

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	89/90 (1927)
<b>Heft:</b>	24
<b>Artikel:</b>	Méthode purement optique de détermination des tensions intérieures se produisant dans les constructions
<b>Autor:</b>	Favre, Henry
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-41820">https://doi.org/10.5169/seals-41820</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

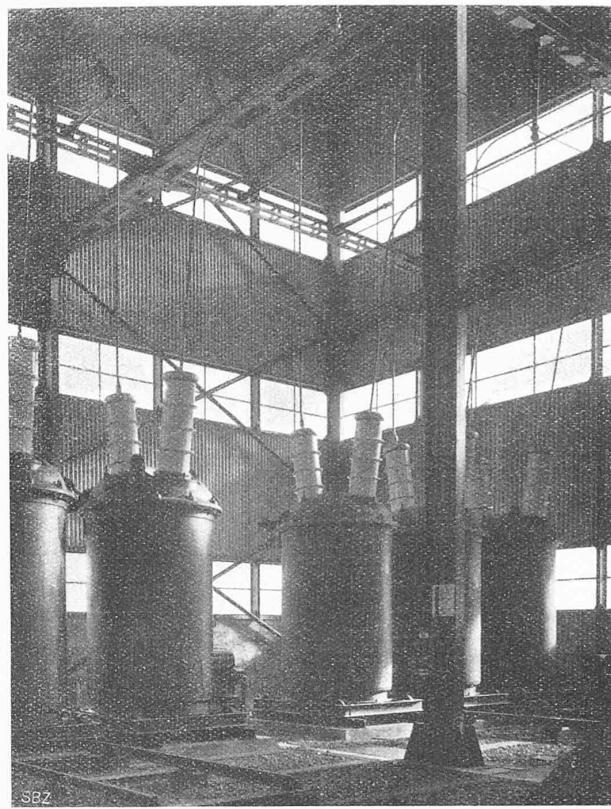


Abb. 5. Südostecke der 150 kV Halle mit 150 kV Transformatoren-Schaltern.

werden; das Riegelmauerwerk ist  $\frac{1}{2}$  Stein stark aus Kalksandsteinen und im Kommandoraum aus längsgelochten Schlackenplatten erstellt. Zudem ist der Kommandoraum mit einer elektrischen Bodenheizung ausgerüstet; seine Beleuchtung erfolgt durch ein kittloses Oberlicht. Das Gewicht der Eisenkonstruktion (ohne Tore und Fenster) beträgt 28,3 t, entsprechend 17,2 kg/m<sup>3</sup> umbauten Raumes.

## HALLE DER 50 KV ANLAGE.

Der 50 kV Teil der Anlage unterscheidet sich in seiner Konstruktionsart nur unwesentlich vom 150 kV Teil. Da der Dachraum durch die elektrische Installation belegt ist, musste hier durch Versetzen der Abschlusswand zwischen dieser und dem letzten normalen Hallenbinder für die Unterbringung des Ventilators Platz geschaffen werden, wobei in dem dadurch entstandenen Raum Leiteraufstiege zu den Laufstegen und zum Ventilator eingebaut werden konnten, die zugleich als Notabstiege dienten. Vom Kabelboden des Kommandobauens aus gelangt man über einige Stufen auf die beiden Längslaufstege aus Beton mit Hart-Asphalt-Belag. Von diesen Stegen aus werden die Trennmesserantriebe bedient, während die Antriebe im 150 kV Teil an den Säulen angebracht sind und von ebener Erde aus betätigt werden können. Das Gewicht der Eisenkonstruktion (ohne Tore und Jalousien, sowie ohne Fenster) beträgt 125 t, die zur Hauptsache im Winter 1925/26 in knapp zwei Monaten montiert wurden. Pro m<sup>3</sup> umbauten Raumes ergibt sich hier ein Eisengewicht von 13,8 kg.

## BAUKOSTEN.

Ohne Landerwerb, Projektierungs- und Bauleitungskosten, ohne Kran und Ventilatoren, jedoch einschliesslich Umgebungsarbeiten, betragen die Baukosten für den 150 kV Teil 247600 Fr. od. 16,50 Fr./m<sup>3</sup> umbauten Raumes  
 50 kV Teil 178600 " 19,75 " " "  
 Kommandobau 49800 " 30,20 " " "  
 Oelleitungen und Oelbehälter . . . . . 14200 Fr.  
 Grundwasserpumpenanlage und Kanalisation  
 bis in die Töss . . . . . 57800 "  
 Zufahrtstrasse . . . . . 20350 "

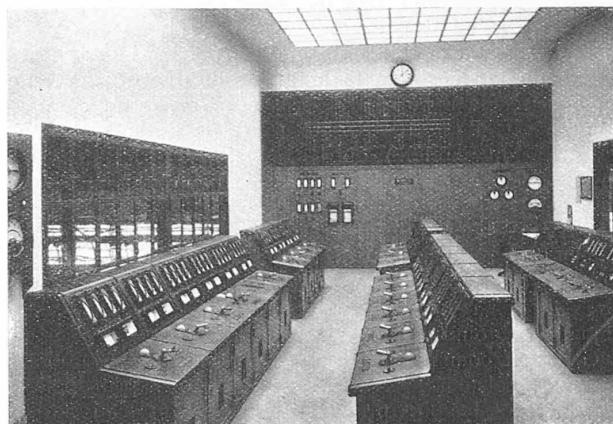


Abb. 6. Kommandoraum im II. Stock des Mittelbaus.

Méthode purement optique  
 de détermination des tensions intérieures se produisant  
 dans les constructions.

Par HENRY FAVRE, ingénieur E. P. Z., Zürich.

(Fin de la page 294)

§ 4. EXPOSÉ DE LA MÉTHODE PUREMENT OPTIQUE.<sup>15)</sup>

Pour connaître complètement le jeu des forces intérieures d'un modèle transparent d'épaisseur  $e$  soumis à un état de sollicitation à deux dimensions au point de vue des tensions, il suffit de pouvoir déterminer, en un point quelconque de ce modèle:

1<sup>o</sup> Les directions orthogonales 1 et 2 des tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

2<sup>o</sup> La grandeur de ces tensions principales.

1<sup>o</sup> Divers auteurs ont indiqué d'une façon précise comment on détermine les directions des tensions principales, soit à l'aide des lignes isoclines<sup>16)</sup>, soit à l'aide de l'extinction d'un mince rayon lumineux traversant le modèle en un point déterminé.<sup>17)</sup> Nous utilisons dans notre laboratoire ce dernier procédé, l'estimant plus précis et moins subjectif que le premier.

2<sup>o</sup> Pour déterminer la grandeur des tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en un point quelconque du modèle, nous avons à notre disposition les trois relations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Relations fondamentales } & \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = ae\sigma_1 + be\sigma_2 \dots \dots \dots (1) \\ \delta_2 = be\sigma_1 + ae\sigma_2 \dots \dots \dots (2) \end{array} \right. \\ \text{Loi de Wertheim } & \left\{ \delta_3 = c e(\sigma_1 - \sigma_2) \dots \dots \dots (3) \right. \end{aligned}$$

Les grandeurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  (variations de marche absolues pendant la mise en charge des deux rayons émergents) peuvent se déterminer à l'aide d'un interféromètre de Jamin, de Michelson ou de Mach.<sup>18)</sup>

La grandeur  $\delta_3$  (différence de marche des deux rayons émergents après mise en charge) se détermine faci-

<sup>15)</sup> Il existe déjà, comme l'expose M. Delanghe dans le Génie Civil du 24 Sept. 1927, deux méthodes purement optiques de calcul des tensions principales: celle de Maxwell et celle de M. Filon. La méthode de Maxwell (On the Equilibrium of elastic Solids. Transactions of the Royal Society, Edinburgh 1860) n'est pas susceptible d'application pratique. La méthode de M. Filon (The graphical determination of stress from photo-elastic Observations, British Association Report, 1923), basée sur des intégrations graphiques le long des courbes isostatiques, offre de grandes difficultés d'application. D'ailleurs la méthode de M. Filon est plutôt une méthode "graphico-optique" qu'une méthode "purement optique". La laboratoire de photo-élastométrie du Massachusetts Institute of Technology et de la General Electric Co. a pu cependant appliquer la méthode de M. Filon à la résolution de certains problèmes. (Voir Heymans: "Etude photo-élastométrique des tensions dans des pignons d'engrenages cylindriques" Extrait du Bull. de la Soc. Belge des Ing. et des Industriels, T. V. No. 6. 1924.

<sup>16)</sup> Mesnager, Coker, Heymans, Delanghe, etc. (loc. cit.)

<sup>17)</sup> Par ex.: Helene Rieth. Ueber die künstliche Doppelbrechung in zylindrischen Glaskörpern bei Einwirkung äusserer Drucke (Annalen der Physik, 79. 1926, p. 145).

<sup>18)</sup> Les appareils de Jamin et Michelson sont décrits dans: Ollivier, Cours de Physique. 1923. T. 3, p. 383 et suiv., celui de Mach dans la Zeitschrift für Instrumentenkunde, 12, 1892, p. 89 et suiv.

lement à l'aide d'un compensateur de Babinet ou d'un compensateur de Bravais.<sup>19)</sup>

Quant aux coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  qui sont relatifs à la matière du modèle et à la longueur d'onde utilisée, nous pouvons très facilement les obtenir en mesurant  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  en un point d'une éprouvette (faite de la même matière que celle du modèle) où les tensions principales sont connues, par exemple sur une pièce prismatique sollicitée à la compression pure.

Ayant déterminé en un certain nombre de points du modèle les grandeurs  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , nous avons donc les *trois équations* (1), (2), (3) pour calculer les *deux inconnues*  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  relatives à chaque point envisagé. Cette surabondance d'équations nous permet, grâce à la Théorie des erreurs de Gauss et comme nous le verrons ci-dessous, non seulement de calculer les valeurs des tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  qui sont les plus probables en fonction des grandeurs observées  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ , mais en outre de déterminer en chaque point envisagé l'erreur moyenne des résultats obtenus.

Les avantages de la nouvelle méthode sont donc les suivants :

1° Il n'est plus nécessaire d'entrer en contact avec le modèle pour faire des mesures de déformation. Toutes les mesures se font maintenant à distance, par simple observation du rayon émergeant du modèle. C'est donc bien une *méthode purement optique*.

2° La mesure de chacune des grandeurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  se fait avec plus de facilité et moins de causes d'erreurs que la mesure de la dilatation latérale  $e \varepsilon_3$  du modèle. Les valeurs des tensions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  provenant des *trois observations indépendantes*  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  seront donc meilleures que celles provenant des *deux observations*  $\delta_3$  et  $e \varepsilon_3$ .

3° La surabondance des équations permet de calculer les erreurs moyennes des résultats obtenus.

De fait, les premiers résultats que nous avons obtenus par application de cette méthode ont été satisfaisants (voir § 7).

## § 5. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA MÉTHODE PUREMENT OPTIQUE.

Pour déterminer  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en chaque point du modèle nous avons, comme nous venons de le voir, le système des trois équations :

$$\begin{cases} a e \sigma_1 + b e \sigma_2 = \delta_1 & (1) \\ b e \sigma_1 + a e \sigma_2 = \delta_2 & (2) \\ c e (\sigma_1 - \sigma_2) = \delta_3 & (3) \end{cases}$$

Si la mesure des grandeurs  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  pouvait se faire exactement, il existerait toujours en chaque point envisagé un groupe et un seul de valeurs  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  satisfaisant simultanément aux trois équations ci-dessus. Comme les valeurs mesurées de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  sont toujours entachées d'erreurs que nous appellerons respectivement  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , nous avons :

$$\begin{cases} a e \sigma_1 + b e \sigma_2 = \delta_1 + v_1 & (1'') \\ b e \sigma_1 + a e \sigma_2 = \delta_2 + v_2 & (2'') \\ c e (\sigma_1 - \sigma_2) = \delta_3 + v_3 & (3'') \end{cases}$$

Soient  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  les „poids“ (dans le sens attribué par Gauss<sup>20)</sup> à ce mot) des observations  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ . Pour fixer les idées, considérons  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  comme fonctions de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , fonctions définies par les équations (1''), (2''), (3''). Dans ces conditions, l'expression  $p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 = \Sigma(p v^2)$  peut être également regardée comme fonction de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . D'après Gauss, les valeurs les plus probables de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont déterminées par la condition que  $\Sigma(p v^2)$  soit un minimum, c'est-à-dire par les équations :

$$\frac{\partial \Sigma(p v^2)}{\partial \sigma_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Sigma(p v^2)}{\partial \sigma_2} = 0.$$

On peut donc calculer les valeurs les plus probables de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ainsi que les valeurs des erreurs moyennes des résultats obtenus, erreurs que nous appellerons respectivement  $M_{\sigma_1}$  et  $M_{\sigma_2}$ .

<sup>19)</sup> Ollivier. Cours de Physique. T. III, p. 442 et 443.

<sup>20)</sup> Gauss. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae (Gottingae 1823). Traduction française de J. Bertrand. Méthode des Moindres Carrés. (Paris. Mallet-Bachelier, 1855.)

Nous nous dispenserons d'indiquer ici le détail de ce calcul qui est long, quoique sans difficulté, et donnons immédiatement le résultat :

$$\sigma_1 = R_{11} \delta_1 + R_{21} \delta_2 + R_{31} \delta_3 \dots \dots \dots (10)$$

$$\sigma_2 = R_{12} \delta_1 + R_{22} \delta_2 + R_{32} \delta_3 \dots \dots \dots (11)$$

$$M_{\sigma_1} = \pm \Theta_1 (\delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \dots \dots \dots (12)$$

$$M_{\sigma_2} = \pm \Theta_2 (\delta_1 - \delta_2 - \delta_3) \dots \dots \dots (13)$$

Ces quatre équations, d'une forme et d'un emploi extrêmement simples, ont pour nous une importance fondamentale : elles font connaître en effet directement les valeurs des tensions principales et de leurs erreurs moyennes en fonction des grandeurs  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  mesurées optiquement.

Les coefficients  $R_{11}$ ,  $R_{21}$ ,  $R_{31}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{32}$ ,  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  dépendent des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , de l'épaisseur  $e$  du modèle et des poids  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ . Ces coefficients sont constants pour un modèle donné. Ils ont pour expressions :

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{a\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right) - b\left(\frac{1}{p_3}\right)}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right]}, \quad R_{21} = \frac{a\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right) - b\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right)}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right]}, \quad R_{31} = \frac{a\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) - b\left(\frac{1}{p_2}\right)}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right]} \\ R_{12} &= \frac{a\left(\frac{1}{p_3} - b\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)\right)}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right]}, \quad R_{22} = \frac{a\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3}\right) - b\left(\frac{1}{p_1}\right)}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right]}, \quad R_{32} = \frac{-a\left(\frac{1}{p_2} - b\left(\frac{1}{p_1}\right)\right)}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right]} \\ \Theta_1 &= \frac{\sqrt{p_1 b^2 + p_2 a^2 + p_3 c^2}}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right] \sqrt{p_1 p_2 p_3}}, \quad \Theta_2 = \frac{\sqrt{p_1 a^2 + p_2 b^2 + p_3 c^2}}{e c (a + b) \left[\frac{1}{p}\right] \sqrt{p_1 p_2 p_3}} \end{aligned} \quad (14)$$

dans ces formules :  $\left[\frac{1}{p}\right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$ .

## § 6. EMPLOI DE LA MÉTHODE PUREMENT OPTIQUE.

Nous résumons ci-dessous les diverses expériences et calculs nécessaires à la détermination des tensions intérieures dans un modèle transparent à l'aide de la Méthode purement optique.

Dans toutes nos expériences, nous utilisons un mince faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 5460$  u. a.<sup>21)</sup> (raie verte de l'arc du mercure). Ce faisceau a environ un diamètre de 0,5 mm au moment où il traverse le modèle : c'est donc bien pratiquement les tensions relatives à un point qui sont envisagées.

### I. Détermination des directions orthogonales 1 et 2 des tensions principales $\sigma_1$ et $\sigma_2$ .

Le modèle, sollicité par un système de forces  $P$ , placé entre deux nicols croisés, est traversé par un mince faisceau lumineux au point où l'on veut déterminer les tensions principales. On tourne les nicols, tout en les maintenant croisés, jusqu'à ce qu'on obtienne l'extinction du faisceau émergent : à ce moment les sections principales des nicols sont respectivement parallèles à 1 et 2.

### II. Détermination de la grandeur des tensions $\sigma_1$ et $\sigma_2$ et de leurs erreurs moyennes $M_{\sigma_1}$ et $M_{\sigma_2}$ .

1° On place le modèle non sollicité sur le parcours d'un des deux rayons d'un interféromètre, en faisant en sorte que ce rayon, au moment où il traverse le modèle normalement aux faces au point envisagé, soit polarisé et vibre parallèlement à la direction 1 de la tension principale  $\sigma_1$  qui agirait en ce point si le modèle était sollicité par les forces  $P$ . On repère les franges d'interférence, puis on soumet le modèle à l'action des forces  $P$  : les franges se déplacent pendant la mise en charge. Il suffit de mesurer ce déplacement au moyen d'une lunette à réticule pour avoir, en longueurs d'onde, la grandeur  $\delta_1$ .

2° On place le modèle non sollicité dans les mêmes conditions, mais en faisant en sorte que le rayon, au moment où il traverse le modèle normalement à ses faces, vibre parallèlement à la direction 2 de la tension principale  $\sigma_2$  qui agirait au point considéré si le modèle était sollicité par les forces  $P$ . On repère les franges d'interférence, puis on soumet le modèle à l'action des forces  $P$  : les franges se déplacent pendant la mise en charge. En mesurant ce déplacement au moyen de la lunette à réticule on a, en longueurs d'onde, la grandeur  $\delta_2$ .

<sup>21)</sup> 1 u. a. (unité d'Angström) =  $10^{-8}$  cm.

Tableau I. Calcul des tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et de leurs erreurs moyennes  $M_{\sigma_1}$  et  $M_{\sigma_2}$ .

x Cote du point considéré mm	$\delta_1$ u. a.	$\delta_2$ u. a.	$\delta_3$ u. a.	$R_{11} \delta_1$ $(R_{11} = +1,358 \times 10^{-4})$	$R_{21} \delta_2$ $(R_{21} = +1,316 \times 10^{-4})$	$R_{31} \delta_3$ $(R_{31} = -3,849 \times 10^{-4})$	$\sigma_1$ kg/mm <sup>2</sup>	$R_{12} \delta_1$ $(R_{12} = +2,022 \times 10^{-4})$	$R_{22} \delta_2$ $(R_{22} = +0,652 \times 10^{-4})$	$R_{32} \delta_3$ $(R_{32} = +3,143 \times 10^{-4})$	$\sigma_2$ kg/mm <sup>2</sup>	$\delta_1 - \delta_2 - \delta_3$	$M_{\sigma_1}$ kg/mm <sup>2</sup>	$M_{\sigma_2}$ kg/mm <sup>2</sup>
+9,9	-169	-774	+714	-0,0230	-0,1018	-0,2747	-0,400	-0,0342	-0,0504	+0,2243	+0,140	-109	+0,032	+0,029
+7,9	-207	-937	+739	-0,0281	-0,1232	-0,2842	-0,436	-0,0418	-0,0611	+0,2322	+0,129	-9	+0,003	+0,002
+5,9	-371	-1260	+869	-0,0504	-0,1658	-0,3343	-0,551	-0,0750	-0,0822	+0,2732	+0,116	+20	+0,006	+0,005
+4,0	-633	-1660	+1123	-0,0861	-0,2185	-0,4325	-0,737	-0,1279	-0,1082	+0,3533	+0,117	-96	+0,028	+0,025
+2,2	-1108	-2850	+1768	-0,1507	-0,3752	-0,6810	-1,207	-0,2341	-0,1857	+0,5562	+0,146	-26	+0,008	+0,007

3° On place le modèle sollicité par le système de forces  $P$  entre deux nicols croisés, les directions 1 et 2 des tensions principales du point considéré faisant des angles de  $\pm 45^\circ$  avec les sections principales des nicols. On place encore entre le modèle et l'un des deux nicols un compensateur de Bravais, dont les axes sont respectivement parallèles à 1 et 2. On éteint au moyen de ce compensateur le rayon émergent du second nicol, et l'on a facilement, après lecture au compensateur, la grandeur  $\delta_3$ .

4° Ayant déterminé ainsi  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  on calcule  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $M_{\sigma_1}$  et  $M_{\sigma_2}$  à l'aide des formules (10), (11), (12), (13).

Remarque I. Les manipulations 1, 2, 3 ci-dessus sont fort simples. Il suffit de bien régler l'interféromètre ou le compensateur avant de commencer les lectures. Le modèle n'a pas besoin d'être déplacé pour passer de la manipulation 1° à la manipulation 2°. Les calculs 4° sont aussi très commodes à effectuer: à l'aide de la règle à calcul quelques minutes suffisent par point.

Les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , qui sont relatifs à la matière utilisée pour les modèles, se déterminent une fois pour toutes à l'aide d'expériences faites sur une éprouvette soumise à un état de sollicitation connu (par exemple un prisme à section rectangulaire de même matière que les modèles et sollicité à la compression pure). Les poids  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  relatifs aux mesures de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  sont choisis, conformément à la Théorie des erreurs de Gauss, proportionnels aux inverses des carrés des erreurs moyennes de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ ; ces erreurs moyennes sont déterminées par exemple par les lectures faites sur l'éprouvette prismatique dont il vient d'être question. Enfin les coefficients  $R$  et  $\Theta$  sont relatifs à chaque modèle, puisqu'ils dépendent, d'après les formules (14), de l'épaisseur  $e$  de celui-ci; mais après les avoir calculés pour un modèle d'épaisseur  $e_1$  il suffit de les multiplier par  $e_1/e_2$  pour obtenir ceux qui correspondent à un modèle de même matière, mais d'épaisseur  $e_2$ .

Remarque II. Il n'est pas nécessaire que l'épaisseur du modèle soit constante pour pouvoir appliquer la Méthode purement optique; l'essentiel est que ce modèle soit formé de parties constituant chacune une plaque plane d'épaisseur constante, toutes ces parties ayant un plan de symétrie commun équidistant des faces. La méthode s'applique en particulier au calcul d'un pont en béton dont la voûte, le tablier, et les tympans sont évidemment trois parties distinctes ayant chacune ses coefficients propres  $R$  et  $\Theta$ . En vertu de la fin de la remarque I, il est d'ailleurs facile de calculer rapidement ces coefficients.

#### § 7. PREMIÈRE APPLICATION DE LA MÉTHODE.

N'ayant pas encore, dans notre laboratoire, l'interféromètre de Mach qui nous permettra de calculer des modèles d'une certaine grandeur, nous avons, en attendant, utilisé un interféromètre de Jamin pour nos essais préliminaires. En particulier nous avons déterminé les tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en cinq points d'un disque circulaire en verre Zeiss sollicité par deux forces égales et opposées  $P_1$  et  $P_2$  agissant aux extrémités  $A_1$  et  $A_2$  d'un même diamètre (figure 7).

Ce disque a un diamètre de 20 mm et une épaisseur de 4,97 mm. Les forces  $P_1$  et  $P_2$  avaient pour valeur commune 21,2 kg. Les cinq points choisis étaient situés

sur  $A_1 A_2$  à des distances  $x$  de  $A_1$  égales respectivement à  $+9,9$ ,  $+7,9$ ,  $+5,9$ ,  $+4,0$ ,  $+2,2$  mm.

Par suite de la symétrie, la tension principale  $\sigma_1$  en chacun de ces points était dirigée suivant  $A_1 A_2$ , et l'autre tension  $\sigma_2$  suivant une perpendiculaire à  $A_1 A_2$ .

Les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  relatifs au verre Zeiss ont été déterminés chacun par dix mesures sur une éprouvette prismatique à section rectangulaire à la compression pure. Nous avons trouvé<sup>22</sup>:  $a = +244,8$ ;  $b = +507,6$ ;  $c = -262,8$  u. a./kg:mm.

Ces mêmes mesures nous ont permis de déterminer les poids  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  des mesures de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ :

$$1/p_1 = 719$$

( $p_1$  = poids de la moyenne arithmétique de 3 mesures de  $\delta_1$ )

$$1/p_2 = 1304$$

( $p_2$  = poids de la moyenne arithmétique de 3 mesures de  $\delta_2$ )

$$1/p_3 = 192$$

( $p_3$  = poids d'une mesure de  $\delta_3$ ).

Nous avons pu alors calculer, par les formules (14), les coefficient  $R$  et  $\Theta$  qui figurent au Tableau I.

Nous avons ensuite mesuré  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  aux cinq points choisis du disque, en faisant chaque fois trois mesures pour  $\delta_1$ , trois mesures pour  $\delta_2$ , et une mesure pour  $\delta_3$ .

Le Tableau I donne le résultat des mesures de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ <sup>23</sup>, ainsi que les calculs de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $M_{\sigma_1}$  et  $M_{\sigma_2}$ .

<sup>22</sup> Si l'on mesure  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  en u. a.,  $e$  en mm,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en kg/mm<sup>2</sup>,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  auront pour dimension: u. a./kg:mm.

<sup>23</sup> Nous avons directement indiqué, pour  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , la moyenne arithmétique des trois mesures de ces grandeurs faites en chaque point.

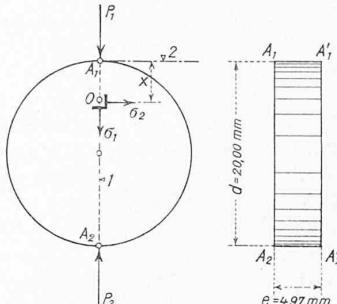
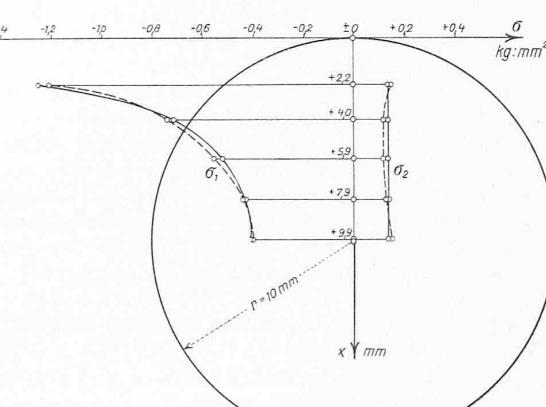


Figure 7.  
Disque circulaire en verre Zeiss sollicité par les forces  $P_1$  et  $P_2$ .  
 $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  tensions principales agissant en O.  
 $P_1$  est réparti uniformément sur la génératrice  $A_1 A'_1$ ,  
 $P_2$  sur la génératrice  $A_2 A'_2$ .



Diagrammes obtenus par la Théorie de l'élasticité

Diagrammes obtenus par la Méthode purement optique

Fig. 8. Diagrammes des tensions principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  agissant en cinq points d'un disque circulaire.

Le cas du disque circulaire sollicité par deux forces  $P_1$  et  $P_2$  égales et opposées agissant à l'extrémité d'un même diamètre peut être traité par la Théorie générale de l'élasticité<sup>24)</sup>.) Nous avons intentionnellement choisi ce cas afin de pouvoir comparer les résultats de la Méthode purement optique à ceux que donne le calcul rigoureux. La comparaison est indiquée au Tableau II, et la figure 8 donne les diagrammes des tensions  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  obtenus par mesures optiques et par calcul.

Ces résultats sont bons, si l'on songe à la petitesse de notre modèle (diamètre 20 mm). Ils confirment d'ailleurs pleinement les avantages de la Méthode purement optique indiquée au § 4.

Nous appliquerons cette méthode à une série de problèmes pratiquement impossibles à résoudre par la Théorie générale de l'élasticité; leur solution fera l'objet d'une prochaine publication.

M. Augustin Mesnager, Membre de l'Institut, nous a donné à diverses occasions d'intéressantes explications sur ses travaux; qu'il trouve ici l'expression de notre gratitude. Nous désirons surtout remercier, pour l'aide et les conseils qu'ils nous ont donnés, M. le Prof. Dr. A. Rohn, Président du Conseil de l'Ecole Polytechnique Fédérale, qui eut l'initiative de la création du laboratoire optico-statique de Zurich, M. le Prof. Dr. F. Tank, qui dirige ce laboratoire, et M. le Prof. H. Jenny-Dürst. M. le Prof. Dr. J. Franel a bien voulu revoir notre texte, nous l'en remercions vivement.

Nous adressons également nos remerciements à la Société pour le développement de l'Economie nationale suisse, qui subventionne le laboratoire.

### Energie-Ausnützung und Wirkungsgrad von Luftfahrzeugen.

Von Dr. Ing. A. PRÖLL, Hannover.

Die Energieausnützung, die bei allen technischen Anlagen eine mehr oder weniger ausschlaggebende Rolle spielt, ist merkwürdigerweise bei Luftfahrzeugen noch nicht so beachtet worden, vielleicht weil hier zunächst der elementarere Gesichtspunkt der Sicherheit — ja der Möglichkeit des Fliegens überhaupt — sodann aber die Ausnützung höchster Geschwindigkeiten im Vordergrunde des Interesses standen. Wirtschaftliche Fragen sprachen dabei naturgemäß nicht oder nur in geringem Masse mit. Auch ist nicht zu übersehen, dass wegen der geringen Lebensdauer der Luftfahrzeuge, besonders ihrer Motoren, die Abschreibungsquote derart hoch angesetzt wird, dass die Kosten einer Luftreise hierdurch meist stärker beeinflusst werden, als durch den Betriebsmittel-Verbrauch.

Mit dem Anwachsen des Luftverkehrs und dem Bau leistungsfähiger und kräftiger Metallflugzeuge, die eine gegen früher sehr viel längere Lebensdauer haben, ist aber wieder die Wirtschaftlichkeit mehr beachtet worden, und die Luftverkehrsgesellschaften suchen jetzt neben dem Bestreben nach Steigerung der Reisegeschwindigkeit die Flugzeuge zu vergrössern, um die Kosten pro Fluggast und Flugkilometer herabzusetzen.

Es handelt sich also hier vor allem um den *Transportfaktor* des Luftfahrzeugs. Bisher verstand man darunter eine Grösse von der Formel

$$T = \frac{\text{Nutzlast} \times \text{Geschwindigkeit}}{\text{aufgewandte Leistung}} = \frac{G_n v}{L} \quad \dots \quad (1)$$

Wenn wir alle Einheiten in kg, m und sek, also auch die Leistung nicht in PS, sondern in kgm/sec ausdrücken, ist dieser Transportfaktor ein absoluter Zahlenwert, der

<sup>24)</sup> Voir par exemple: *Pigeaud, Résistance des matériaux et Elasticité*, 1920, p. 718.

Tableau II. Comparaison des valeurs de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  calculées et obtenues expérimentalement.

X Cote du point considéré	$\sigma_1$ et $\sigma_2$ calculés par la Théorie de l'élasticité	$\sigma_1$ et $\sigma_2$ déterminés par la Méthode purement optique	v Erreur exacte = différence des deux $\sigma$ ci-contre	v <sup>2</sup>	Valeur moyenne des erreurs de $\sigma_1$ et $\sigma_2$ calculée d'après les erreurs exactes v = $\sqrt{\frac{\sum v^2}{10}}$ kg/mm <sup>2</sup>	$M_{\sigma_1}^2$ et $M_{\sigma_2}^2$ (voir les valeurs de $M_{\sigma_1}$ et $M_{\sigma_2}$ au Tableau I)	Valeur moyenne des erreurs de $\sigma_1$ et $\sigma_2$ calculée d'après les erreurs moyennes = $\sqrt{\frac{\sum M_{\sigma_i}^2}{10}}$ kg/mm <sup>2</sup>
mm	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>				
+ 9,9	- 0,408	- 0,400	- 0,008	+ 0,000064		+ 0,001024	
+ 7,9	- 0,434	- 0,436	+ 0,002	+ 0,000004		+ 0,000009	
+ 5,9	- 0,518	- 0,551	+ 0,033	+ 0,001089		+ 0,00036	
+ 4,0	- 0,714	- 0,737	+ 0,023	+ 0,000529		+ 0,000784	
+ 2,2	- 1,253	- 1,207	- 0,046	+ 0,002116		+ 0,00064	
					± 0,022		± 0,019
					soit	soit	
+ 9,9	+ 0,136	+ 0,140	- 0,004	+ 0,000016	± 1,8 %	+ 0,000841	± 1,5 %
+ 7,9	+ 0,136	+ 0,129	+ 0,007	+ 0,000049	de la plus grande tension envisagée	+ 0,00004	de la plus grande tension envisagée
+ 5,9	+ 0,136	+ 0,116	+ 0,020	+ 0,000400		+ 0,00025	
+ 4,0	+ 0,136	+ 0,117	+ 0,019	+ 0,000361		+ 0,000625	
+ 2,2	+ 0,136	+ 0,146	- 0,010	+ 0,000100		+ 0,00049	
					+ 0,004728	+ 0,003461	
					= $\Sigma v^2$	= $\Sigma M_{\sigma_i}^2$	

nur die Tatsache ausdrückt, in welcher Weise eine gewisse Nutzlast bei bestimmter Geschwindigkeit fortbewegt wird, und wozu eine gewisse Leistung verbraucht wird. Er stellt also gewissermassen den Wirkungsgrad des Transportmittels (des Flugzeugs) als Ganzes dar.

Neben dieser Grösse, die nachher noch etwas näher betrachtet werden soll, ist aber bei Luftfahrzeugen noch eine andere von Bedeutung, nämlich das *Tragvermögen*, d. h. die Fähigkeit, eine bestimmte Last in gleicher Höhe schwebend zu erhalten. Theoretisch wäre dazu kein Energie-Aufwand, sondern nur eine konstante Kraft — Stützkraft — erforderlich, d. h. es muss eine gewisse Menge Energie dauernd erzeugt werden, um die potentielle (Lagen-) Energie des Flugzeugs aufrecht zu erhalten.

Als letzte wichtige Grösse kommt der eigentliche *Wirkungsgrad* der Antriebsvorrichtung im Sinne der Maschinen-technik, also das Verhältnis nutzbare Vortriebsleistung zu Gesamtleistung, in Frage. Dieser Ausdruck tritt bei Luftfahrzeugen naturgemäß weniger unmittelbar in Erscheinung, kann aber für die konstruktive Ausgestaltung doch von erheblicher Bedeutung sein.

Wenn wir nunmehr diese drei verschiedenen Grössen nach ihrer Bedeutung bei den verschiedenen Luftfahrzeugen betrachten, so ergeben sich schon beim Transportfaktor allerlei Bedenken. Man kann ihn nämlich in der ursprünglichen Form nur beim Vergleich gleichartiger Verkehrsmittel benutzen. Denn wenn man die Betrachtung auch auf andere Verkehrsmittel ausdehnt, kommt man zu recht eigenartigen Ergebnissen (Tabelle I).

Wenn nach oberflächlicher Betrachtung der Transportfaktor gewissermassen als ein Ausdruck für die Oekonomie des Verkehrsmittels betrachtet würde, so wäre der Kanalkahn

Tabelle I

Verkehrsmittel	Nutzlast <sup>1)</sup> kg	Geschwindigkeit m/sek	Leistung mkg/sek	Transport- faktor
Kanalkahn (von zwei Mann betrieben)	250 000	0,8	40	5000
Radfahrer . . . .	80	8	20	32
D-Zug . . . .	100 000	30	90 000 (1200 PS)	33
Schneldampfer . .	5 000 000	10	1 500 000 (20000 PS)	33
Flugzeug . . . .	500	45	18 000 (240 PS)	1,25
Luftschiff . . . .	8 000	32	90 000 (1200 PS)	2,83

<sup>1)</sup> ohne Betriebstoffe.