

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	91/92 (1928)
<b>Heft:</b>	24
<b>Artikel:</b>	Die graphische Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung nach dem ebenen Massenschwerpunkt- und Seilpolygon-Verfahren
<b>Autor:</b>	Pasternak, Peter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-42516">https://doi.org/10.5169/seals-42516</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Die graphische Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung nach dem ebenen Massenschwerpunkt und Seilpolygon-Verfahren. — Zum Bruch der St. Francis-Staumauer in Kalifornien. — Wettbewerb für eine Strassenunterführung in Küsnacht-Zürich. — Ausstellung „Das neue Heim“ im Kunstgewerbemuseum Zürich. — Mitteilungen: Versuchsvorortzüge der Schweizerischen Bundesbahnen. Musterwohnungen der Ausstellung „Heim und Technik“

München 1928. Die neuen Giesserei der Citroën-Werke. Technik und Seele. Schweizernummer des „Baumeister“. Eidgen. Technische Hochschule. Internationaler Törf-Kongress 1928. Die Studiengesellschaft für Automobilbau. Stahlskelettbau. — Nekrolog: Henri Verrey. Nicolaus Cagianut. — Wettbewerbe: Städtisches Altersheim in Zürich. — Literatur. S. T. S.

Band 91. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 24

## Die graphische Berechnung der kontinuierlichen Träger mit frei und elastisch drehbarer Stützung nach dem ebenen Massenschwerpunkt- und Seilpolygon-Verfahren.

Von Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Zürich, Privatdozent an der Eidgen. Techn. Hochschule.

Die von O. Mohr, W. Ritter u. a. entwickelten graphostatischen Verfahren zur Berechnung durchlaufender Träger haben in der Ingenieurpraxis eine viel weitere Verbreitung gefunden, als die gedanklich und in der Auswertung meistens viel einfacheren massengeometrischen Methoden, die von Claxton Fidler angebahnt und von Müller Breslau, namentlich aber A. Ostenfeld fortgesetzt wurden. Dies liegt wohl daran, dass O. Mohr dem Seilpolygonverfahren im eleganten Analogiesatz über die elastische Linie eine allgemeine, einheitliche und auch anschauliche, an die beliebten graphostatischen Methoden Culmanns sich anlehrende Grundlage gegeben hat, während die genannten massengeometrischen Verfahren, die als solche nicht erkannt wurden, sich auf kein einheitliches graphisches Übertragungsprinzip stützen und deswegen wohl auch weniger beachtet geblieben sind.

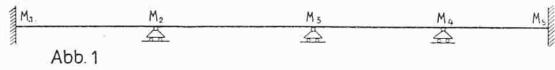


Abb. 1

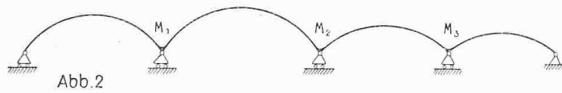


Abb. 2

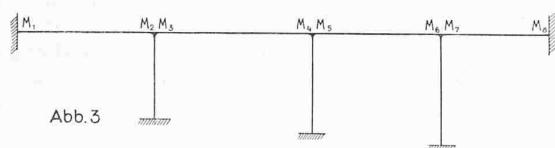


Abb. 3



Abb. 4

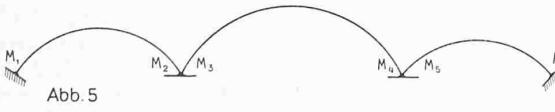


Abb. 5

nochmals auf die ebenen Methoden zur graphischen Berechnung kontinuierlicher Träger zurückkommen, obschon sie durch das einheitlichere und deswegen auch einfachere räumliche Verfahren als überholt erscheinen.

### I. DIE REDUKTION DER DREIGLIEDRIGEN MOMENTEN- GLEICHUNGEN DER KONTINUIERLICHEN TRÄGER MIT FREI UND ELASTISCH DREHBARER LAGERUNG AUF ZWEIGLIEDRIGE REKURSIONSGLEICHUNGEN.

Geht man vom Grundsysteem der einfachen Balken bzw. Zweigelenkbogen aus, so erhält man in allen durch die Abbildungen 1 bis 5 dargestellten Fällen durchlaufender Träger Dreimomentengleichungen, die sich in charakteristischer Weise durch die Vorzeichenfolgen in ihren symmetrischen Matrizen unterscheiden:

Bei frei drehbarer und horizontal verschieblicher Stützung sind alle Matrixvorzahlen positiv (Abbildungen 1 und 2) und bei elastisch drehbarer Lagerung wechseln die außerhalb der rechtsfallenden Diagonale aufeinanderfolgenden Vorzahlen ihre Vorzeichen (Abb. 3).

Beim kontinuierlichen Bogen mit unverschieblicher, aber frei oder elastisch drehbarer Lagerung (Abbildungen 4 und 5) haben die Vorzahlen außerhalb der Matrix-Hauptdiagonale immer das negative Vorzeichen.<sup>2)</sup>

Wird die Berechnung rein analytisch durchgeführt, so bleibt sie durch die genannten Vorzeichenfolgen unberührt: In allen drei genannten Fällen reduziert man die sich ergebenden dreigliedrigen Momentengleichungen mit dem Matrixschema (2,3, 3,3 ... 2) auf zweigliedrige Rekursionsgleichungen mit dem Vorzahlenschema (2,2,2 ... 2,1).

Bezeichnet man in abgekürzter symbolischer Schreibweise die  $k$ -te dreigliedrige Grundgleichung mit

$G_k = a_{(k-1)k} M_{(k-1)} + a_{kk} M_k + a_{k(k+1)} M_{(k+1)} + a_{k0} = 0$  die unmittelbar vorangehende zweigliedrige Gleichung mit

$L_{(k-1)} = a'_{(k-1)(k-1)} M_{(k-1)} + a_{(k-1)k} M_k + a'_{(k-1)0} = 0$  und die  $G_k = 0$  nächst nachfolgende mit

$$L_k = a'_{kk} M_k + a_{k(k+1)} M_{k+1} + a'_{k0} = 0$$

so ist die Reduktionsregel zur Ueberführung des dreigliedrigen Systems in das zweigliedrige durch folgende einfache Rekursionsgleichung klar gelegt

$$L_k = G_k + \mu_{(k-1)} L_{(k-1)} = 0,$$

$$\text{wo } \mu_{k-1} = -\frac{a_{(k-1)k}}{a'_{(k-1)(k-1)}} \text{ und } L_1 \equiv G_1 = 0$$

Die Zurückführung auf ein zweigliedriges Gleichungssystem kann natürlich auch in umgekehrter Reihenfolge, d. h. ausgehend von der letzten Gleichung, erfolgen. Werden die durch Rückwärtsreduktion sich ergebenden zweigliedrigen Gleichungen mit  $R$  und wieder mit den selben Indices wie die Grundgleichungen bezeichnet, aus denen sie hervorgehen, so gilt die entsprechende Reduktionsregel

$$R_k = G_k + v_{(k+1)} R_{(k+1)} = 0$$

$$\text{wo } v_{(k+1)} = -\frac{a_{k(k+1)}}{a''_{(k+1)(k+1)}} \text{ und } R_n \equiv G_{n+1} = 0$$

und der Doppelindex im Nenner andeutet, dass die Reduktion von unten nach oben geschieht. — Man erkennt leicht, dass außer den Belastungsgliedern nur die Hauptvorzahlen  $a_{kk}$  in der Matrix eine Reduktion erleiden, während die  $a_{k(k+1)}$  ungeändert in die zweigliedrigen

<sup>2)</sup> Z. B. findet man beim Zweigelenkbogen mit parabolischer Axe und  $J \cos \varphi = l = \text{konstant}$  für die 24  $J_0 E$ -fachen Auflagerdrehwinkel infolge des Auflagermomentes  $M_1 = 1$  oder  $M_2 = 1$ :

$$a_{11} = a_{22} = 3l, a_{12} = a_{21} = -l, \text{ wo } l = \text{Stützweite.}$$

Im folgenden wird gezeigt, dass die einfachen und allgemeinen Grundlagen, auf die sich das *räumliche Massenschwerpunktverfahren*<sup>1)</sup> aufbaut, d. h. der Satz über die Möglichkeit der Reduktion dreigliedriger Gleichungen auf zweigliedrige Rekursionsgleichungen und seine massengeometrische Deutung, auch den natürlichen und gemeinsamen Ausgangspunkt für beide erwähnten ebenen Methoden bilden. Auf dieser neuen und elementaren Grundlage, die den Vorteil hat, die einfachsten analytischen und graphischen Verfahren zu vereinigen, wird die nahe Verwandtschaft beider bisher sonst auf grundverschiedenen Wegen abgeleiteten graphischen Verfahren ersichtlich, das oft behandelte Gebiet zusammengefasst, kritisch beleuchtet und zum Abschluss gebracht. Dies ist der Grund, weswegen wir

<sup>1)</sup> Vergleiche das Buch des Verfassers: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefester Stab- und Flächentragwerke, S. 59, Verlag A.-G. Gebrüder Leemann & Cie, Zürich und Leipzig [Besprochen auf S. 66 laufenden Bandes, 4. Februar 1928. Red.]; ferner den Aufsatz: Die graphische Berechnung des kontinuierlichen Trägers auf elastisch drehbaren Stützen nach dem räumlichen Massenschwerpunktverfahren, im „Bauingenieur“ 1927 Nr. 47, S. 869.

Gleichungen übergehen. Bei einiger Uebung kann man deswegen die Reduktion noch in gedrängterer Form, wie im Buche des Verfassers gezeigt, durchführen:

Man stellt zunächst die berechneten, voneinander verschiedenen Matrixvorzahlen und die Belastungsglieder der Grundgleichungen in ihrer natürlichen Reihenfolge zusammen.

Matrixvorzahlen		Belastungsglieder		
$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{10}$	$b_{10}$	$c_{10}$
$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{20}$	$b_{20}$	$c_{20}$
$\vdots$				
$a_{kk}$	$a_k(k+1)$	$a_{k0}$	$b_{k0}$	$c_{k0}$
$\vdots$				
$a_{nn}$		$a_{n0}$	$b_{n0}$	$c_{n0}$

Hierauf führt man in einer Kolonne die Reduktion der  $a_{kk}$  und gleichzeitig auch der vorhandenen Belastungsglieder-Kolonnen durch. Mit Rücksicht auf die sich ergebende Vereinfachung der aufeinanderfolgenden Berechnung der  $M$  durch Rückwärtseinsetzen in die zweigliedrigen Gleichungen schreibt man auch die Kolonnen der  $\mu$  bzw.  $\nu$ -Festverhältnisse auf, obschon man sie sonst ohne Ablesen ihres Wertes auf den Rechenschieber einstellen und zur Reduktion benützen könnte. Die  $a_{k(k+1)}$  nimmt man erst dort, wo man sie braucht, d. h. in die zweigliedrigen Gleichungen auf.

#### Vorwärtsreduktion.

1)	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{10}$	$b_{10}$	$\frac{-a_{12}}{a_{11}}$
	$\frac{a_{22}}{a_{11}} a_{12}$		$\frac{a_{20}}{a_{11}} a_{10}$	$\frac{-a_{12}}{a_{11}} b_{10}$	
2)	$a'_{22}$	$a'_{23}$	$a'_{20}$	$b'_{20}$	$\frac{-a'_{23}}{a'_{22}}$
	$\frac{a'_{33}}{a'_{22}} a'_{23}$		$\frac{a'_{30}}{a'_{22}} a'_{20}$	$\frac{-a'_{23}}{a'_{22}} b'_{20}$	
3)	$a'_{33}$	$a'_{34}$	$a'_{30}$	$b'_{30}$	$\frac{-a'_{34}}{a'_{33}}$
	u. s. f. bis				
	$a_{nn}$		$a_{n0}$	$b_{n0}$	
	$\frac{a_{(n-1)n}}{a'_{(n-1)(n-1)}} a_{(n-1)n}$		$\frac{a_{(n-1)n}}{a'_{(n-1)(n-1)}} a'_{(n-1)0}$	$\frac{-a_{(n-1)n}}{a'_{(n-1)(n-1)}} b'_{(n-1)0}$	
n)	$a'_{nn}$		$a'_{n0}$	$b'_{n0}$	

In den unterstrichenen Zeilen finden sich die Vorzahlen, Belastungsglieder und die Festverhältnisse der aufeinanderfolgenden zweigliedrigen Gleichungen. Die zweiten Indices lassen keinen Zweifel darüber bestehen, zu welchen Stützmomenten die Vorzahlen gehören. Auf ganz entsprechende Weise erhält man die zweigliedrigen  $R$  Gleichungen.<sup>3)</sup>

#### II. DIE MASSENGEOMETRISCHE DEUTUNG DES ANALYTISCHEN REDUKTIONSVORGANGES IN DER EBENE.

##### Einer linearen Gleichung

$G = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \dots + a_n x_n = 0$  kann man auf folgende Weise eindeutig einen Punkt  $G$  in der Zeichenebene entsprechen lassen (Abbildung 6).

Man wählt  $n$  aufeinanderfolgende, auf eine horizontale Basis in den Punkten  $1_0, 2_0, 3_0 \dots n_0$  senkrecht stehende, festliegende Geraden, trägt in ihnen von der Basis aus die Ordinaten  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$  ab und verbindet die Endpunkte  $1, 2, 3 \dots n$  zu einem Polygon, dem  $x$ -Polygon. Aus Gründen, die aus dem folgenden einleuchten, nennen wir die Basis die *Massenkoordinatenaxe* oder kurz *m-Axe* und die vertikalen Geraden die *Parallelkoordinatenachsen* oder einfach *x-Axen*.

Fassen wir nun  $\sum_{k=1}^n a_k x_k = -a_0$  als das statische

Moment der in den Ecken  $1, 2, 3 \dots n$  des  $x$ -Polygons liegenden Massenkoordinaten  $a_1, a_2 \dots a_n$  in bezug auf die *m-Axe* auf, so ist offenbar der Schwerpunkt  $G$  der ge-

<sup>3)</sup> In ähnlicher Weise kann man auch bei den fünfgliedrigen Gleichungen das hier angegebene noch weiter abgekürzte Schema beiüben.

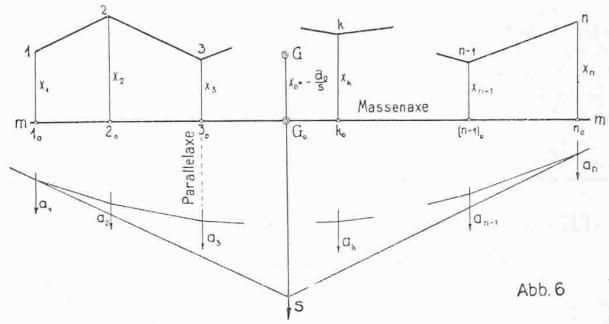


Abb. 6

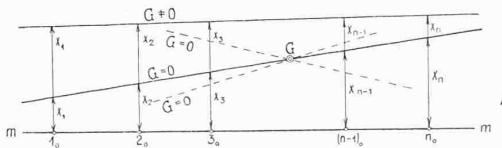
nannten Massenpunkte infolge der festliegenden *x* Axen eindeutig bestimmt: seine Projektion  $G_0$  auf die *m*-Achse ist der Schwerpunkt der in  $1_0, 2_0 \dots n_0$  liegenden Massenkoordinaten  $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ ; seine Ordinate  $x_0$  in bezug auf die *m*-Achse berechnet sich aus

$$x_0 = -\frac{a_0}{s}, \text{ wo } s = \sum_{k=1}^n a_k$$

Der mit der resultierenden Masse  $s$  belegte Punkt  $G$ , den wir *Grundpunkt* nennen, fassen wir als den geometrischen Repräsentanten der gegebenen Gleichung  $G = 0$  auf; dem entsprechend ist  $G_0$  der Repräsentant der homogenen Gleichung (d. h. mit  $a_0 = 0$ ).  $G_0$  kann graphisch auf bekannte Weise durch Teilen gegebener Strecken nach gegebenen Verhältnissen oder besser durch Zeichnen eines Kraft- und Seilpolygons zu den als parallelen Kräften aufgefassten in den festen *x*-Axen wirkenden Massen  $a_1, a_2 \dots a_n$  erhalten werden. (Abbildung 6). Umgekehrt können natürlich zu einem gegebenen Punkte unzählige viele Gleichungen gehören.

Für unsere Abbildungsmethode gelten folgende für das weitere wichtige Sätze:

1. Die Parallelkoordinaten  $x_1, x_2 \dots x_n$  jeder durch den Punkt  $G$  gehenden Geraden (d. h. die Abschnitte auf den festen *x*-Axen zwischen der Geraden und der *m*-Achse) befriedigen die gegebene Gleichung  $G = 0$  des Punktes und umgekehrt geht eine Gerade nur dann durch den Punkt  $G$ , wenn ihre Parallelkoordinaten die gegebene Gleichung des Punktes identisch erfüllen (Abbildung 7).



Der Beweis dieses Doppelsatzes leuchtet aus der Einsicht ein, dass der Schwerpunkt von auf einer Geraden liegenden Massen sich ebenfalls auf dieser Geraden befindet.

Mit Hilfe des Satzes (1) ergibt sich u. a. am unmittelbarsten die bekannte *Mohr'sche Kreuzlinienkonstruktion* zur Lösung zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten, von der in der Theorie kontinuierlicher Tragwerke häufig Gebrauch gemacht wird:

$$F = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{10} = 0 \\ J = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{20} = 0$$

Jede dieser Gleichungen stellt im kombinierten Koordinatensystem einen Punkt  $F$  bzw.  $J$  dar (Abbildung 8). Die Parallelkoordinaten  $x_1, x_2$  der Verbindungsgeraden  $F-J$  befriedigen nach obigem Satz beide Gleichungen, sind also die gesuchten Lösungen. Man könnte  $F$  und  $J$  durch ihre Ordinaten

$$x_{10} = -\frac{a_{10}}{s_1} \text{ und } x_{20} = -\frac{a_{20}}{s_2}$$

eintragen; einfacher findet man sie eben in einigen Anwendungsfällen vermittelst der Kreuzlinien.

Die Parallelkoordinaten jeder durch  $F$  gehenden Geraden befriedigen die Gleichung  $F = 0$ . Legt man die

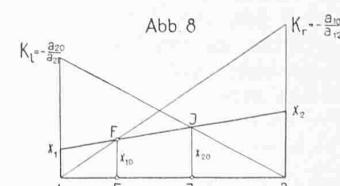


Abb. 8

Gerade durch  $x_0$ , so wird  $x_1 = 0$  und der rechtsseitige Kreuzabschnitt der linksfallenden Kreuzlinie wird also

$$x_2 = K_r = -\frac{a_{10}}{a_{12}}$$

Die entsprechende Ueberlegung liefert

$$x_1 = K_l = -\frac{a_{20}}{a_{21}}$$

Sind die beiden Gleichungen Elastizitätsgleichungen, wie z. B. bei der Bestimmung der Einspannmomente eines beidseitig starr oder elastisch eingespannten Balkens (z. B. Feld eines kontinuierlichen Trägers<sup>4)</sup>), so gilt  $a_{12} = a_{21}$ , und  $F$  und  $J$  sind die Belastungsfestpunkte für beidseitig starre oder elastische Einspannung.

2. Die Gleichung  $kG = 0$  stellt den gleichen Punkt wie die Gleichung  $G = 0$  dar, nur ist er mit der  $k$ fachen Masse, d. h. mit  $ks$  belegt; denn sowohl  $G_0$  als auch  $x_0 = -\frac{k a_0}{ks} = -\frac{a_0}{s}$  ändern sich nicht.

3. Eine Gleichung mit nur einer Parallelkoordinate stellt einen Punkt auf der entsprechenden Parallelaxe dar. Werden zwei oder mehrere  $x$ -Axe als zusammenfallend gewählt und enthält die Gleichung eines Punktes nur die  $x$  der sich deckenden Axen, so liegt natürlich auch der betreffende Punkt auf dieser doppelt oder mehrfach zuzählenden Axe.

4. Sind  $n$ -Punkte durch  $n$  lineare Gleichungen  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0 \dots P_n = 0$  gegeben (wobei die Anzahl der  $x$  in jeder Gleichung beliebig gross sein kann) und sind  $k_1, k_2 \dots k_n$  beliebige positive oder negative Zahlwerte, so entspricht der Gleichung

$$P = k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 \dots + k_n P_n = 0$$

der Schwerpunkt der bezw. mit den Massen

$$k_1 s_1, k_2 s_2, k_3 s_3 \dots k_n s_n \text{ belegten Punkte}$$

$$P_1, P_2, P_3 \dots P_n$$

Insbesondere liegen also die drei Punkte  $P = 0, P_1 = 0, P_2 = 0$  auf einer Geraden, wenn

$$P = k_1 P_1 + k_2 P_2 = 0$$

Der Beweis der Sätze unter 4 erhellt aus unserer Ausgangsdefinition für den zu  $P = 0$  gehörigen Massenpunkt  $P$  und aus der nützlichen und in der Statik oft verwendeten Regel: Der Schwerpunkt von Massenpunkten kann gefunden werden, indem man sie in beliebiger Gruppierung zu teilresultierenden Massen zusammensetzt und den Schwerpunkt der Teilresultierenden ermittelt. Graphisch ergibt sich  $P$  aus  $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$  entweder durch aufeinanderfolgende Schwerpunktbestimmungen auf den Verbindungsgeraden je zweier Massenpunkte oder durch Zeichnen von Seilpolygonen, indem  $P$  als Mittelpunkt paralleler Kräfte aufgefasst wird.

Der erste Weg führt zur graphischen Berechnung der durchlaufenden Träger nach dem ebenen Massenschwerpunkt, der zweite nach dem Seilpolygonverfahren.

### III. DURCHLAUFENDER TRÄGER AUF FREI DREHBAREN STÜTZEN.

Wir gehen von den für beide abzuleitende Verfahren grundlegenden Formeln für die Vor- und Rückwärts-Reduktion der dreigliedrigen Momentengleichungen auf zweigliedrige Gleichungen aus. Wir wollen diese Ausgangsgleichungen, zum bessern Verständnis, hier noch einmal anschreiben.

$$L_k = G_k + \mu_{k-1} L_{k-1} = 0$$

$$R_k = G_k + r_{k+1} R_{k+1} = 0$$

In unserm kombinierten Koordinatensystem, wobei wir als  $m$ -Axe eine horizontale Gerade und als Parallelachsen ( $M$ -Axe) natürlich die Stützvertikalen wählen, entsprechen sowohl den  $G$ - als auch den  $L$ - und  $R$ -Gleichungen Punkte, die auf festen, nur von den Massenkoordinaten abhängigen, also von den Belastungen unabhängigen Vertikalen  $g, l, r$ , liegen. Die  $g_k$  können auf bekannte Weise aus den drei sie bestimmenden Massenkoordinaten  $a_{(k-1)k}$ ,

<sup>4)</sup> Ist nur ein Feld belastet, so übersicht man leicht, dass die dreigliedrigen Momentengleichungen durch Vor- und Rückwärtsreduktion auf zwei Gleichungen mit den der belasteten Öffnung benachbarten Stützmomenten als Unbekannte zurückgeführt werden können. Vergl. das erwähnte Buch des Verfassers, S. 87 und folgende.

$a_{kk}, a_{k(k+1)}$  eingetragen werden.<sup>5)</sup> Wie die  $l$  und  $r$  sich rein graphisch auf zwei Wegen bestimmen lassen, werden wir weiter unten sehen, setzen aber vorläufig voraus, dass sie vorhanden sind. Da alle Massenkoordinaten hier positiv sind, liegen die  $l$ - und  $r$ -Linien zwischen den Stützvertikalen des betrachteten Feldes. Mit Hilfe des Zusatzes von II. 4 lassen sich nun die beiden Reduktionsregeln ohne weiteres geometrisch deuten (Abbildung 9).

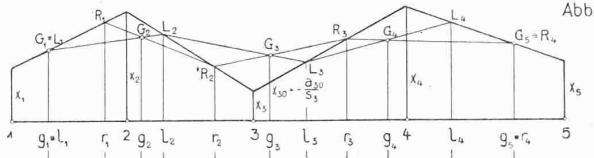


Abb. 9

Je zwei aufeinanderfolgende linksseitige und je zwei rechtsseitige Belastungsfestpunkte  $L, R$  liegen mit dem von ihnen eingeschlossenen Grundpunkt  $G$  auf einer Geraden.

Hat man also die  $G_k$  mit Hilfe ihrer Ordinaten  $x_{k0} = -\frac{a_{k0}}{s_k}$  auf den  $g_k$  Linien eingetragen, so erhält man aus  $L_1 \equiv G_1, R_1 \equiv G_{n+1}$  durch Einlegen der genannten Geraden auf den  $l$ - und  $r$ -Geraden die  $L$ - und  $R$ -Belastungsfestpunkte und damit von jeder Seite des Schluss-Polygons zwei Punkte, da eben die  $L$ - und  $R$ -Gleichungen zweigliedrig sind.

Dieses zuerst von Claxton Fidler in weniger allgemeiner Ableitung vorgeschlagene und von Müller-Breslau und Ostenfeld übernommene Verfahren hat den Nachteil, dass es infolge der notwendigen Einrechnung der  $G_k$  nicht rein graphisch ist. Erinnert man sich aber an die Entstehungsweise der dreigliedrigen Gleichungen für die  $k$ -te Stütze, d. h. an die Bedeutung von  $a_{kk} = a_{kk}^l + a_{kk}^r$  und  $a_{k0} = a_{k0}^l + a_{k0}^r$  als den Auflagerdrehwinkelsummen an der  $k$ -ten Stütze infolge der Wirkung von  $M_k = 1$  bezw. der Belastungen auf die als einfache Balken gelagerten Felder  $(k-1) \div k, k \div (k+1)$ , so erkennt man, dass der Massenpunkt  $G_k$  in natürlicher Weise durch die Zusammensetzung der beiden Massenpunkte  $J_{k-1}$  und  $F_k$  mit den zugehörigen Gleichungen

$$J_{k-1} = a_{(k-1)k} M_{k-1} + a_{kk}^l M_k + a_{k0}^l = 0$$

$$F_k = a_{kk}^r M_k + a_{k(k+1)} M_{(k+1)} + a_{k0}^r = 0$$

entsteht. Ein Blick auf diese Gleichungen lehrt, dass den  $J$ - und  $F$ -Punkten die wichtige Bedeutung der Belastungsfestpunkte bei beidseitiger starrer Einspannung der Einzelfelder zukommt, die in jedem Feld ebenfalls auf festen von den Belastungen unabhängigen  $i$ - und  $f$ -Linien liegen. Fidler und Ostenfeld nennen diese Punkte „charakteristische Punkte“ und bestimmen aus ihnen durch Verbinden und Schneiden mit den  $g$ -Linien die  $L$ - und  $R$ -Punkte, die oben beschrieben die  $L$ - und  $R$ -Punkte.

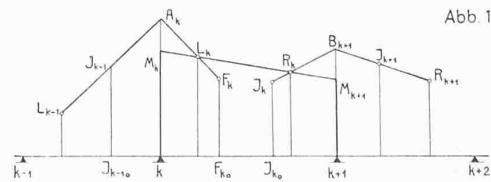


Abb. 10

Man kann aber, was bis jetzt beim kontinuierlichen Träger auf frei drehbaren Stützen übersehen wurde, die  $L$ - und  $R$ -Belastungsfestpunkte unmittelbar aus den  $J$ - und  $F$ -Punkten auf graphischem Wege erhalten (Abbildung 10). Man hat hierzu nur die Gleichungen für die  $L$  und  $R$ , z. B. für  $L_k$  in der Form

$$L_k = (\mu_{(k-1)} L_{(k-1)} + J_{(k-1)}) + F_k = A_k + F_k = 0$$

zu schreiben. Aus der Gleichung des Punktes

$$A_k = \mu_{(k-1)} L_{(k-1)} + J_{(k-1)} = 0$$

erkennt man, dass er 1. auf die Verbindungsgeraden von  $L_{(k-1)}$  und  $J_{(k-1)}$  (II. 4) und 2. auf der  $k$ -ten Stützvertikalen liegt; denn in der  $A$ -Gleichung tritt nur  $M_k$  auf ( $M_{(k-1)}$  gelangt ja durch die Reduktion zum Verschwinden). End-

<sup>5)</sup> Bei beliebiger Veränderlichkeit der Trägheitsmomente wohl am besten durch Zeichnen eines Seilpolygons für Drehgewicht infolge  $M_k = 1$ .

lich liegt  $L_k$  im Schnittpunkt der Verbindungsgeraden  $A_k \dashv F_k$  und der  $f_k$ -Festlinie. In der Abbildung 10 ist die Bestimmung der Belastungspunkte  $L_k$ ,  $R_k$  aus  $L_{(k-1)}$  und  $R_{(k+1)}$  nach diesem Verfahren gezeigt. Es sei daran erinnert, dass die  $F$ - und  $J$ -Punkte in vielen Fällen sich rein graphisch bestimmen lassen, besonders einfach bei gleichförmig verteilter Belastung und Annahme des Potenzgesetzes für die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes im Bereich eines Feldes (Abb. 11). In solchen Fällen kann also das Schlusspolygon aus den  $F$ - und  $J$ -Punkten sehr einfach rein graphisch ermittelt werden.<sup>6)</sup>

Es bleibt uns nur noch zu zeigen, wie die *l*- und *r*-Linien auf graphischem Weg gefunden werden können.

Für die massengeometrische Lösung dieser Aufgabe braucht es keiner neuen Ueberlegungen: Man hat bloss die Konstruktion der Abbildung 10 für einen möglichst bequemen Belastungsfall durchzuführen, um, ausgehend von den bekannten  $l_1 \equiv g_1$  und  $r_n \equiv g_{n+1}$ , aufeinanderfolgend je einen Punkt der übrigen  $l$ - und  $r$ -Festlinien zu erhalten (Abbildung 12): Man wählt  $L_{(k-1)}$  auf der  $m$ -Axe, ebenso  $G_k$ ; dann liegt auch der gesuchte  $L_k$  Punkt auf der  $m$ -Axe. Legt man durch  $G_{k_0}$  eine ganz beliebige Gerade, schneidet sie mit der  $i_{(k-1)}$  und  $F_k$ -Geraden, so erhält man zwei benachbarte Festpunkte  $J_{k-1}$ ,  $F_k$  für starre Einspannung, die den Belastungsgliedern  $a'_{k_0} = -a''_{k_0}$ , also der homogenen Gleichung  $G_{k_0} = 0$  entsprechen. Aus den  $J_{(k-1)}$  und  $F_k$  erhält man durch genau die selben zwei Geraden, die jetzt die Momentengeraden in den beiden benachbarten und unbelasteten Feldern bedeuten, den gesuchten  $L_{k_0}$ -Punkt und damit die  $l_k$ -Linie. Durch Benützung der selben  $J_{(k-1)}$  und  $F_k$ -Punkte ergibt sich  $R_{(k-1)_0}$  aus  $R_{k_0}$  (Abbildung 12).

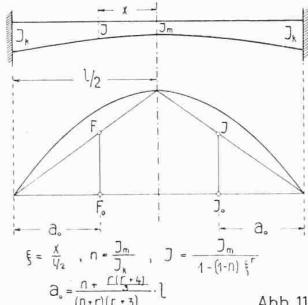


Abb. 17

$F_{k_0}$  bezeichnen.) Wir setzen sie nach den bekannten Regeln der Graphostatik vermittelst eines Seilpolygons zusammen (Abbildung 13). Als erste Seite I wählen wir die  $m$ -Axe. Die zweite Seite II kann ebenfalls noch in ihrer Richtung beliebig gewählt werden, da wir über den Kräftestab beliebig verfügen können. Die Seite III ist aber jetzt bestimmt: Sie muss durch den Stützpunkt  $k$  (Schoittpunkt von  $m = 1$  mit der  $k$ -ten Stützvertikalen) gehen, da die Resultierende der beiden ersten Kräfte  $\mu_{(k-1)} L_{(k-1)_0}$  und  $J_{(k-1)_0}$ , die in der  $k$ -ten Stützvertikalen liegende Resultierende  $a''_{kk} = \text{Masse des Punktes } A_k$  ergibt. Endlich müssen sich die zweite und die vierte Seite des Seilpolygons auf der Resultierenden der zweiten und dritten Kraft in  $l_{(k-1)}$  und  $f_{k_0}$ , d. h. auf der  $g_k$ -Geraden schneiden. Seite IV ist also auch bestimmt und ihr Schnittpunkt mit der  $m$ -Axe, d. h. mit der ersten Seilpolygonseite, gibt einen Punkt  $L_{k_0}$  der Gesamt-Resultierenden, d. h. der  $l_k$ -Geraden. Die entsprechenden Ueberlegungen liefern aus  $r_k$ ,  $r_{k-1}$ , wobei wieder eine kleine Vereinfachung eintreten kann, indem in den rechts- und linksseitigen Seilpolygonen die gleichen dritten Seiten gewählt werden können. Wir haben unsere elementare Ableitung der Verallgemeinerung der bekannten Mohr'schen Konstruktion, der grössern Deutlichkeit wegen, mit der ausführlichen Angabe der auftretenden Massen oder Parallelkräfte belastet. Ist einmal der analytische Reduktionsvorgang und seine massengeometrische Uebertragung klar erfasst, so kann man wohl auf diesen Ballast verzichten und die Ableitung noch kürzer fassen.

Beide angegebenen Verfahren zur Bestimmung der  $l$ - und  $r$ -Festlinien sind ungefähr gleichwertig. Die letzte Seite des Seilpolygons liefert zwar  $L_{k_0}$ , bei gleicher Neigung der in Abbildung 14 gemeinsamen Ausgangsgeraden II unter schärferer Schnittbildung. Dafür ist aber im Seilpolygonverfahren die Seite III durch näherliegende Punkte weniger genau als die entsprechende Seite im Massenschwerpunktverfahren bestimmt. Aus der gleichen Abbildung erkennt man, dass beide Lösungen ineinander

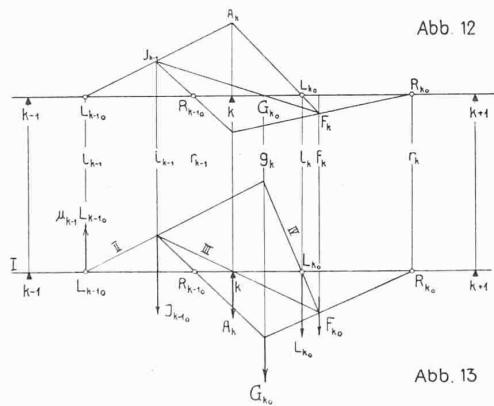


Abb. 12

Abb. 13

Ebenso leicht ergeben sich aber auch die  $l$ - und  $r$ -Festlinien, bei vorliegenden  $g$ -,  $f$ - und  $i$ -Geraden, auf graphostatischem Weg, vermittelst Seilpolygonen, die ohne das Zeichnen zugehöriger Kraftpolygone eingelegt werden können, wenn man sich die einfachen Ergebnisse der analytischen Reduktion und ihre massengeometrischen Deutung vor Augen hält.

Nach der Gleichung für  $L_k$  und II. 4 ist  $L_{k_0}$  der Schwerpunkt der in  $L_{(k-1)_0}, J_{(k-1)_0}$ , bzw.  $F_{k_0}$  liegenden Massen:  $\mu_{(k-1)} (a'_{(k-1)(k-1)} + a_{(k-1)k}), (a_{(k-1)k} + a'_{kk}), (a'_{kk} + a_{k(k+1)})$ , oder  $l_k$  ist die Wirkungslinie der Resultierenden der gleich grossen in  $l_{(k-1)}, i_{(k-1)}, f_k$  wirkenden Parallelkräfte, die wir abgekürzt mit  $\mu_{(k-1)} L_{(k-1)_0}, J_{(k-1)_0}$ ,

<sup>9)</sup> Für andere Querschnittsgesetze und Belastungsfälle sind für die Kreuzlinienabschnitte von A. Strassner Linien u. a. gebrauchsfertige Zahlentafeln aufgestellt worden. — Man überzeugt sich leicht, dass die bequeme Konstruktion der Abbildung 11 für jeden symmetrisch ausgebildeten Balken gilt.

übergehen durch Vertauschen der Rollen der *Stützvertikalen* und der *Grundlinien* ( $g$ -Linien). Der geometrische Zusammenhang beider Lösungen ist natürlich ein rein projektiver. Die eine kann aus der andern durch Anwendung des folgenden Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie gewonnen werden:

Drei Paare  $A_1, B_1, C_1$ ;  $A_2, B_2, C_2$  entsprechender Punkte zweier projektiver Reihen auf zwei Geraden bestimmen in den Schnittpunkten der Geradenpaare

$$A_1 B_2 \doteq A_2 B_1; \quad A_1 C_2 \doteq A_2 C_1; \quad B_1 C_2 \doteq B_2 C_1$$

drei Punkte der Perspektivaxe. Diese drei Punkte liegen also in einer Geraden. Lässt man nun in der Abbildung 14 den mit  $A_1, B_1, C_1$  bezeichneten Punkten auf der Sei-seite II die Punkte  $A_2$  (im Unendlichen),  $B_2, C_2$  auf  $f_k$  ent-sprechen, so erkennt man, dass der Stützpunkt  $k$ , der Grundpunkt  $G_{k_0}$  und der gesuchte Momentenfestpunkt  $L_{k_0}$  die drei erwähnten Punkte der Perspektivaxe, d. h. der  $m$ -Axe sind. Die beiden Schlussgeraden  $B_1 C_2, B_2 C_1$  müssen also in der Tat durch den dritten der genannten Punkte, d. h.  $L_{k_0}$  hindurch gehen.<sup>8)</sup> (Schluss folgt.)

<sup>7)</sup> Die erste dieser Kräfte ist negativ, da  $\mu_{(k-1)}$  das negative Vorzeichen hat.

8) Mit Rücksicht auf die Kenner der Anfangsgründe der projektiven Geometrie, zu denen man die Absolventen der Bauingenieurarbeitung der E. T. H. rechnen kann, glaubten wir auf den gegebenen projektiven Zusammenhang der beiden Festpunkt-Konstruktionen nicht verzichten zu dürfen.