

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 95/96 (1930)
Heft: 14

Artikel: Zur Berechnung von spitzendigen Eindecker-Tragflügeln
Autor: Amstutz, Ed.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-43976>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Zur Berechnung von spitzendigen Eindecker-Tragflügeln. — Haus B. Séquin am Zürichberg (mit Tafeln 8 bis 11). — Fliegeraufnahmen für Kartenzwecke. — Bubenberg- und Bahnhofplatz in Bern. — Rheinkorrektion oberhalb des Bodensees und die Wildbachverbauungen in Graubünden. — Mitteilungen: Ueber die

Ursache von Brandfällen. Geschweißte Rohrleitungen in Hochhäusern. Dreirosenbrücke in Basel. Kraftwerke Oberhasli. — Wettbewerbe: Kunst- und Konzerthaus in Luzern. — Mitteilungen der Vereine: Schweizer Ingenieur- und Architekten-Verein. Sektion Bern. — Sitzungs- und Vortrags-Kalender.

Band 95

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 14

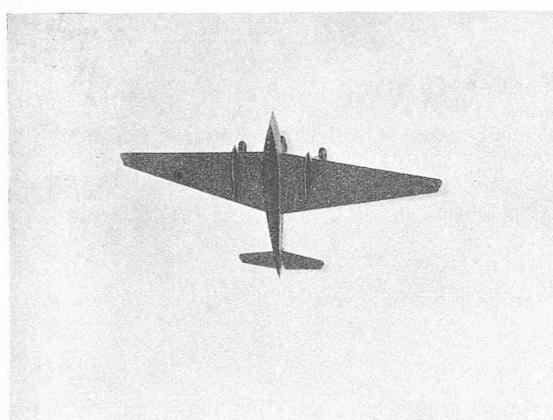


Abb. 1. Flugboot Rohrbach „Romar“, ein typischer Vertreter der Bauart mit freitragendem spitzendigem Eindeckerflügel.

Zur Berechnung von spitzendigen Eindecker-Tragflügeln.

Von Dipl. Ing. ED. AMSTUTZ, Zürich.

I. EINLEITUNG UND ZUSAMMENFASSUNG.

Seit einiger Zeit werden in immer steigendem Mass freitragende Eindeckerflugzeuge gebaut, deren Flügel nicht mehr den seit langem üblichen rechteckigen oder ellipsenähnlichen Grundriss aufweisen, sondern ausgesprochen spitzendig sind. Ein auffallender Vertreter dieser Bauart ist das Flugboot „Romar“ der Rohrbach-Gesellschaft (Abb. 1).

Es leuchtet ein, dass durch diese Grundrissform eine starke Konzentration des Auftriebes nach der Mitte (Symmetrie-Ebene) des Flügels erzwungen wird und dadurch das Biegemoment der Auftriebskräfte in jener Mittelebene bedeutend verkleinert wird. Da gleichzeitig der die Beanspruchung aufnehmende Querschnitt (das Flügelprofil) dort gerade besonders gross wird, ergeben sich insgesamt sehr kleine Beanspruchungen des Flügelmaterials und nebenbei auch willkommener Raum zur Unterbringung von Lasten im Flügel. Leider ist diese statisch so hervorragende Flügelausbildung aerodynamisch nicht ohne Nachteile, die sorgfältig abgewogen werden müssen, wenn Misserfolge vermieden werden sollen. Diesen aerodynamischen Fragen ist die nachfolgende Betrachtung gewidmet.

Die Tragflügeltheorie, wie sie von Prandtl¹⁾ hauptsächlich entwickelt wurde, hat vor allem gezeigt, dass die Widerstandskräfte des Flügels in zwei scharf zu trennende, physikalisch prinzipiell verschiedene Anteile zu zerlegen sind. Erstens haben wir den sogen. Profilwiderstand, der durch Oberflächenreibung und Grenzschichtablösung hervorgerufen wird. Er hängt von der Profilform und der gesamten Oberfläche, nicht aber von der speziellen Umrissform ab, wir haben uns demgemäß nicht weiter damit zu befassen. Der hier allein in Betracht kommende zweite Anteil röhrt her von Sekundärbewegungen, die der Flügel der Luft dadurch erteilt, dass er ja ständig das zu tragende Gewicht des ganzen Flugzeuges an sie abgibt. Da in der Sekundärbewegung Energie steckt, muss der Flügel einen Widerstand erfahren, der (nicht sehr glücklich) „induzierter“ Widerstand genannt wird.

¹⁾ Siehe etwa L. Prandtl und A. Bets: „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“. Göttingen 1927. Abb. II und III: Tragflügeltheorie I und II von L. Prandtl.

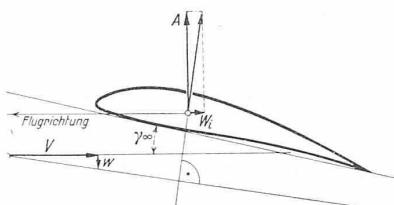


Abb. 2. Entstehung des induzierten Widerstandes W_i durch Veränderung der Anblasrichtung.

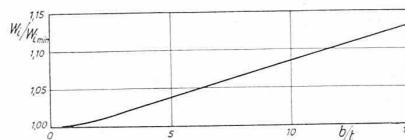


Abb. 3. Veränderung des Verhältnisses des induzierten zum kleinstmöglichen Widerstand eines Rechteckflügels in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis, nach Bets.

ein Umkreisen der Flügelenden ergibt, das sich wegen des Beharrungsvermögens der Luft als langgestrecktes Wirbelsystem über die ganze durchflogene Bahn erstreckt. Der Flügel selber steht in einer von ihm selbst geschaffenen absteigenden Strömung und muss sich auf ihr wie auf einer schießen Ebene wieder hinaufarbeiten.

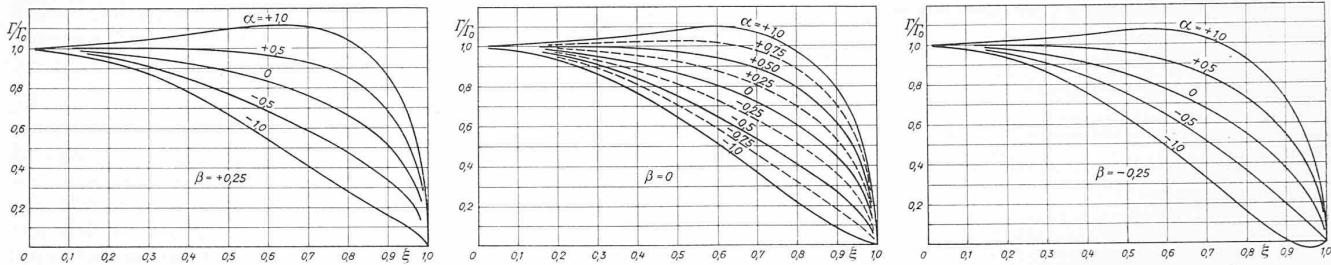
Durch diese absteigende Strömung wird ein Element des Flügels (Abb. 2) nicht entgegengesetzt der Richtung der Fluggeschwindigkeit V angeblasen, sondern unter einem um den Betrag w/V kleineren Winkel (gemessen in absolutem Mass), wenn w die Abwärtsgeschwindigkeit der Störungsbewegung am Orte des Flügelementes bedeutet. Der hydrodynamische Auftrieb steht dann auch nicht senkrecht zu V , sondern senkrecht zur resultierenden Geschwindigkeit, sodass in Bezug auf die Flugrichtung die Komponente Aw/V einen Widerstand, eben den induzierten Widerstand W_i ergibt.

Die Grösse der Abwärtsgeschwindigkeit w an jeder Stelle des Flügels ist abhängig von der Verteilung des Auftriebes längs der Flügelspannweite. Prandtl und Munk haben nachgewiesen, dass die Energie der Sekundärströmung und damit der induzierte Widerstand zu einem Minimum wird, wenn der Auftrieb nach einer Halbellipse über die Spannweite verteilt ist. Die Abwärtsgeschwindigkeit w ist dann längs dieser konstant, wodurch die rechnerische Behandlung des Widerstandsproblems wesentlich vereinfacht wird, da es auf die Lösung einer leicht lösbarer Potentialaufgabe zurückgeführt werden kann. Dieser Minimumsatz ist übrigens sehr verallgemeinerungsfähig und kann auch auf komplizierte Flügelsysteme übertragen werden.

Jede nicht elliptische Auftriebsverteilung erzeugt jedoch Abwärtsgeschwindigkeiten, die etwa in Flügelmitte oder an den Flügelenden am grössten sind, je nachdem sie volliger oder weniger völlig als die elliptische ist. Weil die Abwärtsgeschwindigkeit die Anströmungsrichtung der einzelnen Flügelemente ändert, wirkt sie selbst wieder auf die Auftriebsverteilung ein und die Ermittlung des induzierten Widerstandes für beliebige Flügelformen bietet wegen dieser Wechselwirkungen nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Genau behandelt wurde der rechteckige Flügel durch Bets²⁾, das Ergebnis seiner Untersuchung ist in Abbildung 3 dargestellt.

²⁾ A. Bets: „Beiträge zur Tragflügel-Theorie mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels“. Göt. Diss. München 1919.

Im einzelnen kommt dieser induzierte Widerstand folgendermassen zustande: Die Luft, über die der Tragflügel hinweggestrichen ist, hat von ihm einen Antrieb nach unten erfahren, die Teile, an denen er dicht vorbeiging, sind stärker, die, die weiter weg waren, weniger stark in Bewegung gesetzt. Durch das Ausweichen vor den abwärts in Bewegung versetzten Luftmassen kommen seitlich neben den Flügelenden auch Seitwärts- und Aufwärtsbewegungen vor, wodurch sich in Verbindung mit der Abwärtsbewegung unter und über dem Flügel

Abb. 4. Zirkulationsverteilungen I' nach Gleichung (1) längs der halben Spannweite für verschiedene Koeffizienten α und β .

Für spitzendige Flügel kann man die Auftriebsverteilung durch eine Reihe mit nur drei Gliedern praktisch genügend genau darstellen. Im vorliegenden Aufsatz ist zuerst dargelegt, wie für eine solche vorgegebene Auftriebsverteilung die sie erzeugende Flügelform gefunden werden kann. Dazu wird die Verteilung des Biegsungs- und Torsionsmomentes der Luftkräfte längs der Spannweite ermittelt und Formeln für den Vergleich von Widerstand, grösstem Biegsungs- und Torsionsmoment von spitzendigen und elliptischen Flügeln angegeben. Am Beispiel des verwundenen Flügels wird erläutert, wie die Auftriebsverteilung für einen gegebenen Flügel näherungsweise durch Auflösen zweier linearer Gleichungen gefunden werden kann. Die vereinfachten Gleichungen für den nicht verwundenen (ebenen) Flügel sind angegeben.

II. RECHNUNGS-GRUNDLAGEN.

Es bedeuten im folgenden:

x Abstand von der Flügelmitte (Symmetrieebene) in m
 b Spannweite in m

$$\xi = \frac{2x}{b}$$

t Flügeltiefe im Abstand x in m

V Fluggeschwindigkeit in msec^{-1}

w vertikale Störungsgeschwindigkeit in msec^{-1}

γ Anstellwinkel in $^{\circ}$

δ Schränkungswinkel in $^{\circ}$

ϱ Massendichte der Luft in $\text{kgm}^{-4}\text{sec}^2$

$$q = \frac{\varrho^2}{2} = \text{Staudruck in } \text{kgm}^{-2}$$

F Flügelprojektionsfläche in m^2

A Totalauftrieb des Flügels in kg

W Gesamtwiderstand des Flügels in kg

W_p Profilwiderstand in kg

W_i induzierter Widerstand in kg

M Moment der Luftkräfte in mkg um den Schnittpunkt des Lotes vom vordersten Punkt des Flügelprofils auf die Flügelsehne

c_a definiert durch $A = c_a qF$

c_w " " $W = c_w qF$

c_{wp} " " $W_p = c_{wp} qF$

c_{wi} " " $W_i = c_{wi} qF$

c_m " " $M = c_m qFt$

B Biegmomment in mkg

T Torsionsmoment in mkg

Γ Zirkulation in m^2/sec definiert als

$$\Gamma = \frac{\text{Auftrieb pro m Spannweite}}{qV} = \frac{c_a}{2} Vt$$

α, β Zahlen

Alle Werte, die für die Flügelmitte ($x = \xi = 0$) gelten, sind mit dem Index 0 versehen.

Prandtl³⁾ gibt als geeignete Funktion zur Darstellung der Auftriebsverteilung an:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4 + \dots) \quad (1)$$

Im folgenden beschränken wir uns auf die Verwendung der drei ersten Glieder. Beispiele von Auftriebsverteilungen, die sich so ergeben, sind in den Abb. 4a, 4b, 4c aufgezeichnet. Für die elliptische Verteilung ist $\alpha = \beta = 0$; weniger völlige, für spitzendige Flügel in Frage kommende Verteilungen liefern negative Werte von α .

³⁾ loc. cit. Abb. II, Seite 31 und 32.

Der angegebenen Quelle entnehmen wir ferner:

$$A = \frac{\pi}{4} \varrho b V \Gamma_0 \left(1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} \right) \quad (2)$$

$$w = \frac{\Gamma_0}{2b} \left[1 + \alpha \left(3\xi^2 - \frac{1}{2} \right) + \beta \left(5\xi^4 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{16} \right) \right] \quad (3)$$

$$W_i = \frac{\pi \varrho}{8} \Gamma_0^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{11}{32} \alpha \beta + \frac{1}{128} \beta^2 \right) \quad (4)$$

und mit Berücksichtigung von (2)

$$W_i = \frac{A^2}{\pi \varrho \delta^2} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{11}{32} \alpha \beta + \frac{\beta^2}{128} \right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} \right)^2} \quad (4a)$$

Es interessieren weiter die Biegsungs- und Torsionsmomente. Für das Biegmomment in x_1 bzw. ξ_1 können wir herleiten (Abb. 5):

$$x = \frac{b}{2}$$

$$M_{x_1} = \int_{x_1} (x - x_1) dA \quad (5)$$

$$= \varrho V \frac{b^2}{4} \Gamma_0 \int_{\xi_1}^{\xi=1} \sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4) (\xi - \xi_1) d\xi$$

Mit der Substitution $\xi = \sin \varphi$ erhält man nach einigen Umformungen

$$M_{\xi} = \varrho V \frac{b^2}{4} \Gamma_0 \left[\sqrt{1 - \xi^2} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{\xi^2}{6} \right) + \alpha \left(\frac{2}{15} - \frac{7}{120} \xi^2 + \frac{1}{20} \xi^4 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \beta \left(\frac{8}{105} - \frac{41}{1680} \xi^2 - \frac{11}{840} \xi^4 + \frac{1}{42} \xi^6 \right) \right\} \right. \\ \left. - \xi \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8} + \frac{3}{48} \beta \right) \arccos \xi \right]. \quad (6)$$

Speziell für das Moment in Flügelmitte:

$$M_0 = \varrho V \frac{b^2}{12} \Gamma_0 \left(1 + \frac{2}{5} \alpha + \frac{8}{35} \beta \right) \quad (7)$$

und mit Berücksichtigung von (2)

$$M_0 = \frac{A b}{3 \pi} \frac{1 + \frac{2}{5} \alpha + \frac{8}{35} \beta}{1 + \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{8} \beta} \quad (7a)$$

Das Torsionsmoment lässt sich nicht in dieser Allgemeinheit aufstellen. Wie sich weiter unten zeigt, bestimmt die Zirkulationsverteilung die Tragflügelform nicht eindeutig; so ist auch das Torsionsmoment von weitern einschränkenden Annahmen abhängig.

III. ERMITTlung DER TRAGFLÜGELFORM ZUR ERZEUGUNG EINER GEGEBENEN AUFTRIEBSVERTEILUNG.

Wir schreiten nun zur Lösung folgender Frage: Durch welche Form der Tragfläche kann die gewünschte Auftriebs- bzw. Zirkulationsverteilung $\Gamma(\xi)$ erzeugt werden?

Ein Tragflügel ist charakterisiert durch seinen Grundriss $t(\xi)$, sein Profil und seine Verwindung, d. h. die Schränkung der Profile längs der Spannweite $\delta(\xi)$.

Ein Element des Flügels soll die Zirkulation

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4) = \frac{c_a}{2} Vt \quad (8)$$

aufweisen. Die notwendige Tragdecktiefe t ist dann festgelegt, wenn c_a gegeben ist. Für ein bestimmtes Profil ist c_a nur noch vom Anblasewinkel abhängig, wie aus den Profilbüchern auf Grund der Versuchsergebnisse zu entnehmen ist. Im praktisch brauchbaren Bereich kann $c_a(\gamma)$ als linear angenommen werden, indem $\Delta c_a = k \Delta \gamma$ gesetzt wird. Theoretisch ist für dünne, schwach gewölbte Flächen $k = 2\pi$, experimentell ergeben sich etwas kleinere Werte.

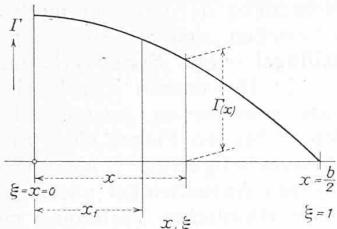


Abb. 5. Bezeichnungen zur Herleitung des Biegungsmomentes.

Hat der Flügel in der Mitte einen geometrischen Anstellwinkel $\gamma_{\infty 0}$, d. h. ist die Flügelsehne im Winkel $\gamma_{\infty 0}$ zur Flugrichtung geneigt und ist der Flügel in ξ um den Schränkungswinkel δ verwunden, d. h. um δ^0 steiler eingestellt als in der Flügelmitte, so ist dort sein geometrischer Anstellwinkel

$$\gamma_{\infty} = \gamma_{\infty 0} + \delta$$

(Der Index ∞ wird verwendet, weil für den Flügel mit unendlicher Spannweite die Störungsgeschwindigkeit verschwindet und der geometrische gleich dem wirksamen Anstellwinkel wird.)

Die Sekundärströmung erzeugt aber in ξ die Störungsgeschwindigkeit w senkrecht zu V , dadurch wird der Flügel nicht unter dem geometrischen Anstellwinkel γ_{∞} angeblasen, sondern unter dem wirksamen Anstellwinkel (siehe Abb. 2)

$$\gamma = \gamma_{\infty} - \frac{w}{V}$$

Bedeutet $c_{a \infty 0}$ den Auftriebskoeffizienten in Flügelmitte, wenn dort keine Störungsgeschwindigkeit wäre, dann ist für ξ

$$c_a = c_{a \infty 0} + k \left(\delta - \frac{w}{V} \right) \quad \dots \quad (9)$$

Mit Berücksichtigung von (9) wird nun (8) zu

$$\Gamma_0 \sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4) = \left(\frac{c_{a \infty 0}}{2} + \frac{k}{2} \delta \right) V t - \frac{k}{2} w t \quad (8a)$$

Daraus ersieht man, dass die Flügelform $t(\xi)$ nicht eindeutig ist, sondern für eine vorgegebene Zirkulationsverteilung noch von der Flügelverwindung $\delta(\xi)$ abhängt.

a) Der ebene Flügel.

Beschränken wir uns auf den nicht verwundenen (ebenen) Flügel, der längs der ganzen Spannweite den selben geometrischen Anstellwinkel $\gamma_{\infty 0} = \gamma_{\infty \xi} = \gamma_{\infty}$ besitzt.

Gleichung (8a) lautet nun mit Berücksichtigung von (3)

$$\Gamma_0 \sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4) = \frac{c_{a \infty 0}}{2} V t - \frac{k}{4 b} \left[1 + \alpha \left(3 \xi^2 - \frac{1}{2} \right) + \beta \left(5 \xi^4 - \frac{3}{2} \xi^2 - \frac{1}{16} \right) \right] \quad (8b)$$

und aufgelöst nach t :

$$t = \frac{\sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4)}{\frac{c_{a \infty 0}}{2} V - \frac{k}{4 b} \left[1 + \alpha \left(3 \xi^2 - \frac{1}{2} \right) + \beta \left(5 \xi^4 - \frac{3}{2} \xi^2 - \frac{1}{16} \right) \right]}$$

Nun ist

$$\Gamma_0 = \frac{c_{a \infty 0}}{2} V t_0 - \frac{k}{2} w_0 t_0 = \frac{c_{a \infty 0}}{2} V t_0 - \Gamma_0 \frac{k t_0}{4 b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{16} \right) \quad (8c)$$

daraus

$$\frac{t}{t_0} = \frac{\sqrt{1 - \xi^2} (1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4)}{1 - \frac{k}{4 b} \left[3 \alpha \xi^2 + \beta \left(5 \xi^4 - \frac{3}{2} \xi^2 \right) \right]} \quad \dots \quad (9)$$

Für den ebenen Flügel ist also die Zirkulationsverteilung vom Anstellwinkel unabhängig, weiter ist für gegebene Zirkulationsverteilung $t(\xi)$ nurmehr eine Funktion vom Verhältnis Flügeltiefe in Tragdeckmitte zur Spannweite.

Ein Beispiel zeigt die Anwendung am besten: Zu konstruieren sei ein unverwundener Flügel von 40 m Spannweite und 6,5 m Tiefe in der Mitte, sodass dort etwa bei Verwendung des dicken Profils Nr. 449 der Göttinger Profilsammlung⁴⁾ eine Bauhöhe von 1,1 m ent-

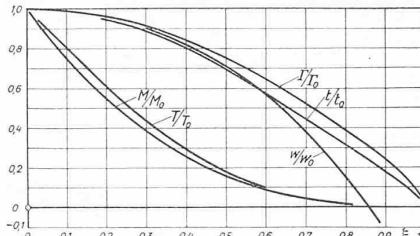


Abb. 6. Verteilung von Zirkulation, Flügeltiefe, Störungsgeschwindigkeit, Biegungs- und Torsionsmoment längs der halben Spannweite für den ebenen Flügel mit
a) Zirkulationsverteilung nach Gl. (1) für $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,1$. b) mit elliptischer Zirkulationsverteilung.

steht. Die Zirkulationsverteilung sei durch $\alpha = -0,5$ und $\beta = -0,1$ charakterisiert, für k werde der theoretische Wert 2π verwendet.

In Abbildung 6a sind Zirkulation Γ , Flächentiefe t , ferner der Verlauf der Störungsgeschwindigkeit w über der halben Spannweite aufgetragen, und zwar alle als Verhältniszahlen zur jeweiligen Grösse in Flügelmitte. Einen zweckmässigen Grundriss für die errechneten Flügeltiefen zeigt Abbildung 7a. In Abbildung 7b ist zum Vergleich der Flügel kleinsten induzierten Widerstandes mit

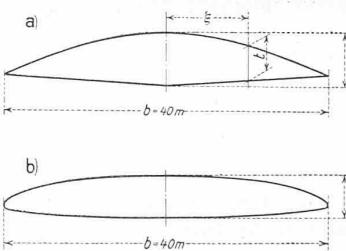


Abb. 7. Flügel-Grundrisse.
a) Flügel mit Zirkulationsverteilung nach
Abb. 6a, Spannweite 40 m, Fläche 163 m².
b) Flügel kleinsten induzierten Widerstandes
mit 40 m Spannweite und 163 m² Fläche.

der selben Fläche und Spannweite, der elliptische Form haben muss, dargestellt.

Von Interesse ist nun der Vergleich des induzierten Widerstandes, sowie der Biegungs- und Torsionsmomente der beiden Flügel. Versetzen wir alle Zeichen, die sich auf den elliptischen Flügel beziehen, mit einem Stern, und vergleichen, was allein Sinn hat, die Verhältnisse bei gleichem Auftrieb, dann erhalten wir aus Gleichung (2)

$$\Gamma_0 = \frac{4 A}{\pi q b V \left(1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} \right)}$$

$$\Gamma_0^* = \frac{4 A}{\pi q b V}$$

$$\frac{W_i}{W_{i \min}} = \frac{1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{11}{32} \alpha \beta + \frac{\beta^2}{128}}{\left(1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} \right)^2} \quad \dots \quad (10)$$

$$\frac{M_0}{M_0^*} = \frac{1 + \frac{2}{5} \alpha + \frac{8}{35} \beta}{1 + \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{8} \beta} \quad \dots \quad (11)$$

Nach Abb. 8 übertrifft also die gewählte Zirkulationsverteilung den minimalen Widerstand um 8,2 %, bringt aber eine Verringerung des Biegungsmomentes um 9,9 % und ein um 14,1 % grösseres Torsionsmoment im Sturzflug. Dabei ist aber zu beachten, dass der elliptische Flügel mit ebenfalls 163 m² Fläche in der Mitte bloss eine Tiefe von 5,19 m und so nur 0,88 m Bauhöhe aufweist gegenüber $t_0 = 6,5$ m und $h_0 = 1,1$ m des Vergleichsflügels. Ferner ist der induzierte Widerstand nur ein Teil des Gesamtwiderstandes, etwa 5 bis 15 % beim Geradeausflug und 20 bis 30 % beim Steigen, sodass die Widerstandsvermehrung besonders beim Flug mit kleinen c_a prozentual noch weit weniger ausmacht.

⁴⁾ L. Prandtl. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lief. München und Berlin bei Oldenbourg, 1921.

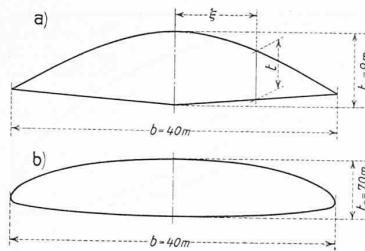


Abb. 9. Flügel-Grundrissse.
a) Flügel mit gleicher Zirkulationsverteilung wie Abb. 6a, aber größerem t_0/b , $b = 40 \text{ m}$, $F = 220 \text{ m}^2$.
b) Flügel kleinsten induzierten Widerstandes mit $b = 40 \text{ m}$, $F = 220 \text{ m}^2$.

In den Abb. 6a und 6b ist auch der Verlauf des Biegsungs- und Torsionsmoments längs der Spannweite aufgetragen. Für den Vergleich der Torsionsmomente wurde der Sturzflug, d. h. der Anstellwinkel mit dem Auftrieb Null gewählt. In diesem Falle ist die Störungsgeschwindigkeit für jedes Element $t dx$ des Flügels auch Null, somit besitzt auch jedes den selben Momentenkoeffizienten $c_m(c_a=0)$ und liefert zum Torsionsmoment den Beitrag

$$dT = c_m(c_a=0) \frac{\varrho}{2} V^2 t^2 dx$$

so dass dieses zu

$$T(\xi) = \frac{\varrho}{2} V^2 \frac{b}{2} c_m(c_a=0) \int_{-1}^1 t^2 dx \quad \dots \quad (12)$$

wird.

t wäre nun aus (9) einzuführen; das entstehende Integral ist aber geschlossen nicht lösbar und wird wie das für die Fläche

$$F = \frac{b}{2} \int_{-1}^1 t dx \quad \dots \quad (13)$$

rascher graphisch durch Planimetrieren gelöst.

Abbildung 9a zeigt noch einen Flügel mit gleicher Zirkulationsverteilung wie der Flügel Abbildung 7a, aber mit anderem t_0/b . Der ihm entsprechende elliptische Flügel gleicher Fläche und Spannweite Abbildung 9b steht in Bezug auf Widerstand und Biegmomment zu ihm im gleichen Verhältnis wie die beiden andern Flügel, etwas geändert hat sich nur das Torsionsmoment.

Zu den Zirkulationsverteilungen der Abb. 4a, 4b, 4c sind in Abb. 10 die Widerstände und Biegmomente im Vergleich zum Flügel mit elliptischer Verteilung aufgetragen.

b) Der verwundene Flügel.

Eine vorgegebene Zirkulationsverteilung kann nun nicht nur durch einen ebenen Flügel erzeugt werden, dessen Flügeltiefe nach Gleichung (9) ermittelt wird, sondern durch passende Verwindung des Flügels in gewissen Grenzen auch von einem beliebigen andern Flügelgrundriss.

Gegeben sei der Flügelgrundriss $t(\xi)$, gesucht ist jetzt die zur Erzeugung der gewünschten Auftriebsverteilung notwendige Verwindung $\delta(\xi)$ des Flügels. Die Lösung erreichen wir auf einem Umweg, indem wir uns zuerst die Auftriebskoeffizienten $c_{a\infty}$ ausrechnen, die den geometrischen Anstellwinkeln $\gamma_\infty = \gamma_{\infty 0} + \delta(\xi)$ entsprechen, und dann gemäß dem experimentell bekannten Zusammenhang zwischen c_a und γ auf γ_∞ und damit auf δ übergehen.

Eliminieren wir aus Gl. (8b) und (8c) das Γ_0 und lösen nach $c_{a\infty}$ auf, so erhalten wir

$$c_{a\infty} = c_{a\infty 0} \frac{t_0}{t} \times \sqrt{1 - \xi^2(1 + \alpha \xi^2 + \beta \xi^4) + \frac{kt}{4b} \left[1 + \alpha \left(3 \xi^2 - \frac{1}{2} \right) + \beta \left(5 \xi^4 - \frac{3}{2} \xi^2 - \frac{1}{16} \right) \right]} \quad (14)$$

$$1 + \frac{kt_0}{4b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{16} \right)$$

In Abb. 11 ist für das Profil Nr. 449, das den untenstehenden Beispielen zu Grunde gelegt ist, der Zusammenhang $c_{a\infty}(\gamma_\infty)$ aufgetragen.

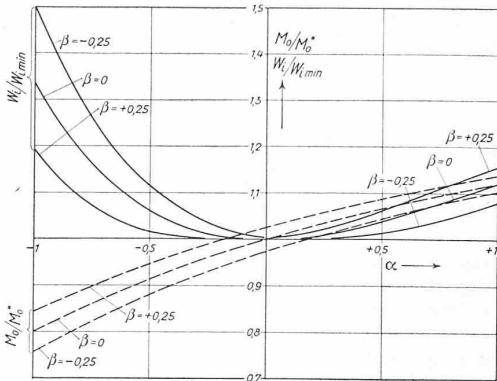


Abb. 10. Widerstände und Biegmomente der Zirkulationsverteilungen Abb. 4 im Vergleich zu Widerstand und Biegmomment der elliptischen Verteilung.

Die Messungen der Göttingermodellflügel beziehen sich auf sogenannte Normalflügel vom Seitenverhältnis $F/b^2 = 1/5$; für unsern Zweck sind also die gemessenen Anstellwinkel auf den ∞ breiten Flügel ohne Störungsgeschwindigkeiten umzurechnen, dessen Anstellwinkel unter der Annahme elliptischer Verteilung um den Betrag

$$\left(\frac{w}{v} \right)^0 = 4 \gamma^0 = 57,3 \frac{c_a}{2 \pi} \frac{F}{b^2} = 1,823 c_a$$

kleiner ist als der Modellflügel. (Die Zahl $57,3^\circ$ röhrt von der Umrechnung des Bogenmasses ins Winkelmaß her: $2 \pi = 360^\circ$, also

$$1 = \frac{360^\circ}{2 \pi} = 57,3^\circ$$

Schreibt man ein bestimmtes $c_{a\infty 0}$ in Flügelmitte vor, so ist durch Gleichung (14) und Abbildung 11 das zur Erzeugung der gewünschten Zirkulationsverteilung notwendige $c_{a\infty}$ überall bekannt; aus Abbildung 11 ist der zu jedem $c_{a\infty}$ gehörige geometrische Anstellwinkel γ_∞ abzulesen und der Schrängungswinkel δ ergibt sich aus

$$\gamma_\infty = \gamma_{\infty 0} + \delta$$

Zur Charakterisierung des geometrischen Anstellwinkels des Flügels genügt die Angabe von $\gamma_{\infty 0}$.

In Abbildung 12 sind die Verhältnisse dargestellt für einen Trapezflügel (Abb. 13) mit rechteckigem Mittelstück, der in Flächeninhalt und Spannweite mit den Flügeln Abbildungen 7a und 7b übereinstimmt und der außerdem noch die selbe Zirkulationsverteilung wie der Flügel Abbildung 7a aufweisen soll. Der äusserste Flügelschnitt muss demnach um 90° weniger steil eingestellt werden, als der in Flügelmitte.

Für den ebenen Flügel war die Zirkulationsverteilung längs der Spannweite für alle Anstellwinkel gleich, solange sich c_a linear mit dem Anstellwinkel ändert. Für den verwundeten Flügel trifft dies nicht mehr zu. Der Flügel besitzt jetzt längs der Spannweite ganz verschiedene Auftriebskoeffizienten, die wegen ihrer linearen Abhängigkeit vom Anstellwinkel sich bei dessen Änderung nicht um prozentuell gleich viel zu ändern vermögen. Beim nicht elliptischen ebenen Flügel bestanden wegen der Verschiedenheit der Störungsgeschwindigkeiten auch kleine Unterschiede in den Auftriebskoeffizienten, bei Anstellwinkeländerungen änderten sich aber auch die Störungsgeschwindigkeiten immer um solche Beträge, dass die gleiche Auftriebsverteilung erhalten blieb. Je mehr sich beim verwundeten Flügel der Anstellwinkel $\gamma_{\infty 0}$ vom oben betrachteten „Grundwert“ entfernt, umso mehr wird sich die Zirkulationsverteilung von der „Grundverteilung“ unterscheiden, d. h. die diese charakterisierenden Koeffizienten α und β werden andere Werte annehmen und wir stehen vor der Aufgabe, diese zu ermitteln.

IV. ANGENÄHERTE ERMITTlung DER AUFTRIEBSVERTEILUNG FÜR GEGEBENE TRAGFLÜGEL.

Durch zwei Parameter α und β ist nur eine beschränkte Mannigfaltigkeit von Auftriebsverteilungen darstellbar. Die Verteilung für einen beliebigen Flügel wird im allgemeinen die Mitnahme weiterer Parameter, streng genommen von unendlich vielen erfordern. Praktisch erhalten wir aber oft bei Anwendung nur zweier Parameter eine genügende Annäherung, wenn wir diese nur so wählen, dass die durch sie charakterisierte Verteilung sich der tatsächlichen möglichst eng anschmiegt. Dies ist vor allem für Verteilungen, die weniger völlig als die elliptische sind, wie sie durch spitzige Flügel erzeugt werden, in befriedigender Weise möglich.

Durch zwei Parameter erhalten wir schon vollständige Uebereinstimmung in vier Punkten längs der halben Spannweite, nämlich ohne weiteres in Flügelmitte und am Flügelende, wo die Zirkulation auf Null absinken muss und

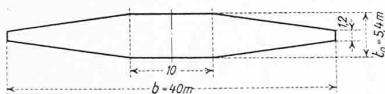


Abb. 13. Verwundener Trapezflügel mit rechteckigem Mittelstück, $F = 163 \text{ m}^2$.

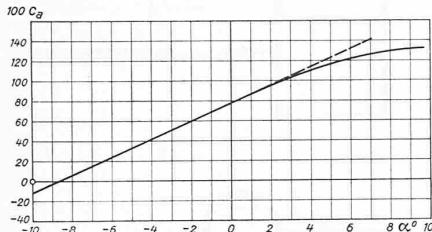


Abb. 11. c_a in Funktion des Anstellwinkels für Profil 449 der Göttinger Sammlung, umgerechnet auf den unendlich breiten Flügel.

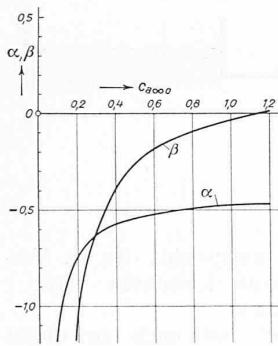


Abb. 14. Koeffizienten α und β bei Veränderung des Anstellwinkels für den Trapezflügel Abb. 13.

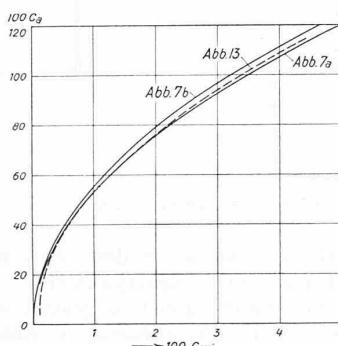


Abb. 16. Induzierte Widerstände der Flügel nach den Abb. 7a, 7b und 13 in Polarendarstellung.

sodann für zwei beliebig dazwischen auszuwählende Punkte. Für diese Zwischenwerte ξ_1 und ξ_2 sind wir in der Lage, zwei Bedingungsgleichungen aufzustellen, deren Auflösung die gesuchten Parameter α und β liefert.⁵⁾

a) Der verwundene Flügel.

Zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen führen wir in Gl. 14 einmal die zu einem bestimmten $\gamma_{\infty 0}$ gehörenden Werte von $c_{a\infty 0}$, $c_{a\infty}$, t_0 und t für ξ_1 und so dann für ξ_2 ein, wodurch zwei Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} A_1 - a B_1 - \beta C_1 &= 0 \\ A_2 - a B_2 - \beta C_2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (15)$$

mit α und β als Unbekannten entstehen, in denen

$$A_1 = \frac{c_{a\infty 1} t_1}{c_{a\infty 0} t_0} + \frac{k t_1}{4 b} \left(\frac{c_{a\infty 1}}{c_{a\infty 0}} - 1 \right) - \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad \dots \quad (16)$$

$$B_1 = \frac{k t_1}{8 b} \left(\frac{c_{a\infty 1}}{c_{a\infty 0}} - 1 \right) + \frac{k t_1}{4 b} 3 \xi_1^2 + \xi_1^2 \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad \dots \quad (17)$$

$$C_1 = \frac{k t_1}{64 b} \left(\frac{c_{a\infty 1}}{c_{a\infty 0}} - 1 \right) + \frac{k t_1}{4 b} \left(5 \xi_1^4 - \frac{3}{2} \xi_1^2 \right) + \xi_1^4 \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad (18)$$

und A_2 , B_2 , C_2 durch Vertauschen von $c_{a\infty 1}$, t_1 und ξ_1 gegen $c_{a\infty 2}$, t_2 und ξ_2 gebildet werden.

Für das Beispiel ist etwa für $c_{a\infty 0} = 0,4$ nach Abbildung 11: $\gamma_{\infty 0} = -4,2^\circ$, in $\xi_1 = 0,5$ ist nach Abb. 12 $\delta_1 = -0,4^\circ$, also $\gamma_{\infty 1} = -4,6^\circ$ und aus Abbildung 11 $c_{a\infty 1} = 0,365$.

Für ξ_1 wählt man vorteilhaft 0,5 bis 0,6, für ξ_2 0,85 bis 0,95.

Der wahre Auftriebskoeffizient des ganzen Flügels ergibt sich aus der Kombination der Gl. (2) und (8c) zu

$$c_a = c_{a\infty 0} \frac{\pi b t_0}{4 F} \frac{1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8}}{1 + \frac{k t_0}{4 b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{16} \right)} \quad \dots \quad (19)$$

⁵⁾ Nach dem selben Gedankengang, wenn auch auf formal anderem Wege behandelt Glauert in seinem Buche „The Elements of aerofoil and airscrew theory“ Cambridge 1926 (neuerdings auch deutsch bei Springer) das Problem. Seine Ansätze werden verwendet von Küssner in seiner Dissertation: „Das wirtschaftliche Ozeanflugzeug“. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1928, S. 513. München und Berlin bei Oldenbourg.

ZUR BERECHNUNG VON SPITZENDIGEN EINDECKER-TRAGFLÄCHEN.

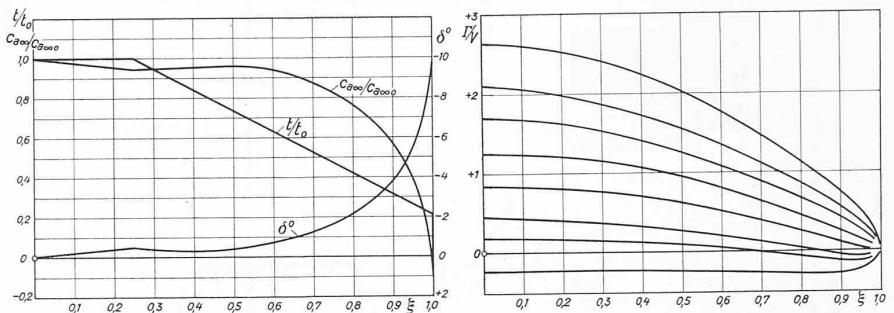


Abb. 12. $c_{a\infty}$ und Schränkungswinkel δ längs der halben Spannweite für den verwundenen Trapezflügel Abb. 13.

Abb. 15. Auftriebsverteilungen des Trapezflügels Abb. 13 bei verschiedenen Anstellwinkeln.

aus Gl. (4) und (8c) der Koeffizient des induzierten Widerstandes

$$c_{wi} = c_{a\infty 0} \frac{\pi}{16} \frac{t_0^2}{F} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{11}{32} \alpha \beta + \frac{\beta^2}{128} \right)}{\left[1 + \frac{k t_0}{4 b} \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{16} \right) \right]^2} \quad \dots \quad (20)$$

Für den Flügel Abbildung 13 ist im Diagramm Abbildung 14 das Ergebnis der Durchrechnung für $\xi_1 = 0,5$ und $\xi_2 = 0,9$ aufgetragen. Aus Abbildung 15, die die Auftriebsverteilung für einige Anstellwinkel zeigt, ist ersichtlich, dass für grössere Auftriebsbeiwerte als dem „Grundwert“ die Auftriebsverteilung volliger wird und sich der günstigsten nähert, für kleinere Auftriebsbeiwerte aber immer mehr sich von der elliptischen entfernt. Insbesondere verschwindet für den Auftrieb Null der induzierte Widerstand nicht mehr. Das ist auch zu erwarten, denn beim verwundenen Flügel kommt der Auftrieb Null nicht dadurch zustande, dass wie beim ebenen Flügel alle Elemente des Flügels zugleich keinen Auftrieb und dadurch auch keine Sekundärströmungen mehr erzeugen, sondern ein Teil des Flügels, für das vorliegende Beispiel die inneren Partien, erzeugen noch Auftrieb, den aber die äusseren durch Auftrieb kompensieren. Diese von der elliptischen erheblich abweichende Auftriebsverteilung erzeugt Sekundärströmungen und damit auch induzierten Widerstand. In Abbildung 16 sind die induzierten Widerstände der drei Flügel Abbildung 7a, 7b und 13 in Polarenform dargestellt. Um die Unterschiede deutlicher hervorzuheben, ist für c_{wi} ein grösserer Maßstab als üblich gewählt.

b) Der ebene Flügel.

Die Auftriebsverteilung eines gegebenen ebenen Flügels wird näherungsweise auch durch Auflösen zweier linearer Gleichungen (15) ermittelt, wie dies oben für den verwundenen Flügel dargestellt wurde. Da $c_{a\infty 0} = c_{a\infty 1} = c_{a\infty 2}$, vereinfachen sich die Ausdrücke für die Grössen A , B , C zu

$$A_1 = \frac{t_1}{t_0} - \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad \dots \quad (16a)$$

$$B_1 = \xi_1^2 \left(\frac{3 k}{4} \frac{t_1}{b} + \sqrt{1 - \xi_1^2} \right) \quad \dots \quad (17a)$$

$$C_1 = \frac{k t_1}{4 b} \left(5 \xi_1^4 - \frac{3}{2} \xi_1^2 \right) + \xi_1^4 \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad (18a)$$

und analogen Werten für A_2 , B_2 , C_2

V. ALLGEMEINE BEMERKUNGEN.

Die abgeleiteten Beziehungen gründen sich auf die lineare Abhängigkeit des Auftriebes vom Anstellwinkel und die Voraussetzung, dass die Störungsgeschwindigkeiten w klein gegenüber der Fluggeschwindigkeit V sein sollen. Beide Bedingungen sind im allgemeinen im brauchbaren Anstellwinkelbereich hinreichend erfüllt, d. h. solange noch kein Loslösen der Strömung von der Saugseite des Flügels eingesetzt hat. Dieses „Abreissen“ der Strömung ist, wie der zweite Anteil des Flügelwiderstandes, der Profilwiderstand, durch Zähigkeitswirkungen bedingt und der Rech-

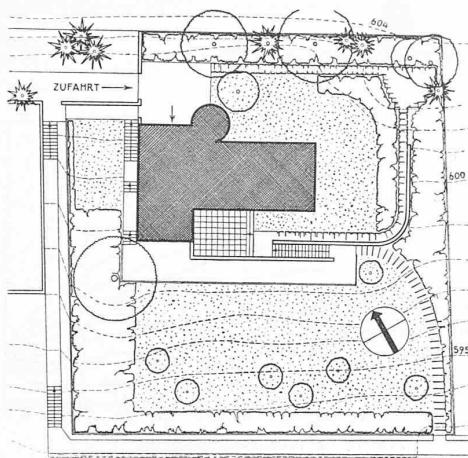


Abb. 1. Haus B. Séquin. — Lageplan 1 : 600.

nung noch nicht genügend zugänglich. Wir müssen uns deshalb mit einigen qualitativen Bemerkungen begnügen.

Der Profilwiderstand ist in erster Linie von der Oberflächenbeschaffenheit des Flügels, dem Verhältnis Flügeldicke zu -tiefe und unter sonst gleichen Verhältnissen von der Reynolds'schen Zahl $R = Vt : v$ (v = kinematische Zähigkeit in m^2/sek) abhängig. Je grösser R , umso kleiner ist im allgemeinen c_{wp} , und auch das Abreissen der Strömung wird zu grössern Anstellwinkeln hinausgeschoben. Der Rechteckflügel mit überall gleichem R sollte in dieser Hinsicht am besten abschneiden. Spitzendige Flügel dagegen haben aussen bedeutend kleinere R als in Flügelmitte, das Abreissen wird aussen einsetzen. Diese Tendenz wird durch die Verteilung der Störungsgeschwindigkeit w noch wesentlich verstärkt. Die Abwindverteilung stellt sich immer so ein, dass die Verteilung des Auftriebes sich der elliptischen nähert. Bei spitzendigen Flügeln werden dadurch die Flügelenden stärker belastet, die Flügelmitte aber entlastet. Wegen kleiner oder gar negativer Abwärtsgeschwindigkeiten an den Flügelenden sind die wirksamen Anstellwinkel dort grösser als in der Mitte, wo sie durch grosse Abwärtsgeschwindigkeiten verringert werden. In Bezug auf erreichbaren Höchstauftrieb dürfte der spitzendige Flügel hinter dem elliptischen zurückstehen. Eine Göttinger-Windkanaluntersuchung¹⁾ bestätigt diese Vermutung. Möglicherweise macht sich dafür der Einfluss des Rumpfes auf den Höchstauftrieb weniger geltend als beim elliptischen Flügel. Verlässliche Auskunft über diese Fragen vermag nur das Experiment durch Modellversuche im Windkanal zu geben.

Dieser ausgleichenden Wirkung der Abwärtsgeschwindigkeit ist es übrigens auch zuzuschreiben, dass sich das Biegungsmoment spitzendiger Flügel nicht so klein ergibt, als aus der Grundrissform allein erwartet werden könnte.

Eine für den Konstrukteur wichtige Grösse ist die Abwärtsgeschwindigkeit am Leitwerk, weil durch sie die Stabilität beeinflusst wird. Eine Abschätzung ihrer Grösse für den spitzendigen Flügel erhält man dadurch, dass die für den elliptischen Flügel bekannte Abwindkorrektur²⁾ vergrössert wird um das Verhältnis der Abwindgeschwindigkeiten am spitzendigen und elliptischen Flügel am Orte des Flügels selber und bezogen auf gleichen Auftrieb, also nach Gl. (2) und (3) um den Betrag

$$\frac{w}{w^*} = \frac{1 + \alpha \left(3 \frac{\xi^2}{5} - \frac{1}{2} \right) + \beta \left(5 \frac{\xi^4}{2} - \frac{3}{2} \frac{\xi^2}{5} - \frac{1}{16} \right)}{1 + \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8}}$$

Für ξ ist dabei der Wert einzusetzen, der $1/3$ bis $1/2$ der

¹⁾ Prandtl. Ergebnisse der Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen. 1. Lieferung. Seite 65. München und Berlin 1921. Verlag R. Oldenbourg.

²⁾ Siehe z. B. in: Helmbold: „Ueber die Berechnung des Abwindes hinter einem rechteckigen Tragflügel“. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1925, Heft 15. München u. Berlin, Verlag R. Oldenbourg.

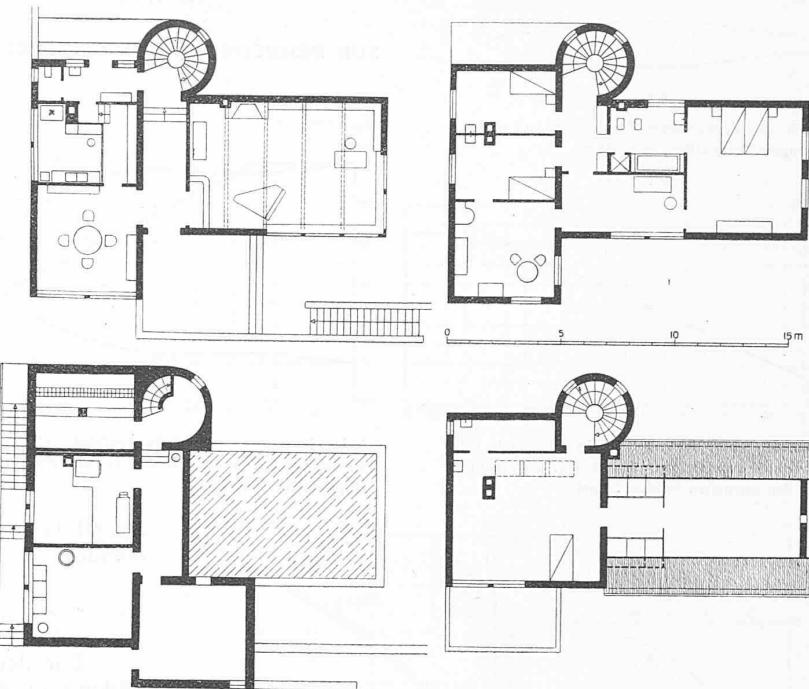


Abb. 2. Haus B. Séquin in Zürich. — Grundrisse 1 : 300.

halben Spannweite des Leitwerks entspricht; für im Verhältnis der Flügelspannweite kleine Leitwerke kann ξ unbedenklich gleich 0 gesetzt werden.

Herr Privatdozent J. Ackeret hat mich zu dieser Untersuchung angeregt. Ich möchte ihm auch an dieser Stelle für seine Unterstützung herzlich danken.

Haus B. Séquin am Zürichberg.

Architekt ERNST F. BURCKHARDT, Zürich.

Das Haus Séquin liegt an einer der wenigen Stellen des Zürichberges, wo sich durch einen glücklichen Zufall ein Paar Häuser verwandter Art zusammengefunden haben, obgleich sie von verschiedenen Architekten ohne gemeinsame Uebereinkunft errichtet sind. Es gibt dort also so etwas wie „Stimmung“, oder „Milieu“, das das einzelne Haus mit den Nachbarhäusern verbindet und die krampfhafte Isolierung des einzelnen Hauses lockert, zu der sonst auch die besten Bauten dieses Quartiers von ihrer Umgebung meistens verurteilt sind. Der Umstand, dass dieses Haus ausserdem an einem privaten Stichsträsschen, und nicht an einer öffentlichen Strasse liegt, erlaubte die Errichtung von Gartenmauern; die Abbildungen zeigen, wie viel besser sich ein Baukörper mit der Landschaft verbindet, wenn er sich durch solche Mauern in ihr verankern kann, die ein albernes Gesetz entlang den öffentlichen Strassen sonst verbietet.

Das Haus selbst ist stark gegliedert, seine relative Kleinteiligkeit und Zierlichkeit steht in angenehmem Gegensatz zum klotzigen Pomp so vieler anderer Häuser ähnlicher Preislage. Es handelte sich um eine sehr individuelle Aufgabe; eine gewisse Romantik war dem Bauherrn erwünscht und dem Architekten offenbar nicht so unerwünscht, dass er sie nicht mit modernen Konstruktionsprinzipien hätte vereinigen können.

Man betritt das Haus von der Bergseite, wo ein breit durchgezogenes Vordach vor Regen schützt; in der Bodenterrasse vor der Fassade liegen die Luxferprismen, die den bergseitigen Vorratskeller beleuchten. Es folgt der sachlich-knapp bemessene, in stumpfem Graublau gehaltene Vorräum, aus dem eine Türe gradaus in die Küche, eine Öffnung links in den drei Stufen tiefer liegenden, mit flacher Stichtonne gewölbten Gang führt, der ebenso wie das ganze Treppenhaus ganz in einem durch Gelb gebrochenen hellen aber derben Fleischton gehalten ist. Links