Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 95/96 (1930)

Heft: 11

Inhaltsverzeichnis

Band 95

Nr. 11

Wärme- und Schwindspannungen in eingespannten Gewölben.

Von Prof. Dr. M. RITTER, Zürich.

Die übliche Berechnungsweise der Wärme- und Schwindspannungen in gelenklosen Gewölben bedarf heute der Revision. Neue statische Erwägungen, aber auch neue Messungen der Materialkonstanten und der Wärmeschwankungen liegen vor; ausserdem sind von verschiedenen Seiten konstruktive Massnahmen bekannt gegeben worden, um den ungünstigen Einfluss des Schwindens bei Beton-Gewölben herabzusetzen. Diesen Fortschritten entsprechend wird nachstehend versucht, die Theorie in erweiterter Fassung darzulegen und ihre Grundlagen erneut zu prüfen.

1. ALLGEMEINE THEORIE.

Wir behandeln zunächst den Fall der vollständigen Einspannung beider Kämpfer, ausgehend von den bekannten Voraussetzungen, die in der Baustatik für schwach gekrümmte, ebene, schlanke Stäbe üblich sind. Durch eine Wärmeänderung oder den Einfluss des Schwindens bei Beton entstehen die Auflagerreaktionen R_1 und R_2, die einander das Gleichgewicht halten. Als statisch bestimmtes Grundsystem sei der einfache Balken gemäss Abb. 1 gewählt; alsdann lassen sich R_1 und R_2 zerlegen in X_1, X_3, A, sowie X_2, X_3, B, wobei A und B die Auflagerdrücke am einfachen Balken sind, wenn X_1, X_2, X_3 daran als äussere Kräfte angreifen. X_1 und X_2 sind Momente, X_3 zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte (Bogenkräfte), die unter den Hebelarmen t_1 und t_2 an den Kämpfern wirken bezw. mit diesen durch starre Scheiben verbunden zu denken sind.

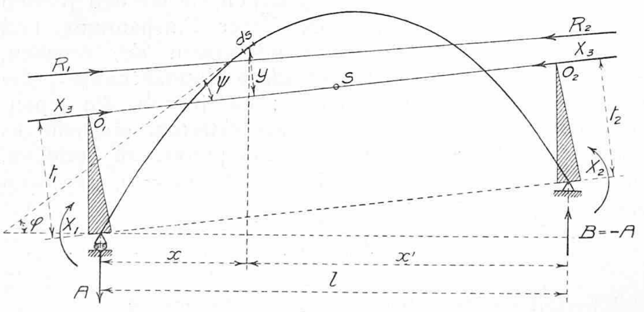

Abb. 1.

Die Grössen X_1, X_2 und X_3 ergeben sich aus den Elastizitätsbedingungen, die besagen, dass bei der Formänderung die Drehung α des linken Kämpfers und die Drehung β des rechten Kämpfers Null sind und sich auch die Spannweite nicht ändert. An Stelle der letzten Bedingung wird zweckmässig die Aenderung δ der Distanz $O_1 O_2$ der Endpunkte der starren Scheiben eingeführt. Aus den Elastizitätsbedingungen folgen die Elastizitätsgleichungen, am übersichtlichsten nach dem Gesetz der Superposition, in der Form

$$\alpha = \alpha_t + X_1 \alpha_1 + X_2 \alpha_2 + X_3 \alpha_3 = 0$$
$$\beta = \beta_t + X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + X_3 \beta_3 = 0$$
$$\delta = \delta_t + X_1 \delta_1 + X_2 \delta_2 + X_3 \delta_3 = 0$$

Die angewandte Bezeichnung erhellt ohne weiteres aus den Gleichungen; es bedeuten

α_t und β_t die Drehungen der Kämpfer infolge der Wärmeänderung oder dem Schwinden des Beton im Grundsystem ($X = 0$),

δ_t die Aenderung der Distanz $O_1 O_2$ im Grundsystem ($X = 0$),

α_1, α_2, α_3 die Drehung des linken Kämpfers infolge $X_1 = 1$, bezw. $X_2 = 1$, $X_3 = 1$, usw.

Wie man leicht einsieht, ist δ_t mit den Drehwinkeln α_t und β_t durch die Beziehung

$$\delta_t = \alpha_t t_1 + \beta_t t_2 + \Delta l_t$$

verknüpft, wobei Δl_t die Aenderung der Spannweite l im Grundsystem, in Richtung der Angriffslinie von X_3 gemessen, darstellt. Nach dem Satze von Maxwell ist $\alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_3 = \delta_1$ und $\beta_3 = \delta_2$.

In bekannter Weise vereinfachen wir die Elastizitätsgleichungen, indem wir über die Hebelarme t_1 und t_2 so verfügen, dass α_3 und β_3 gleich Null sind. Die Gleichungen lauten dann einfacher

$$\alpha_t + X_1 \alpha_1 + X_2 \alpha_2 = 0$$
$$\beta_t + X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 = 0$$
$$\delta_t + X_3 \delta_3 = 0$$

Die Auflösung ergibt

$$X_1 = \frac{\beta_t \alpha_2 - \alpha_t \beta_2}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}, \quad X_2 = \frac{\alpha_t \beta_1 - \beta_t \alpha_1}{\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2}, \quad X_3 = -\frac{\delta_t}{\delta_3} \qquad (1)$$

Zur Ermittlung der Werte α_t, β_t und δ_t muss die Formänderung aller Trägerelemente im Grundsystem infolge der Wärmeänderung oder dem Schwinden des Betons bekannt sein. In allgemeiner Form wird diese Formänderung für ein Bogenelement der Länge ds definiert durch den Formänderungswinkel $d\varphi_t$ (positiv, wenn die obere Kante gegenüber der untern verkürzt wird) und die spezifische Längenänderung ε_t der Bogenaxe (positiv als Verlängerung). Alsdann erhält man mit den Bezeichnungen der Abb. 1 nach bekannten Methoden, z. B. mit Hilfe der Arbeitsgleichung, die Ausdrücke

$$\alpha_t = \int \frac{x'}{l} d\varphi_t + \int \frac{\varepsilon_t \sin\varphi}{l} ds$$
$$\beta_t = \int \frac{x}{l} d\varphi_t - \int \frac{\varepsilon_t \sin\varphi}{l} ds$$
$$\delta_t = \int y \, d\varphi_t + \int \varepsilon_t \cos\psi \, ds$$

worin die Integrale auf den ganzen Bogen auszudehnen sind.

Wir beschränken uns in der Folge auf den symmetrischen Bogen mit wagrechter Kämpferverbindungslinie und nehmen ferner an, dass in symmetrischen Punkten auch die Formänderungen $d\varphi_t$ und ε_t gleich seien. Dann verschwindet in den Formeln für α_t und β_t der zweite Summand, da jedem Wert $\varepsilon_t \sin\varphi$ ein symmetrischer $-\varepsilon_t \sin\varphi$ entspricht und wir erhalten

$$\alpha_t = \beta_t = \int \frac{x}{l} d\varphi_t = \frac{1}{2} \int d\varphi_t$$

Betrachtet man die Formänderungswinkel $d\varphi_t$ als Gewichte, an der Bogenaxe angreifend, und bestimmt man den Abstand v ihres Schwerpunktes von der Angriffslinie von X_3, so folgt weiter

$$\delta_t = v \int d\varphi_t + \int \varepsilon_t \cos\psi \, ds$$

Der Symmetrie wegen wird jetzt $X_1 = X_2$, künftig mit M bezeichnet; X_3 liegt wagrecht und sei daher gleich H gesetzt (Horizontalschub). Die Ausdrücke (1) gehen mit $\alpha_t = \beta_t$, $\alpha_1 = \beta_2$ und $\cos\psi \, ds = dx$ über in

$$M = -\frac{\int d\varphi_t}{2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad H = -\frac{v \int d\varphi_t + \int \varepsilon_t \, dx}{\delta_3} \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Nennerwerte lassen sich nach bekannten Methoden, z. B. mit Hilfe der Arbeitsgleichung darstellen. Wir begnügen uns damit, die Resultate zu vermerken. Bezeichnet E den Elastizitätsmodul und G den Schubmodul des Baustoffes, F den Querschnitt, J das massgebende Trägheitsmoment an der Stelle x, y, F' die reduzierte Querschnittsfläche, so wird für den symmetrischen Bogen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \int \frac{x'^2}{l^2} \frac{ds}{EJ} + \int \frac{x x'}{l^2} \frac{ds}{EJ} = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{EJ} \qquad (3)$$

und

$$-\delta_3 = \int y^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2\varphi \frac{ds}{EF} + \int \sin^2\varphi \frac{ds}{GF'}$$