Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 93/94 (1929)
Heft: 21

Artikel: Ueber die Anstrengungshypothesen
Autor: Burzyski, Wladimir v.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43461

Band 94

Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich.
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 21

Ueber die Anstrengungshypothesen.

Von Dr. Ing. WLADIMIR v. BURZYŃSKI, Assistent der Technischen Hochschule Lwów, Polen.

Die Frage nach der Beanspruchung der Materialien ist so bekannt, dass eine nähere Erklärung des Thema überflüssig scheint. In dieser Arbeit will ich alle vorliegenden Anschauungen über den Gegenstand zusammenstellen und sie einer kurzen Kritik unterziehen. In Betrachtung gezogen habe ich eine statische Lokalanstrengung bei irgendwelchem Beanspruchungszustande. Der Vergleichszustand, der kurz der kritische heissen soll, wird einheitlich durch Spannungsparameter beschrieben, in erster Linie also durch die Angaben der folgenden Zustände: des einaxigen Zuges (I), des einaxigen Druckes (II) und des einfachen Schubs (III), also durch folgende Schemata:

I. $\sigma_1 = k_z$, $\quad \sigma_2 = 0$, $\quad \sigma_3 = 0$
II. $\sigma_1 = 0$, $\quad \sigma_2 = 0$, $\quad \sigma_3 = -k_d$
III. $\sigma_1 = k_s$, $\quad \sigma_2 = 0$, $\quad \sigma_3 = -k_s$

wobei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ist. Offenbar kann man auch kompliziertere Zustände in Betracht ziehen, nämlich:

IV. $\sigma_1 = k_{zz}$, $\quad \sigma_2 = k_{zz}$, $\quad \sigma_3 = 0$
V. $\sigma_1 = 0$, $\quad \sigma_2 = -k_{dd}$, $\quad \sigma_3 = -k_{dd}$
VI. $\sigma_1 = k_{zzz}$, $\quad \sigma_2 = k_{zzz}$, $\quad \sigma_3 = k_{zzz}$
VII. $\sigma_1 = -k_{ddd}$, $\quad \sigma_2 = -k_{ddd}$, $\quad \sigma_3 = -k_{ddd}$

Eine der Hauptaufgaben der Theorien über die Beanspruchung ist nun, das Verhältnis $k_z : k_d : k_s : k_{zz} : k_{dd} : k_{zzz} : k_{ddd}$ übereinstimmend mit den Beobachtungen zu bestimmen. Man kann sich nun bei der Kritik der Theorien meist auf die ersten fünf Parameter beschränken, oft genug auch auf die drei ersten, aber niemals auf die beiden ersten Parameter k_z und k_d, denn das Verhältnis dieser beiden $\varkappa = k_d : k_z$ ist spezifisch und charakteristisch für den jeweils vorliegenden Körper.

Halten wir die letzte Bemerkung fest, so können wir daraufhin keinesfalls aus der Gruppe (A) der Spannungstheorien die Hypothese der konstanten, kritischen Zugspannung:

$$\sigma_1 = k_z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (A1)$$

mit der unannehmbaren Relation $\varkappa = \infty$ zulassen. Ebenso müssen wir aus der Gruppe (B) der Formänderungstheorien die Hypothese der konstanten, kritischen Verlängerung:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = k_z \quad \ldots \quad (B1)$$

wegen des aus ihr herrührenden Zusammenhanges $\varkappa = \frac{1}{\mu}$ als nicht brauchbar abweisen. Es sei schon hier bemerkt, dass die Anpassung an die Beobachtungstatsachen durch die Querkontraktionszahl μ nie einen Wert besitzt. Bei (B1) z. B. lässt die Relation $\varkappa = \frac{1}{\mu}$ nicht zu, den sehr wichtigen Fall $\varkappa = 1$ zu betrachten, denn es ist stets $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$. Von der Gruppe (C) der sogenannten Energietheorien ist auszuschliessen die Hypothese der konstanten, kritischen Raum-Gestaltänderungsenergie:

$$\left.\begin{aligned} 2\,G\,\Phi &= \frac{1}{2(1+\mu)}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_2\sigma_3 + \\ &\quad \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) = k_z^2 \text{ bei } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \geq 0 \\ 2\,G\,\Phi_f &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2) \\ &= k_s^2 \text{ bei } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leq 0, \end{aligned}\right\} \quad (C2)$$

wo G den Gestaltelastizitätsmodul und $\Phi = \Phi_v + \Phi_f$ die Formänderungsenergiedichte in den Teilen Φ_v und Φ_f (bezogene Raumänderungs- und Gestaltänderungsenergie) bedeutet. Die in der Theorie (C2) enthaltene Gleichheit $\varkappa = \sqrt{\frac{3}{2(1+\mu)}}$ begrenzt die allgemeinen Versuche auf einen engen Bereich $1 \leq \varkappa \leq 1{,}225$ und dabei ist der Uebergang zu $\varkappa = 1$ viel mehr theoretisch möglich als in der praktischen Sache.

Der Reihe nach wollen wir jetzt den dritten Parameter k_s heranziehen. In erster Annäherung können wir annehmen, dass im allgemeinen eine Funktion $k_s = f(k_z, k_d)$ existiert; wenn eine Abhängigkeit des k_s anzunehmen ist, so ist die obige die denkbar einfachste.

Den drei ersten Hypothesen muss vor allem die Theorie der konstanten, kritischen Längsspannungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= k_z \\ \sigma_3 &= -k_d \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (A2)$$

und dann die Hypothese der konstanten, kritischen Längsformänderungen folgen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) &= k_z \\ \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) &= -k_d \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (B2)$$

Die aus ihnen herrührenden unsymmetrischen Zusammenhänge $k_s = k_z$ beziehungsweise $k_s = \frac{k_z}{1+\mu}$ lassen den Parameter $k_d (> k_z)$ unbeachtet. In dem Falle $\varkappa = 1$ also $k_z = k_d = k$ wird es bei (A2) wie bei (B2) nicht besser sein. Schon Experimente von sehr einfacher Natur sind weit davon entfernt, im ersten Falle die Gleichheit $k_s = k$ darzutun, und im zweiten sieht der Bereich $1 \geq \frac{k_s}{k} \geq 0{,}667$ wohl nur an seinem untern Ende bei dem theoretischen Werte $\mu = \frac{1}{2}$ der Wirklichkeit ähnlich.

Im weiteren Verlaufe seien zuerst die Theorien mit einer Konstanten k vorgeführt. Da ist die Hypothese der konstanten, kritischen Hauptschubspannung:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k \quad \ldots \ldots \quad (A3)$$

mit Relation $k_s = 0{,}5\,k$. Es schliesst sich an die kombinierte Hypothese der konstanten, kritischen Längsformänderung und Pseudoschubspannung (Becker):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 &= \gamma\,k \\ \sigma_1 - (1-\mu)\,\sigma_2 - \mu\,\sigma_3 &= k \\ -\mu\,\sigma_1 - (1-\mu)\,\sigma_2 + \sigma_3 &= -k, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (B3)$$

wo $\mu = \frac{1}{3}$ und $\gamma = \frac{6}{5}$ zu setzen sind, woraus $k_s = 0{,}6\,k$ folgt. Als weitere ist da die Hypothese der konstanten, kritischen Formänderungsenergie:

$$2\,E\,\Phi = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\,\mu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) = k^2 \quad (C1)$$

(E ist der Längselastizitätsmodul) mit $k_s = \frac{k}{\sqrt{2(1+\mu)}}$ oder $0{,}577 \leq \frac{k_s}{k} \leq 0{,}707$.

Es folgt die Hypothese der konstanten, kritischen Gestaltänderungsenergie:

$$6\,G\,\Phi_f = \sigma_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 = k^2 \quad (C3)$$

mit $k_s = \frac{k}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,k$. Theorie (A3) kann man als den Spezialfall $\varkappa = 1$ der allgemeinern Hypothesen (A4), (A5) und (B4) betrachten; (B3) ist eine Kompilation von (A3) und (B2); (C1) ist als Sonderfall der in die vorläufige, mathematische Form gefassten Hypothese (C4) aufzufassen. Hierher gehören noch die Sonderformen der Theorien (C5) und (C5)*:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\,\nu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2) = k^2 \quad . \quad (C5^0)$$

mit $k_s = \frac{k}{\sqrt{2(1+\nu)}}$ oder wegen $1 \geq \nu \geq 0$: $0{,}5 \leq \frac{k_s}{k} \leq 0{,}707$

und:

$$\sigma_1^2 + 2(1-\lambda)\,\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2(1-\lambda)\,\sigma_2\sigma_3 - 2\,\lambda\,\sigma_3\sigma_1 - 2(1-\lambda)\,\sigma_1\sigma_2 = k^2 \quad (C5^0)^*$$

mit $k_s = \frac{k}{\sqrt{2(1+\lambda)}}$ oder wegen $1 \geq \lambda \geq 0$: $0{,}5 \leq \frac{k_s}{k} \leq 0{,}707$.

Nur scheinbar (wegen $\varkappa = 1$) beeinflussen die „Plastizitäts"- und „Anisotropie"-Koeffizienten ν und λ in gleicher Weise den k_s-Wert.

Dass die k_s-Bereiche bei den erwähnten Theorien so verschiedenartig ausfallen, hat seinen Grund darin, dass man sich an den praktischen Beobachtungstatsachen hielt. Eine strenge Feststellung eines konstanten Verhältnisses $k_s : k$ für alle Materialien scheint unmöglich. Dennoch ist neben der Uebereinstimmung mit den Versuchen auch auf die mathematische Zweckmässigkeit und praktische Brauchbarkeit zu achten.

In diesem Sinne vergleichen wir zuerst (A3), (B3), (C3) und (C5⁰)*, die einander sehr verwandt sind. Gegen Theorie (B3) spricht ihr mathematischer Bau; falls wir sie mit (C3) zusammenstellen, so ist sie ohne weiteres hinfällig. Bei (A3) ist einzuwenden, dass bei ihr die Mittelspannung σ_2 fehlt; dieses Fehlen macht sich deutlich bei den Versuchen bemerkbar; der Wert $\frac{k_s}{k} = 0{,}5$ bildet die untere Grenze aller bisher festgestellten Werte. Die Hypothese (A3) muss man also nur als einen Näherungsansatz betrachten. Keinen dieser Vorwürfe kann man der mathematisch schönen und übersichtlichen Theorie (C3) machen, und besonders da nicht, wo es sich um plastische, isotrope oder quasi-isotrope Körper (von Stahlart) handelt. Im allgemeinen steht das Verhältnis $\frac{k_s}{k} = 0{,}577$ in der Mitte der Fälle, die in der Materialgruppe $\varkappa = 1$ möglich sind. Die Hypothese (C3) ist also (A3) vorzuziehen. Im Vergleich zu (C3) gewinnt die Theorie (C5⁰)* hinsichtlich der Genauigkeit, denn sie berücksichtigt sehr gut jede Abweichung von der idealen Isotropie.[1] Bei $\lambda = 1$ geht sie in (A3) über; bei $\lambda = \frac{1}{2}$ in (C3).

Zu besprechen sind nun noch (C1) und (C5⁰). Theorie (C1) scheidet aus, da (C5⁰) grössere Allgemeinheit besitzt. Bei (C5⁰) liegt $\frac{k_s}{k} = 0{,}577$ auch in der Mitte aller Möglichkeiten, während man bei (C1) diesen Wert nur bei theoretischem $\mu = \frac{1}{2}$ erhalten kann; der Einfluss der Poissonschen Konstanten ist ein Fehler der Beltramischen Theorie. Fassen wir die bisherigen Betrachtungen zusammen, so können wir sagen, dass in der Gruppe $\varkappa = \frac{k_d}{k_z} = 1$ nur Theorien (C5⁰)*, (C5⁰), (C3) und angenähert (A3) verbleiben.

Die Tatsachen, mit denen wir bisher umgingen, lagen im Bereiche der drei ersten kritischen Spannungszustände I, II, III. Damit kann man sich offenbar nicht begnügen, wenn man sich mit den allgemeinen Hypothesen $\varkappa \neq 1$ beschäftigt.

Die Hypothese der konstanten[2]), kritischen, innern Reibung führt zu der Gleichung:

$$k_d\,\sigma_1 - k_z\,\sigma_3 = k_z\,k_d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A4)$$

mit Verknüpfung $k_s = \frac{k_z\,k_d}{k_z + k_d}$. Ferner ist da die Hypothese der veränderlichen, kritischen Schubspannung. Die Angaben und Zeichnungen von Mohr, die die Umhüllungskurve der kritischen Hauptkreise (σ_1, σ_3) betreffen, finden eine sehr getreue Darstellung in der Gleichung:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (k_d - k_z)(\sigma_1 + \sigma_3) = k_z\,k_d \quad . \quad . \quad (A5)$$

mit $k_s = \frac{\sqrt{k_z\,k_d}}{2}$, statt der von Mohr im Bereiche der drei ersten Zustände angewendeten Gleichung (A4). Hierher gehört auch die Hypothese der veränderlichen, kritischen Querverzerrung (Sandel):

$$k_d\,\sigma_1 + \frac{k_d - k_z}{2}\sigma_2 - k_z\,\sigma_3 = k_z\,k_d \quad . \quad . \quad (B4)$$

$$\text{mit } k_s = \frac{k_z\,k_d}{k_z + k_d}.$$

Wegen der identischen Relationen für k_s betrachten wir zunächst (A4) und (B4). Der Unterschied der beiden liegt in dem Ausdruck mit σ_2; berücksichtigt man dieses, so sieht man mit Erstaunen, dass (B4) ganz unkorrekt ist. Als Beweis möge folgendes dienen: es folgen nämlich aus der Sandelschen Hypothese bei $\varkappa > 3$ drei solche Zustände als kritisch und gleichbedeutend:

$$\begin{array}{llll} \text{VII.} & \sigma_1 = -\infty, & \sigma_2 = -\infty, & \sigma_3 = -\infty \\ \text{V.} & \sigma_1 = 0, & \sigma_2 = -\infty, & \sigma_3 = -\infty \ (!) \\ \text{V+I.} & \sigma_1 = +\infty, & \sigma_2 = -\infty, & \sigma_3 = -\infty \ (!!) \end{array}$$

Von der besprochenen Gruppe bleiben also nur (A4) und (A5) übrig. Bei $\sigma_2 = 0$ unterscheiden sich beide nur im Intervalle: $k_z > \sigma_1 > 0$, $0 > \sigma_3 > -k_d$. In diesem Bereiche sind sie zu untersuchen. Wegen der stets bestehenden Ungleichung $\frac{\sqrt{k_z\,k_d}}{2} > \frac{k_z\,k_d}{k_z + k_d}$ bei beliebigem $\varkappa > 1$ muss man (A5) den Vorzug vor (A4) geben, wenn man sich an die praktischen Beobachtungen hält. Wegen des Fehlens von σ_2 sind beide nur als Näherungsansätze zu betrachten.

Erwähnen möchte ich hier, dass Mohr selbst nicht die Form (A5) gegeben hat; (A4) wie (A5) kann man als Sonderfälle einer allgemeinen Duguet-Mohrschen Theorie auffassen. Jedenfalls wird sich in keiner neuen Form σ_2 als Ausdruck finden lassen; das ist eben die allgemeine Schwäche der Theorie. Dabei ist zu bemerken, dass die mit einer Mohrschen Angaben und Zeichnungen entsprechenden Gleichung verknüpfte Enveloppe nicht alle möglichen kritischen Kreise umhüllt. Nach seinen eigenen Begriffen ist Mohr mit seiner Theorie nicht recht in Ordnung.

Wir kommen nun zu den letzten Energietheorien; es sind das die Hypothesen von Schleicher (C4) und vom Verfasser (C5) und (C5)*. Die Aehnlichkeit und grosse Allgemeinheit der beiden verlangt eine längere Diskussion.

Nach der Hypothese der veränderlichen, kritischen Formänderungsenergie (C4) (ZAMM 1926) ist das Mass für die Höhe der Beanspruchung die gesamte, in der Raumeinheit aufgespeicherte Formänderungsenergie Φ. Die Vergleichsspannung $\sigma_{vf} = \sqrt{2\,E\,\Phi}$ ist erfahrungsgemäss eine Funktion der mittleren Normalspannung $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$, die für jeden einzelnen Stoff durch Versuche zu bestimmen ist. Die Funktion $\sigma_{vf} = f(p)$ kann man in ziemlich grossem Intervalle mit ausreichender Näherung durch die Parabel:

$$\sigma_{vf}^2 = s^2 - 3\,m\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C4_1)$$

oder durch eine Gerade:

$$\sigma_{vf} = t - 3\,n\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C4_2)$$

ersetzen. Wenn $\sigma_{vf} = f(p)$ im ganzen Bereiche VI bis VII in (C4₂) gesetzt ist, so muss immer $n = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} < \sqrt{\frac{1 - 2\mu}{3}}$, also $1 < \varkappa < 3{,}732$ sein. Es ist jedoch immer möglich $f(p)$ in einem kleinen Intervalle durch eine Gerade zu ersetzen, ohne Beachtung der obigen Ungleichung.

Im allgemeinen entsteht im Axenkreuz (p, σ_{vf}) als für spröde Stoffe typisch eine parabelartige Kurve, die zum Nullpunkt und zur p-Richtung konkav ist. Für dehnbare Metalle wurde als typisch eine hyperbelartige Kurve mit Konvexität zur p-Axe vorausgesetzt. Zur Darstellung der Kurven muss man also im allgemeinen Falle $\varkappa > 1$ mindestens drei Konstanten haben.

Die Gleichungen (C4₁) und (C4₂) für spröde Körper kann man in einer Form, die allen Hypothesen zu Grunde gelegt war, schreiben:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\,\mu\,(\sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1 + \sigma_1\,\sigma_2) + (k_d - k_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_d\,k_z \quad . \quad . \quad . \quad (C4')$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\,\mu''\,(\sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1 + \sigma_1\,\sigma_2) + (k_d - k_z)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_d\,k_z \quad . \quad . \quad . \quad (C4''),$$

wo $\mu'' = \frac{\mu + n^2}{1 - n^2}$ bedeutet. Die Gleichungen führen auf: $k_s = \sqrt{\frac{k_d\,k_z}{2(1+\mu)}}$ beziehungsweise auf $k_s = \frac{k_d\,k_z}{k_d + k_z}\sqrt{\frac{2}{1+\mu}}$. Bei $\varkappa = 1$ d. h. $k_d = k_z$ bekommen wir aus (C4') und (C4'') die Theorie (C1).

[1]) Z. B. für die Versuche von Lode mit Kupfer, Eisen und Nickel ist $\lambda = 0{,}6$ anzunehmen.

[2]) Duguet hat deutlich auf die Veränderlichkeit des Reibungskoeffizienten hingewiesen; er verwertete aber die Abhängigkeit vom Spannungszustande nicht.

Wegen der Einzelheiten betreffs der Theorie (C5) und (C5)* verweise ich auf die Originalarbeit „Studien über die Anstrengungshypothesen" (im Verlag der Akademie der technischen Wissenschaften, Lwów 1928). Als Ausgangspunkt diente mir folgende Anschauung: Das Mass für die lokale Beanspruchung eines isotropen Körpers in elastischen und plastischen Bereichen bildet die Summe der Dichtigkeiten der Pseudogestaltänderungsenergie und eines gewissen Teiles der Pseudo-Raumänderungsenergie, der vom Spannungszustande und den besonderen Eigenschaften des Stoffes abhängt. Mit dem Wort „lokal" will ich zum Ausdruck bringen, dass es sich im Falle eines ungleichmässigen Spannungszustandes um die Anstrengung eines Punktes handelt, aber nicht um ihre Abhängigkeit von der integralen Beanspruchung des Körpers. Das Wort „Pseudo" besagt, dass die homogenen Funktionen $\Phi_f = \frac{\sigma_f^2}{6\,G}$ und $\Phi_v = \Phi - \Phi_f$ für manche Materialien oder an gewissen Grenzen keine bezogenen Energieausdrücke bestimmen. Von der allgemeinen Definition: $\Phi_f + \eta\, \Phi_v = K$ kommt man leicht zu der allgemeinen Gleichung $\sigma_f = f(p)$ und zur speziellen praktisch angenäherten:

$$\frac{2}{3}\,(1+\nu)\,\sigma_f^2 + 3\,(1-2\,\nu)\,p^2 + 3\,(k_d - k_z)\,p - k_d\,k_z = 0$$

mit dem Sonderfall (wenn gültig, dann nur bei $\varkappa \leqq 3$):

$$\sigma_f + 3\,n\,p - k_s\sqrt{3} = 0$$

Der Plastizitätskoeffizient $\nu = \frac{k_d\,h_z}{2\,k_s^2} - 1$ ist durch die den Versuchen sich gut anpassende Ungleichung $1 \geqq \nu \geqq 0$ begrenzt. Die Ausgangsgleichung führt zu der Form:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\,\nu\,(\sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_3\,\sigma_1 + \sigma_1\,\sigma_2) + (k_d - k_z)\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = k_d\,k_z \qquad (C5)$$

aus der wir den Sonderfall bekommen, indem wir: $\nu = \frac{3}{8}\left(\varkappa - \frac{2}{3} + \frac{1}{\varkappa}\right)$ einsetzen. Es folgt hier: $k_s = \sqrt{\frac{k_d\,k_z}{2(1+\nu)}}$ beziehungsweise $k_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{k_d\,k_z}{k_d + k_z}$. Die Theorie gehört zu der Gruppe mit drei Konstanten. Sie lässt sich also den Beobachtungen gut anpassen.[1]

Es kann nun sein, dass manche Einflüsse in der Form (C5) nicht berücksichtigt werden. Dazu gehört eine Art von Anisotropie und Unhomogenität, die ihren Grund in der Stoffherstellung selbst hat und kaum rechnerisch zu erfassen ist. Hier kann man die obige Ausgangsgleichung abändern. Berücksichtigt man nämlich die angenäherten Relationen:

$$c_{1i} + c_{2i} + c_{3i} = \text{konstant} \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$
$$c_{1j} + c_{2j} + c_{3j} = 0 \qquad j = 4,\ 5,\ 6$$

(die doch besser als die von Cauchy sind), so kann man die Zerlegung der allgemeinen Pseudoenergie Φ der anisotropen Körper (mit den 21 Elastizitätskonstanten c_{kl}, $k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) in die Teile Φ_v und Φ_f vornehmen und insbesondere statt des bisherigen σ_f eine andere, reduzierte Spannung bekommen: $\sigma_f^{*2} = (1-\lambda)\,(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \lambda\,(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (1-\lambda)\,(\sigma_1 - \sigma_2)^2$. Der Anisotropiekoeffizient $\lambda\ (0 \leqq \lambda \leqq 1)$ ist aus den c_{kl} gebildet. Die allgemeine Grundgleichung der kritischen, lokalen Beanspruchung geht in $\sigma_f^* = f(p^*)$ über, wenn man obendrein noch statt p besser $p^* = \frac{\lambda\,\sigma_1 + (1+\lambda)\,\sigma_2 + \lambda\,\sigma_3}{1+\lambda}$ einführt; die Hypothese ist dann aber keine energetische mehr. Man kann nun die neue Form entwickeln und erhält so die allgemeine Form (C5)*, die für $\lambda = \frac{1}{2}$ in frühere (C5) zurückgeht[2]. Im speziellen Falle $\varkappa = 1$ erhalten wir für plastische Stoffe $\sigma_f^* = k$, also die besprochene Form (C5⁰)*.

Wir wollen nun zur Kritik der letzten Theorien übergehen. Die allgemeine Idee der (C4)-Hypothese ist sehr gut, leider ist ihr Bau nicht richtig. Schuld daran trägt die Zahl μ, mit deren Hilfe alle kritischen Spannungsparameter angepasst werden. Wenn wir diese nach Schleicher als die Querdehnungszahl — was aus rein mathematischen Gründen unnötig ist — betrachten, so wissen wir bekanntlich sehr oft nicht, welchen numerischen Wert wir ihr beilegen sollen, also im gegebenen Falle $\frac{1}{6}$ oder auch $\frac{1}{3}$.

Die Hypothese (C4) gibt also niemals im System $(p,\ \sigma_{vf})$ ein typisches Bild für spröde oder plastische Stoffe, wie es Schleicher behauptet. — Das wird an einem kleinen Beispiel klar. Für die Versuche, die v. Kármán und Böker mit Marmor angestellt hatten, nimmt Schleicher eine Parabel ($C4_1$) in Verbindung mit einer Geraden ($C4_2$) nämlich:

$$\sigma_{vf} = t - 3\,n\,p = 1000 - 1{,}15\,p$$

an.[1] Er setzt dabei $\mu = \frac{1}{4}$ voraus, was keineswegs beobachtet war. Nehmen wir nun $\mu' \neq \mu$ an, so geht die Gleichung über in:

$$(1+\mu)\,\sigma_{vf}^2 - 9\,[\mu + n^2 - \mu'\,(1-n^2)]\,p^2 + 6\,n\,t\,(1+\mu')\,p - (1+\mu')\,t^2 = 0,$$

was in Abhängigkeit von der Ungleichung $\mu \gtreqless \mu' \gtreqless \frac{\mu + n^2}{1 - n^2}$ jede Kurve zweiten Grades darstellen kann. Im speziellen erhalten wir eine Hyperbel, die zur p-Axe konvex(!) ist, wenn $\mu' < \mu$ ist. Ist es nun zulässig, dass wir bei Ersetzen von $\mu = \frac{1}{4}$ durch z. B. $\mu' = \frac{1}{4 \cdot 1}$ für den spröden Marmor eine Kurve erhalten, die für dehnbare Metalle vorausgesetzt war? Vielleicht war es bei $\mu = \frac{1}{4}$ gar keine Gerade? Ist also die aus $p = -4500$ kg/cm² zu $k_{ddd} = 13\,400$ kg/cm² extrapolierte Zahl nicht mit einem Fehler von 20 oder mehr % behaftet?

Aehnlich liegt die Sache auch bei den plastischen Stoffen. In (C4) gibt es noch keine mathematische Gleichung für diese. Setzen wir den Fall $\varkappa = 1$ voraus, so müssen wir, um zu der schönen und den Versuchen ziemlich angepassten Theorie (C3) zu gelangen, neben $\sigma_{vf} = k$ auch $\mu = \frac{1}{2}$ setzen, was der Wirklichkeit widerspricht. Sehen wir von der Rechnung mit μ ab, so müssen wir neben $k = k_z = k_d$ andere Parameter einführen, was bei (C3) nicht nötig ist. Es ist also so, dass es der Hypothese fast unmöglich ist, unmittelbar den Einfluss der Gestaltänderungsenergie Φ_f darzutun. Schuld daran ist jedenfalls auch die Poissonsche Konstante.

Die angeführten Argumente müssten Schleicher selbst einfallen, wenn er sich seine Theorie genau betrachtete. Das sehen wir an seiner späteren Arbeit (Bauingenieur 1928). Im fünften Abschnitt dieser Arbeit handelt es sich in erster Linie um die Versuche, die Mörsch und der Deutsche Ausschuss für Eisenbeton mit Beton angestellt haben. Wenn wir die Formel: $k_s = \sqrt{\frac{k_d\,k_z}{2\,(1+\mu)}}$, die eben für spröde Stoffe aus (C4') genommen ist, gelten lassen, so müssen wir nach den Versuchsergebnissen $\mu = 2{,}77$ bezw. 5,44(!) setzen. Das geht doch aber für die Poissonsche Konstante $\left(0 \leqq \mu \leqq \frac{1}{2}\right)$ nicht. Wenn wir dagegen aus (C4'') die Formel $k_s = \frac{k_d\,k_z}{k_d + k_z}\sqrt{\frac{2}{1+\mu}}$ annehmen, so ist $\mu = 0{,}164$ oder $0{,}987$ einzusetzen. Der zweite Wert ist für die Querdehnungszahl ebenfalls kein möglicher. Unter Umständen taugt diese bessere Formel auch nichts; in beiden Fällen war $\varkappa = \cong 11$. Das fällt aber ausserhalb des Bereiches $1 < \varkappa < 3{,}732$.

---

[1] Neuerdings habe ich der Theorie (C5) eine allgemeinere Fassung gegeben, indem ich in der Diskussion am 26. Diskussionstag des Schweizerischen Verbandes für die Materialprüfung der Technik (1. Juni 1929) dargetan habe, dass die Anstrengung als ein Skalar eine Funktion von drei Invarianten des Spannungszustandes ω_1, ω_2, ω_3 sein muss; die allgemeinste Theorie für isotrope Medien müsste also lauten: $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = K$. Es scheint bemerkenswert zu sein, dass die erste Invariante proportional dem p, die zweite dem σ ist.

[2] Für die Versuche von v. Kármán und Böker mit Carrara-Marmor ist $\lambda = \backsim 0{,}73$ anzunehmen; für die Versuche von Roš und Eichinger ist $\lambda = \backsim 0{,}87$ für Marmor I und $\lambda = \backsim 0{,}75$ für Marmor II anzunehmen.

[1] Man erhält so eine 4-Konstanten Theorie; wegen: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 4\,\frac{m}{n}\,t + 4\,s^2 < 0$ tangiert die Gerade die Parabel nicht, ja, sie schneiden sich nicht einmal. Die Begrenzung des elastischen Bereiches ist dabei nicht exakt.

Die Theorie (C4) ergab sich als unrichtig. Schleicher selbst musste sie fallen lassen, und das tat er auch wirklich, indem er durch nicht einwandfreie Annahme der aus der Elastizitätslehre stammenden Beziehung:

$$3\,\sigma_{vf}^2 - 2\,(1+\mu)\,\sigma_f^2 = 9\,(1-2\,\mu)\,p^2$$

von seiner bisherigen Hypothese zur bereits früher von mir gestellten Theorie (C5) überging und sie ohne weiteres als eine andere Form von (C4) betrachtete. So ist es aber nicht. Kann man denn behaupten, dass die obige Beziehung zwischen den pseudo-energetischen Ausdrücken besteht? Sind wirklich die quadratischen Ausdrücke Φ und Φ_f im allgemeinen die Energiewerte? Die Theorien (C4) und (C5) sind keineswegs gleichwertig.

Zum Beispiel wollen wir die dehnbaren Metalle $\varkappa = 1$ betrachten, die in der erwähnten Publikation im vierten Abschnitt zur Behandlung kommen. Die schöne (C3)-Theorie: $\sigma_f = k$ — ein Spezialfall der (C5)-Hypothese — ist vollständig im (p, σ_f)-System durch einen Parameter bestimmt. Einer solchen Tatsache entspricht im (p, σ_{vf})-System die Gleichung: $\sigma_{vf}^2 - 9\,(1-\alpha_0)\,p^2 = \alpha_0\,k^2$ mit zwei Parametern k und α_0; der letzte bleibt unbestimmt, solange nicht dazu angenommen wird, dass die obige Gleichung alle mathematischen Eigenschaften der (C3)-Theorie besitzen muss. Nun ist aber $\alpha_0 = \frac{2}{3}(1+\mu)$ anzunehmen und wir erhalten:

$$\sigma_{vf}^2 - 3\,(1-2\,\mu)\,p^2 = \frac{2}{3}(1+\mu)\,k^2.$$

Alle praktischen Ergebnisse hieraus hängen nicht von μ ab. Wir können also jede beliebige Zahl, z. B. $\mu = 2/3$ nehmen und erhalten einen Kreis, und nicht die hyperbelartige Kurve, die als typisch angenommen wurde; eine solche kann man in (p, σ_{vf}) niemals voraussetzen.

So ist es auch mit spröden Materialien des fünften Abschnittes. Hier nimmt Schleicher an, dass im Bereiche $-k_d \leq 3p \leq k_z$ die betreffende Kurve in (p, σ_f) zu einer, bereits erwähnten (Sonderfall der (C5)-Grundgleichung), Geraden: $\sigma_f(k_d + k_z) + 3\,(k_d - k_z)\,p = 2\,k_d\,k_z$ werden kann. Zwei gegebenen Versuchstatsachen k_z und k_d, die in der obigen Gleichung stecken, entspricht im System (p, σ_{vf}) eine Kurve: $\sigma_{vf}^2 - 9\,(1-\alpha)\,p^2 + 3\,\alpha\,(k_d - k_z)\,p = \alpha\,k_d\,k_z$ mit $k_s = \sqrt{\frac{\alpha\,k_z\,k_d}{2\,(1+\mu)}}$. Wollte man nun, wie aus der linearen Gleichung (p, σ_f), $k_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{k_d\,k_z}{k_d + k_z}$ haben, so müsste man: $\alpha = \frac{8}{3}(1+\mu)\frac{k_d\,k_z}{(k_d+k_z)^2}$ annehmen. Das aber bedarf dann einer weitern Begründung. Und doch wird bei allen $\mu < \frac{1}{2}$ diese Gleichung eine Hyperbel darstellen, und zwar eine solche, wie sie für plastische Stoffe als typisch vorausgesetzt war. In diesem Falle leistet die (C4)-Theorie nichts.

Im Laufe der Kritik der (C4)-Hypothese hat sich erwiesen, dass die (C5)-Theorie stets die bessere ist. Vom Einfluss der μ-Zahl ist sie ganz frei. Der Uebergang zu (C3) ist nun sehr leicht möglich. Die allgemeine Beziehung $k_s = \sqrt{\frac{k_z\,k_d}{2\,(1+\nu)}}$ kann man in dem wahrscheinlichen Bereich $1 \geq \nu \geq 0$ sehr gut allen Stoffen anpassen. Die spezielle Relation $k_s = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{k_d\,k_z}{k_d + k_z}$ stimmt, wie Schleicher zeigt, sehr gut mit den Versuchen, die Roš und Eichinger mit Messing, Elektron, verschiedenen Bronzen und Aluminium angestellt haben, überein. Die Korrektion (C5)* hat sich bisher als das beste Mittel erwiesen, wie es schon in einer Beibemerkung über drei verschiedene Marmorarten gezeigt wurde.

Wir wollen jetzt eine *Schlussbetrachtung* machen. Aus der Theorie des Spannungszustandes wollen wir uns erinnern, dass einer Richtung (φ, χ, ψ) im Orthogonalsystem $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Normalspannung: $\sigma = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \cos^2\chi + \sigma_3 \cos^2\psi$ und eine Schubspannung: $\tau^2 = (\sigma_2-\sigma_3)^2 \cos^2\chi \cos^2\psi + (\sigma_3-\sigma_1)^2 \cos^2\psi \cos^2\varphi + (\sigma_1-\sigma_2) \cos^2\varphi \cos^2\chi$ angehören. Im speziellen Falle: $\varphi = \frac{\pi}{4} = \psi$, $\chi = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir: $\sigma = \sigma_{II} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$, $\tau = \tau_{II} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$; bei $\varphi = \chi = \psi$ ist

$$\sigma = p = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3},\quad \tau = q = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+(\sigma_1-\sigma_2)^2};$$

wenn wir schliesslich

$$\varphi = \arccos\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}} = \psi \text{ und}$$

$$\chi = \arccos\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$$

annehmen, so erhalten wir:

$$\sigma = p^* = \frac{\lambda\,\sigma_1 + (1-\lambda)\,\sigma_2 + \lambda\,\sigma_3}{1+\lambda},$$

$$\tau = q^* = \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\sqrt{(1-\lambda)(\sigma_2-\sigma_3)^2 + \lambda\,(\sigma_3-\sigma_1)^2 + (1-\lambda)\,(\sigma_1-\sigma_2)^2}.$$

Wir wollen die letzten Resultate mit denjenigen Anstrengungshypothesen in Verbindung setzen, die sich bisher den Beobachtungstatsachen gegenüber als relativ gut passend erwiesen haben. Hypothese (A3) nimmt an, dass in kritischen Zuständen die im Werte konstante Querspannung $\tau_{II} = k_s$, oder in anderer Darstellung, dass der summarische Umfang der drei Spannungskreise unabhängig von ihrer Lage in (σ, τ) über die Beanspruchung entscheidet. Die lineare Gleichung von Duguet-Mohr $\tau_{II} = k_s - n\,\sigma_{II}$ ist schon etwas allgemeiner. Sie sagt aus, dass die kritische Schubspannung τ_{II} linear von der ihr entsprechenden Normalspannung σ_{II} abhängt. Einen grösseren Fortschritt zeigt (A5) in der Form $\tau_{II}^2 = k_s^2 - \frac{m}{2}\sigma_{II}$, oder allgemein gefasst $\tau_{II} = f(\sigma_{II})$. Sie stellt fest, dass in Grenzzuständen der Umfang der drei Spannungskreise mit ihrer Lage in Abhängigkeit von Stoffeigenschaften variiert. Die (B4)-Hypothese hat augenscheinlich nicht recht, wenn sie die Spannungen τ_{II} und p zusammenbringt, zwischen denen kein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Erst die (C3)-Theorie berücksichtigt gut den Einfluss der mittleren Hauptspannung. Sie stellt die Konstanz der Schubspannung q in der Form $q = k_s\sqrt{\frac{2}{3}}$ fest, was eine Feststellung der summarischen Fläche der drei Grenzspannungskreise bedeutet. Die (C4)-Hypothese in der Form $\sigma_{vf} = f(p)$ kann man hier nicht unterbringen. Die (C5)-Theorie wird mit der Gleichung $q = f(p)$ eine Verallgemeinerung; sie beschäftigt sich mit Spannungen einer Richtung $\varphi = \chi = \psi$, die gleichgültig für jede Hauptrichtung ist, was für isotrope Medien plausibel zu sein scheint. Sie lässt nämlich die Querspannung q von der dieser Richtung entsprechenden Längsspannung p abhängig sein und gewinnt dadurch eine dritte allgemeine Gründung. Die Flächen der drei Spannungskreise verändern sich mit ihrer Lage. Schliesslich stellt die etwas verwickelte (C5)*-Korrektion $q^* = f(p^*)$ einen Zusammenhang zwischen den Spannungen der Richtung $\varphi = \psi \neq \chi$ $\left(0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}\right)$ her. Alle übrigen Theorien passen nicht in den obigen Zusammenhang der Diskussion.

Es hat sich also gezeigt, dass das Studium der Materialbeanspruchung in Entwicklung aus Spannungstheorien über Verzerrungs- und Energiehypothesen wieder auf das Reinspannungsgebiet zurückgekommen ist. Die Frage der Bruchflächen wird wieder modern.[1]) Den Begriff „Energie" kann man fallen lassen — und mit Vorteil. Der Vermerk über die „Grössenordnungsabschätzung" im „Bauingenieur" (1928) wegen der Nichtgültigkeit des Hookeschen Gesetzes wird hinfällig; im allgemeinen haben wir keinen Zusammenhang zwischen den Ausdrücken $\sigma_{vf} = \sqrt{2\,E\,\Phi}$ und $\sigma_f = \sqrt{6\,G\,\Phi_f}$.

Wenn in Zukunft das Bedürfnis nach einer neuen Theorie entstehen sollte, so geht die weitere Entwicklung auf einem anderen Wege als auf dem bisherigen, bereits abgeschlossenen.

Göttingen-Zürich, im Juni 1929.

[1]) Ein Ansatz über ihre Lage ist von mir am erwähnten Diskussionstag auch mitgeteilt worden.