contraindre le monde des choses à obéir aux lois de notre esprit, pour enserrer une parcelle de réalité physique ou psychologique. De pareilles phrases ont presque totalement perdu leur signification, se sont vidées de leur substance. La prise de possession de la réalité par l'esprit humain n'est pas une chose si simple, qu'une élégance de langage suffise à tout élucider. Mais il est clair que si l'on abandonne le terrain où nous nous sommes placés pour un instant, et sur lequel les choses pensées sont comme les reflets de vérités ayant leur existence propre, il est clair que l'on quitte un terrain très ferme pour s'aventurer sur un sol mouvant. Si l'on abandonne l'appui que fournit à l'esprit l'idée de vérité absolue, ce premier abandon en amène bien d'autres à la suite, et il n'est pas jusqu'au mot de „réalité", dont la signification devient un peu flottante et estompée.

Dans ces conditions peut-être viendrait-il à l'esprit d'un contradicteur de s'exprimer comme suit: Ou bien les mots ont un sens sur lequel il n'y a pas à se méprendre, pas à hésiter, un sens donné et précis, ou bien alors si ce n'est pas le cas, j'estime qu'il faut fixer préalablement le sens de chacun d'eux. Dans le premier cas je ne demanderai qu'une chose: c'est que les mots soient employés dans leur sens véritable et de façon conforme à la logique. Mais dans le second cas comment pourrai-je vous comprendre si vous ne vous êtes d'abord expliqué sur le sens de chacun des mots que vous aurez à employer, et entre autres sur le sens du mot réalité, que vous employez d'une façon très générale et sujette à bien des interprétations dans le sujet même que vous avez à traiter: Les mathématiques et la réalité.

Si cet interlocuteur imaginaire pouvait avoir raison, il nous mettrait dans une position fort incommode et même ridicule. Car, vous y avez déjà pensé, je ne puis rien expliquer qu'en employant des mots et encore des mots. Si ce sont les mêmes qu'auparavant, je tourne dans un cercle vicieux, et s'ils sont nouveaux ma tâche recommence. Si bien que je me verrais interdire l'usage même de la parole. Il faudra certainement que j'admette une fois et que vous admettiez avec moi que les phrases que je prononce et que vous entendez sont intelligibles par elles-mêmes....

Mais alors, ne sommes-nous pas revenus sur le terrain que nous prétendions vouloir abandonner. Et cette vaine tentative de vouloir prendre la clef des champs ne condamne-t-elle pas à l'insuccès toute autre velléité d'émancipation?

[1]) Leçon d'ouverture, faite à l'E. P. F. le 28 juin 1930.

[2]) Voir „S. B. Z.", tome 94, page 49 (3 août 1929).

Il ne faut pas se hâter de l'affirmer. J'y ai fait allusion une fois déjà: Chaque philosophe apporte sa réponse dans cette question de la correspondance et de la conformité, de l'adéquation des concepts aux choses.

Bien entendu il ne peut s'agir pour nous d'examiner ces réponses une à une. Cependant une partie de ma tâche consistera à faire saisir qu'il est possible de sortir du dilemne apparent dans lequel nous pourrions nous croire enfermés.

Mais, est-ce que nous ne nous engageons pas dans de pures querelles de mots? Et ces querelles ne sont-elles pas très éloignées de notre sujet? Faut-il véritablement passer par le chemin décourageant, et sans horizon, de ces discussions préliminaires?

Tout d'abord, ce problème du rapport des mots aux choses est le même que celui que nous voulons traiter, mais sur un plan un peu différent; sur le plan des notions données intuitivement et reliées entre elles par les règles du langage courant, tandis que notre problème se pose sur le plan des formules dites exactes et reliées par les règles de la logique.

En d'autres termes: L'application des mots courants à la description des réalités ordinaires et de tous les jours se fait en principe de la même façon que l'application des mathématiques à la description des réalités d'ordre scientifique.

S'il en est ainsi, il peut paraître assez naturel de partir du plus simple, c.-à.-d. du langage ordinaire, et d'analyser la façon dont il nous permet de nous accorder de façon effective et univoque sur des réalités tangibles, pour arriver ensuite à ce qui paraît le plus difficile et le plus éloigné: les relations du mathématique et du phénoménal.

Ce serait donc là justement le chemin que nous venons de nommer fastidieux et plein d'embûches. D'autre part, à mon avis, c'est la façon contraire de procéder qui est la plus commode. Et c'est après avoir imaginé comment les choses se présentent dans le domaine scientifique qu'on peut, avec un esprit averti et aiguisé par l'expérience, revenir avec fruit sur le problème général du langage.

Dans le domaine mathématique je me propose donc de soutenir tout d'abord une thèse, dont l'équivalent quant au langage ordinaire pourrait se formuler très simplement comme suit: Le sens d'aucun mot n'est parfaitement donné d'avance, n'est complètement déterminé a priori. Le sens des mots découle de leur fonction dans le langage.

Commençons par supposer qu'un objet matériel nous soit proposé et que nous ayons à nous le représenter, à prendre conscience et connaissance de ce qui constitue son être et sa réalité.

Tout d'abord nous commencerons par recueillir certaines impressions assez grossières et imprécises concernant sa forme, son poids, sa consistance, sa couleur, etc. Ce n'est pas chose très simple que de comprendre comment notre esprit coordonne ces impressions, de façon que s'éveille en nous l'image de l'objet comportant ces qualités. Nous sommes ici justement dans ce stade intuitif, auquel nous avons fait déjà allusion. Nous répéterons donc ici qu'à notre avis il est commode de ne pas s'y attarder, afin d'y recueillir des indications en quelque sorte préliminaires sur la façon dont l'esprit travaille, et dans l'idée de frayer la voie à une discussion ultérieure plus approfondie. Je crois plutôt que c'est l'examen de ce qui va se passer quand nous passerons au stade scientifique qui permet de revenir ensuite en arrière, et de jeter quelque lumière sur l'entrelacement des premières notions dites intuitives.

Pour faire un pas de plus, supposons que l'objet de notre examen soit un cristal. Toute description quelque peu précise de sa forme fera immédiatement appel à tout l'appareil des concepts géométriques. C'est la géométrie et plus spécialement un certain groupe de déplacements et symétries qui fourniront le principe le plus efficace pour la classification des formes sous lesquelles les cristaux se présentent.

Ainsi dès les premiers pas, nous faisons appel à tout un réseau de relations abstraites, réseau par rapport auquel devra se construire l'image de l'objet.

Dans notre prise de possession, la description de la forme ou de telles autres propriétés qu'on voudra ne nous fournit que tel ou tel aspect de la réalité. Si nous recherchons une compréhension plus profonde, nous avons le sentiment d'y parvenir lorsqu'il nous est possible de relier ces aspects divers, de leur attribuer une cause commune. Ceci devient possible, par exemple, sur la base d'une théorie de la structure de la matière cristallisée, c'est-à-dire en fonction de nouveaux concepts abstraits et de nouvelles relations également abstraites — et ainsi de suite.

Ce que je viens de dire n'a que le seul but d'illustrer le fait suivant: Si, dans la connaissance d'un objet, on veut dépasser la sphère d'expérimentation assez grossière qu'on appelle intuitive, cette connaissance plus profonde des réalités ne s'obtient que par l'intermédiaire, que par l'entremise, qu'en fonction de théories de plus en plus nombreuses, de schémas abstraits intervenant successivement et progressivement.

Il y a là une espèce de paradoxe et comme une loi de compensation: La description d'une réalité toujours plus exacte se fait en termes de plus en plus théoriques, nécessite des concepts toujours plus abstraits, tels que atome, électron, spin, probabilité d'existence, etc. Le concret ne se laisse serrer de près qu'en termes abstraits.

Certains esprits supportent avec une certaine impatience cette ingérence du mathématique dans le physique. Leur idéal serait de fonder une physique toute phénoménale, dans laquelle toutes les notions primitives seraient définissables par des opérations réellement effectuées. C'est à une physique de ce genre que fait allusion le grand astronome et physicien anglais Eddington, dans l'introduction à son livre: „L'espace, le temps, la gravitation". Voici ce qu'on y lit: „Les grandeurs physiques sont en dernier lieu définies par la façon dont nous en prenons connaissance, au moment où nous les rencontrons dans le monde qui nous entoure. . . ." ou bien encore ceci, qui est plus explicite: „. . . . On obtient une définition de la distance en décrivant tout simplement le procédé exact qui permet de la mesurer, et c'est cette définition là qui, évidemment, doit être la définition primitive. . . .

Ainsi donc il y aurait deux façons d'envisager la distance et les autres grandeurs de ce genre: celle des mathématiciens et celle des physiciens et de toute la science expérimentale, ces dernières étant définies en dernière ligne par une suite d'actions coordonnées, de gestes intentionnels. Malheureusement, quelques lignes plus loin, Eddington reconnait que la chose n'est pas aussi simple que cela. „Toutefois, dit-il, il faut observer une certaine prudence. Je me trouverais dans un cruel embarras si l'on me demandait d'expliquer sur le champ par quelle série de manipulations et de calculs la longueur de 10^{-15} cm est à définir. — Et pourtant, le cas échéant, je n'hésiterai pas à me servir de grandeurs de cet ordre, comme si leur définition était à notre portée immédiate: on ne peut pas s'attarder indéfiniment à l'examen des fondements".

Cette immixtion de l'abstrait, du mathématique est tout à fait essentielle. C'est pourquoi je m'en vais encore l'illustrer par un autre exemple: „Toute observation de physique, dit quelque part Einstein, revient à relever une coïncidence dans l'espace et dans le temps". Selon cette idée toute la physique pourrait être exprimée sous la forme de tableaux où seraient notées les coïncidences. Vous retrouvez dans cette façon de voir les choses, cette inclination vers une physique phénoménale dont je parlais tout à l'heure. Mais continuons: Il est nécessaire que deux observateurs opérant en des lieux différents puissent se mettre d'accord sur les phénomènes, les coïncidences qu'ils ont observées tous les deux. Il est donc nécessaire de pouvoir passer du système de référence — espace, temps — de l'un, au système de référence du second. Et les formules de transformation qui permettent d'opérer ce changement de coordonnées font partie de la physique au moins tout autant que les tableaux de coïncidences. C'est d'ailleurs là l'objet de ce qu'on appelle la théorie de la relativité, qui coïncide avec la cinématique classique pour la forme la plus immédiate des équations de transformation, et avec la relativité restreinte d'Einstein pour la forme de Lorentz de ces mêmes équations. Ces systèmes d'équations sont d'ailleurs des schémas purement théoriques et c'est leur efficacité qui permet de choisir entre eux et non quelque caractère intrinsèque.

On pourrait donner d'autres exemples encore, spécialement dans la théorie des quanta, où l'on opère avec un succès retentissant, mais à l'aide de schémas mathématiques et de notions dont on ne connaît encore qu'imparfaitement le contenu de réalité.

Permettez-moi maintenant de ne plus insister sur ce point; je vous prie donc d'admettre avec moi que la prise de possession de la réalité nécessite la création et la mise en œuvre d'un réseau de plus en plus étendu de relations abstraites.

Nous allons maintenant discuter de la conformité, plus ou moins grande, de l'adéquation de ces schémas aux choses observées. On pourrait tout d'abord s'en faire l'idée très simple que voici: En premier lieu, et si on ne les considère qu'en eux-mêmes et pour eux mêmes, ces schémas sont vrais; de la même vérité que cette autre proposition: $2 \times 3 = 3 \times 2$.
Ce sont par exemple la géométrie d'Euclide, ou bien aussi les géométries non-euclidiennes; la cinématique classique de Galilée, ou bien aussi les cinématiques non-galiléennes, etc. etc.

Ces constructions seraient à considérer comme vraies, tant qu'on ne les examinerait que du point de vue de la pure logique.

En second lieu, si elles doivent être interprétées comme théories, dans une partie quelconque des sciences de la nature, elles peuvent être encore une fois vraies ou fausses, ou mieux: exactes ou inexactes.

Une théorie est exacte si elle formule de façon infailliblement juste les lois naturelles qu'elle vise. Elle est inexacte si les faits et les phénomènes sortent du cadre précis, de la voie idéale que la théorie leur a tracés.

Bien entendu l'esprit humain n'est pas infaillible. Il lui arrive chaque jour de prendre le faux pour le vrai, de tenir l'inexact pour exact. Chaque jour ou presque, la nature lui inflige quelque démenti. Mais ceci est un accident et ne nous oblige aucunement à mettre en doute, que les démarches de notre esprit convergent vers la loi qui existe, et qui doit un jour trouver son expression.

J'ai donc dit: voilà l'idée très simple qu'on pourrait se faire des rapports de la théorie et de l'expérience; et ce que je viens de dire sur l'exactitude et l'inexactitude d'une théorie a l'air d'être une suite de truismes, sur lesquels il est oiseux d'insister, qu'il est bien inutile d'exprimer. Et pourtant ce n'est pas votre assentiment sur ces banalités que je recherche; c'est votre opposition, votre contradiction que je voudrais éveiller. J'aimerais que vous eussiez déjà pensé: Cette opposition de l'exact et de l'inexact est superficielle, est artificielle!

Pour nous en rendre compte, reprenons la description de notre cristal de tout à l'heure. Nous avons prétendu, par exemple, que les arêtes en sont des lignes droites. Nous voulons maintenant nous poser la question: D'où savons-nous ce que c'est qu'une ligne droite? Tout d'abord il est clair que la notion de droite n'a pas pu, dans sa perfection, nous être fournie et proposée par une réalisation physique. Les meilleures réalisations qu'on en puisse donner s'obtiennent soit comme trajectoires de rayons lumineux, comme lignes de visée, soit comme arêtes de certains corps très durs, ces deux réalisations se contrôlant l'une l'autre. Mais chacun sait combien les choses se compliquent, si l'on y regarde de près.

Pour le rayon lumineux, il faut d'abord supposer que le milieu soit homogène. Une fois cette condition réalisée, il faut supposer que le champ de gravitation soit constant. Ce sont là déjà des conditions qui ne se laissent réaliser qu'avec une certaine marge d'approximation. Mais il suffit de passer à la représentation du rayon lumineux comme trajectoire d'un photon possédant des dimensions spatiales infimes, mais tout de même différentes de zéro, pour que tout s'évanouisse dans l'indétermination à partir d'une certaine décimale. Quant à la réalisation par l'arête d'un corps, elle ne vaut guère mieux; il suffit de descendre à l'échelle atomique, pour que la continuité même soit mise en question. Ceci nous montre avec évidence que la réalité ne nous fournit que des images imparfaites de la ligne droite: Ce n'est pas dans les réalisations physiques que nous pouvons découvrir de façon parfaitement nette et claire la signification de cette notion simple.

Ceci constaté, examinons l'envers de la question. Tournons nous vers la géométrie et demandons lui la réponse que le monde extérieur n'a pu nous fournir. Acceptons donc notre notion telle que la rigueur mathématique l'a formulée.

Mais il se présente ici un fait bien connu: on peut donner de la géométrie élémentaire des modèles fort différents les uns des autres. L'un des plus simples s'obtient en nommant droites tous les cercles passant par un point déterminé et choisi d'avance. La distance entre deux points de cette droite est ensuite définie par le rapport des cotangentes de deux arcs de cercle, et l'on complète la liste des notions nécessaires à l'édification de la géométrie par une suite de choix appropriés. Sous ce nouvel aspect, on est tenté de dire sous ce déguisement, on retrouve réalisés sans exception tous les théorèmes de la géométrie ordinaire.

Bien plus, faisons subir à l'espace une déformation absolument quelconque, déformation qui s'exerce sur toutes les droites, sur tous les plans, les cercles, les sphères, etc.; pourvu que les notions de distance, d'angle, de parallélisme, etc. y subissent une altération correspondante, la géométrie conserve une validité inaltérée.

Si l'on fait abstraction de l'image intuitive que la réalité nous a suggérée, nous n'avons aucun point de repère qui nous permette de déclarer que l'un des modèles possibles doit être préféré aux autres. Bien plus, nous sommes dans l'impossibilité de les distinger les uns des autres. Ainsi donc la ligne droite n'est pas droite par elle-même: elle ne l'est que par relation et comparaison avec les autres êtres géométriques. Nous voyons ainsi que si nous exigeons que la droite nous soit donnée comme être mathématique pur, il faut résolument passer sur un autre plan de la pensée. A supposer qu'il soit possible de serrer de près la façon dont cet être de la pensée prend forme et consistance, c'est seulement comme relation abstraite, soumise aux lois de la logique, que nous devrons l'envisager.

Il nous faudra tout à l'heure, pour poursuivre notre discussion, passer dans ce royaume très abstrait. Mais auparavant, nous avons à commenter les faits que nous venons de rappeler, et à en tirer un enseignement.

La géométrie, les êtres et les faits géométriques pouvant se conserver invariables à travers toutes les déformations que nous venons d'évoquer, il nous faut bien constater que l'idée que nous nous faisons de la ligne droite n'a pas sa source dans la région, dans le royaume très abstrait dont il vient d'être question. Dans ce domaine de la pensée, la droite s'est dépouillée de tous les caractères sensibles que ses réalisations approchées dans la nature avaient pu nous suggérer.

Ceci n'est naturellement pas particulier à l'exemple que nous avons choisi: c'est au contraire un trait commun à tous les schémas mathématiques, un trait caractéristique. Si l'on veut se placer dans leur domaine d'existence que peut-être on pourrait appeler plus spécifiquement mathématique, alors le sens qu'ils prendront ou qu'ils ont pris dans la description des réalités extérieures ne leur est plus inhérent.

Faisons un rapide retour sur le problème des relations des mots aux choses. A l'étape correspondant à celle que nous venons d'atteindre, nous aurions justement à faire la constatation que nous avons déjà énoncée: Le sens que les mots prennent ou prendront n'est pas complètement déterminé a priori.

Mais revenons à la géométrie. En voulant préciser comment elle naît à l'existence purement mathématique, nous avons déjà rompu le pont qui la reliait au monde des phénomènes. Supposons que nous soyons aussi nous-mêmes de l'autre côté du fossé, et examinons sous quel aspect se présente maintenant ce qui tout à l'heure se nommait la géométrie d'Euclide. Les points, les droites, les plans, etc. sont des êtres sans autres propriétés que d'être ou bien de même nature, ou bien de nature différente, et d'être soumis à des relations logiques, la relation I, la relation P, qui devront elles-mêmes être décrites en termes du même ordre d'abstraction. On pourrait imaginer un schéma qui rende le tout sensible à l'œil. Les relations à établir y seraient marquées par des traits allant d'une catégorie d'objets à l'autre : un trait rouge pour la relation I, un trait bleu pour la relation P, et ainsi de suite.

Mais voici qu'il se présente un fait nouveau: dans cette schématisation, nous avons perdu plus encore que nous n'imaginions. Car avec les mêmes relations, vues sous un aspect, ou vues sous un autre aspect, on peut réédifier les géométries non-euclidiennes aussi bien que la géométrie d'Euclide; le fait est bien connu: on peut faire de la géométrie non-euclidienne en n'employant que des termes et des considérations de la géométrie euclidienne. Rappelons simplement le modèle de Poincaré de la géométrie non-euclidienne hyperbolique. Vue au travers de ce modèle, la géométrie non-euclidienne n'est qu'un chapitre de la géométrie ordinaire des sphères.

Le fait qu'il nous faut retenir est donc le suivant: Si nous nous trouvions placés devant le schéma des relations abstraites auquel la géométrie s'est réduite, et si nous avions perdu tout souvenir de ce que les notions géométriques signifiaient auparavant; si nous n'avions plus aucune connaissance de ces caractères intuitifs propres à l'espace, par exemple, nous nous trouverions dans le plus grand embarras pour reconstituer l'édifice primitif. Le schéma des relations ne contient dans son essence plus rien qui détermine avec nécessité le chemin du retour. Celui-ci ne s'ouvrira devant nous que si l'on vient nous dire: Cette notion-ci sera la droite et ces relations là seront ses propriétés. Mais les raisons de ce choix nous sont fournies par notre connaissance antérieure de ce qu'il faut exiger pour qu'une construction intellectuelle puisse être regardée comme une géométrie.

Je ne sais si vous apercevez bien ce qu'il y a de paradoxal et d'inattendu dans ce que nous venons de constater. Nous nous étions mis en route vers le domaine des abstractions pour y découvrir en quelque sorte l'extrait de naissance des notions dites géométriques. Mais une fois la frontière de ce domaine traversée, nous apprenons que les dites notions sont ici envisagées comme des apparences, bonnes à amuser les gens du pays dont nous venons d'arriver. Les choses sérieuses s'appellent ici, par exemple: Relation I entre les éléments a et b. Mais si vous pouvez prendre plaisir à nommer cela parallélisme des droites a et b, libre à vous. Les gens de ce pays très abstrait ne comprennent pas les règles de ce jeu. Voilà qui donne à réfléchir. Et en réfléchissant, nous nous apercevrons que ce n'est pas la première fois qu'une mésaventure de ce genre nous arrive: c'est la seconde fois.

Souvenez-vous que nous avons d'abord parlé de choses plus ou moins intuitives, de cristal à la forme régulière, d'arête droite, de trajectoire d'un rayon lumineux, et que nous avons jugé ces notions imparfaites. C'est pourquoi nous sommes entrés au pays de la géométrie, pour trouver les modèles parfaits sur lesquels les premières devraient régler leurs relations réciproques. Or on nous avait déjà répondu : En ce pays géométrique, les choses sérieuses s'appellent droites, perpendicularité, point d'intersection, etc. Libre à vous d'y voir des cristaux idéaux et des trajectoires schématisées, mais l'opinion générale de ce pays tient cette façon de procéder pour peu rigoureuse.

Ce retour en arrière nous fait voir une certaine analogie dans les rapports, d'une part de la géométrie aux objets physiques, d'autre part des schémas abstraits aux notions géométriques. De même que les notions de trajectoire, de face, etc., sont des réalisations des notions géométriques, celles-ci se trouvent être à leur tour des réalisations d'un schéma plus abstrait.

Dans ce double rôle: une fois comme schéma vis-à-vis des notions intuitives, une fois comme réalisation des schémas de relations, s'épuise l'existence de la notion géométrique. En dehors de ces fonctions, en deça et au delà, sa consistance s'est évanouie. En deça, dans les objets, elle est suggérée, mais imparfaitement réalisée; au delà, dans les schémas de relation, elle a perdu sa raison d'être.

Quelle attitude faut-il prendre, vis-à-vis de ces circonstances? J'en vois deux. Et je commencerai par celle qui n'est pas la mienne. — On pourrait dire:

„Tirons les conséquences, même si elles sont brutales. Les conséquences, c'est qu'il n'y a pas, mathématiquement parlant, de géométrie autonome. Beaucoup s'en doutent bien, qui veulent tout ramener à la seule notion de nombre entier et à la logique. C'est là le noyau véritable sur lequel la science mathématique doit se replier". — Mais la chose est plus vite dite que faite.

Il faut en effet observer que c'est par commodité que nous avons choisi l'exemple des notions géométriques. Mais il n'y a pas de difficulté insurmontable à reprendre nos réflexions pour les appliquer à d'autres notions, par exemple à celles du calcul des probabilités, ou aussi à la notion même de nombre entier. Il nous faudrait y mettre un peu plus de soin et d'attention. Mais en principe, la notion de nombre est aux possibilités de manipuler et de permuter des objets physiques dans un rapport semblable à celui de la géométrie aux possibilités de mouvoir et de déplacer ces objets.

La retraite sur la notion de nombre ne peut donc être qu'un intermède; elle ne nous fournira qu'une position intermédiaire à peine plus forte que la précédente. Tirer les conséquences signifie quelque chose de plus radical que cela, si nous voulons rester fidèle à l'esprit de notre entreprise. Si nous ne voulons pas renoncer à notre pérégrination intellectuelle vers la source d'où découle la signification des symboles mathématiques, il nous faudra nous armer de courage pour une nouvelle étape, et poser la question : Comment la notion de relation logique prend-elle sa signification?

Pour trouver une réponse à cette question, il nous faudra édifier une Théorie des relations logiques, dont toutes les mathématiques et la logique classique ou logique d'Aristote seront une réalisation. Par rapport aux réalités de cette théorie, toutes les mathématiques et la logique ordinaire seraient dans la même position que tout à l'heure la géométrie vis-à-vis des schémas de relations. Et toute la signification des notions spécifiquement mathématiques serait maintenant comprise dans le domaine qui va des réalités intuitives jusqu'aux réalités de cette nouvelle sphère abstraite; tout leur contenu s'épuiserait dans ce double rôle que nous avons déjà une fois énoncé: abstraction face au côté intuitif du savoir, domaine de réalisation pour une abstraction ultérieure.

Est-ce maintenant dans le pays de la Théorie des relations que nous trouverons les réalités dernières, ce noyau de réalité absolue dont les constructions mathématiques tireraient leur efficacité? Cette Théorie serait alors une doctrine d'une immense généralité et d'une efficacité énorme. Mais les mathématiciens savent qu'il y a lieu de se méfier. Ce pays entouré de trois ceintures d'abstraction, c'est aussi celui de la Théorie des ensembles et de la logistique généralisée, et l'on y rencontre parfois la fleur monstrueuse qu'on nomme l'antinomie. Les antinomies et les paradoxes de la théorie des ensembles et de la logistique générale font prévoir que ce qui est au bout du chemin que nous suivons, ce n'est pas la vérité absolue, vérité cachée et qu'il faut découvrir, mais plutôt une construction d'une ampleur énorme, mais à la signification problématique et à la solidité illusoire.

De plus, il y a une circonstance qu'il ne faut pas perdre de vue. Toutes nos théories sont finalement en fonction du langage. Ce serait le moment de revenir au rôle et à la signification des mots et des phrases. Mais vous accepterez sans peine l'affirmation que voici : le langage dans son rôle explicatif et descriptif est également une réalisation d'un système de relations logiques. Or, le langage nous accompagne à chaque pas en avant; et ce serait une illusion de croire que, à chaque fois que nous avons cru voir un changement de point de vue, le langage a lui-même évolué pour ne rien retenir du rôle qu'il jouait précédemment. Au contraire, la signification du langage reste engagée dans la sphère logico-intuitive. Par là même, nous sommes obligés de modérer l'allure de notre processus d'abstraction : nous nous trouvons en fait enfermés dans des limites plus conformes à notre nature ; en un mot, le chemin purement spéculatif et idéal vers les réalités dernières est barré.

Nous avions dit : Il faut tirer les conséquences. Les conséquences sont maintenant que ce que nous cherchons n'est pas dans la direction que nous avons prise. Il nous faut faire demi-tour et porter notre attention exactement dans le sens inverse : c'est dans le monde objectif qu'est fondée la signification des mathématiques.

Arrêtons-nous un instant à cette affirmation. Il est clair que nous aurions pu commencer par l'énoncer. Nous nous serions épargné un long détour et de nombreuses démarches infructueuses. Mais je crois cependant que le chemin que nous avons suivi était nécessaire. Nous sommes ainsi faits que notre esprit cherche tout d'abord un absolu sur lequel il puisse se fonder. Et ce que nous nommons un progrès consiste souvent à reconnaître que cet absolu était illusoire, et à renoncer à cet appui qu'un instant nous avons pu croire infaillible. Remarquez maintenant que si l'on accepte de regarder les choses sous cet angle, la question que nous nous sommes proposée tout au début : Peut-on comprendre le pourquoi de l'harmonie comme préétablie qui existe entre la nature d'une part, les formes et les nombres d'autre part, cette question trouve d'elle-même une partie de sa réponse. Cet accord repose sur le fait que le contenu des mathématiques est en fonction du réel objectif: les mathématiques sont une imitation schématique, une image abstraite de ce réel.

La question se réduit maintenant à un comment: Mais comment ces schémas prennent-ils corps? C'est maintenant le moment de nous souvenir de ce que nous avons dit sur la façon dont nous prenons connaissance de la réalité, sur la façon dont l'image de la réalité se constitue dans notre esprit.

Nous avions reconnu que cette prise de connaissance s'opère par l'intermédiaire de schémas successifs, les schémas mathématiques et logiques justement, dont nous recherchons l'origine et le contenu effectif. Ainsi donc: la réalité ne nous est pas donnée en bloc, dans son essence, mais toujours sous une forme inachevée. Les schémas ou théories n'en saisissent qu'un côté, qu'un aspect. En retour les schémas mathématiques prennent naissance de notre effort même de connaître : d'une part conditionnés par ce que nous avons observé, d'autre part conditionnant la connaissance même.

Il y a là une position de l'esprit qui n'est pas facile à expliquer par les mots ordinaires. En fait tout ce qu'on peut dire, c'est d'en évoquer d'une façon assez imprécise quelques caractères. Mais de même que les mots ne suffisent pas pour évoquer les couleurs, si la mémoire n'a pas conservé le souvenir des impressions sensorielles, de même tout ce qui me reste à dire serait lettre morte pour celui qui n'entendrait absolument rien aux mathématiques. Par bonheur nous avons tous eu le privilège, ne fût-ce que par l'enseignement géométrique élémentaire, de participer au patrimoine intellectuel de valeur incalculable que représente la science mathématique. Vous comprendrez donc ce que je veux dire de l'axiome, par exemple, par les mots que voici:

„Il est beaucoup trop simple de dire : l'axiome est une vérité évidente par elle-même". En fait, l'axiome est quelque chose absolument indéfinissable, un être sui generis irréductible à toute autre notion. C'est quelque chose à la jonction du donné et du pensé, à la limite entre le monde de la détermination absolue et le monde de la libre fantaisie. L'axiome est à mi-chemin entre la pure description et la libre imagination.

On pourrait nommer méthode axiomatique la méthode selon laquelle s'établit ce contact entre le réel et l'intellectuel. Toutes les mathématiques procèdent de cette méthode, dont je vais, en deux mots, dire le caractère essentiel.

Toute démarche axiomatique comprend deux actes de l'esprit, qui se conditionnent l'un l'autre, s'appuient l'un sur l'autre.

a) On accepte certains concepts fondamentaux et certaines relations logiques — les axiomes — entre ceux-ci.

b) Ces concepts et ces relations sont identifiés avec certains objets et certains phénomènes que nous percevons. Ces objets appartiennent peut-être au monde physique, comme dans la géométrie élémentaire, mais ils pourraient tout aussi bien appartenir au monde de nos pensées.

Ces deux actes de l'esprit ne peuvent être véritablement dissociés. La création axiomatique est donc un travail à la fois dans le concret et dans l'abstrait. L'on peut dire encore de l'axiome que c'est une vue schématique sur la réalité. Et de l'ensemble des mathématiques que ce sont des schémas visant, plus ou moins directement, la réalité elle-même; la notion même de réalité, et les notions des choses réelles prenant corps et signification par le processus axiomatique.

*

Pour toucher au but que je me suis proposé d'atteindre avec vous, il me faut faire finalement un rapide retour sur le sujet: Le langage et la réalité. J'ai fait déjà plusieurs fois allusion au fait que ce sujet ne diffère pas en principe de celui que nous avons traité. Nos conclusions lui sont aussi applicables. Tout homme qui parle fait de l'axiomatique, le sachant ou — le plus souvent — ne le sachant pas.

Je m'en voudrais de ne pas insister sur ce point, car c'est ici un endroit d'où l'un peut apercevoir la profonde unité de toute notre activité intellectuelle. Ce qu'on pourrait appeler le moment mathématique, c'est à dire cette réduction d'une réalité qui se fait, qui devient, à un schéma logique, ce moment mathématique est à la base même de toute connaissance formulée, quelle qu'elle soit. Il y a dans tout acte de pensée un résidu proprement mathématique.

En rassemblant maintenant tout ce que nous venons de dire sur la façon dont la prise de possession des réalités s'opère, sur la façon dont la notion même de réalité prend corps, sur le rôle des schémas, sur la méthode axiomatique, on peut donc énoncer l'affirmation que voici et qui forme le but de cet exposé:

Toute pensée exprimée est de structure axiomatique: c'est de ce point de vue que doit être jugé et apprécié son contenu de réalité. Ce contenu de réalité est d'ailleurs forcément inachevé et en devenir.