

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	89/90 (1927)
<b>Heft:</b>	21
<b>Artikel:</b>	Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken
<b>Autor:</b>	Pasternak, Peter
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-41810">https://doi.org/10.5169/seals-41810</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**INHALT:** Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern. — Schaffhausen als Industriestadt. — Baubudget 1928 der Schweizerischen Bundesbahnen. — Wettbewerb für Musterhäuser an der Wasserwerkstrasse in Zürich. — Mitteilungen: Die 2C1-Einheits-Schnellzug-Dampflokomotiven der Deutschen Reichsbahn. Bau von Eisenbeton-Brücken mit beweglichem oben Lehr- und Arbeits-

gerüst. Ausfuhr elektrischer Energie. Zur Erweiterung der Oberthor-Durchfahrt in Aarau. Eidgen. Technische Hochschule. Die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Buchs. — Wettbewerbe: Kirchgemeindehaus Evang.-Tablat. Bebauungsplan für Sitten. — Korrespondenz. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Basler Ingenieur- und Architekten-Verein. S. T. S.

## Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken.

Von Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Privatdozent an der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich.

(Schluss von Seite 262.)

### IV. Kegelschale konstanter Wandstärke.

Am Schlusse meiner Abhandlung in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik habe ich den Weg angedeutet, auf dem man genauere Formeln für die Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen einer dünnen, nicht allzu flachen Kegelschale unveränderlicher Wandstärke finden kann.

Es ergeben sich auf jenem Wege für die  $J E$ -fachen Einflusszahlen, in gleicher Form wie bei der Kugelschale, folgende Werte:

$$a_{11} = \frac{s}{\omega_1}, \quad a_{12} = \frac{s^2 \sin \alpha}{2 \omega_1}, \quad a_{22} = \frac{s^3}{2} \sin^2 \alpha \quad . \quad (44)$$

$s = 0,76 \sqrt{hr}$  ist wieder die lineare Randcharakteristik, wo  $r$  = zweiter Hauptkrümmungsradius, also die Länge der Mantellinie des Rand-Normalenkegels bedeutet. Ist  $\alpha$  der halbe Öffnungswinkel dieses Kegels, so findet man die Korrekturzahl  $\omega_1$  aus

$$\omega_1 = 1 \mp \left( \frac{s}{4r} - r \right) \operatorname{ctg} \alpha \quad . \quad (44a)$$

Das obere Zeichen gilt für den unteren (grösseren), das untere für einen eventuell vorhandenen oberen (kleineren) Randkreis. Der Unterschied gegenüber der Korrekturzahl  $\omega_1$  der Kugelschale besteht im Auftreten des Ausdrucks  $\frac{1}{4} \frac{s}{r}$  anstelle von  $\frac{1}{2} \frac{s}{r}$ .

Die elastischen Randbewegungen  $a_{20}$ ,  $a_{10}$  infolge stetig verteilter Belastungen berechnen sich auch hier, genau genug, mit Hilfe der statisch bestimmten Membrankräfte  $T_{10}$ ,  $T_{20}$  aus der Ringdehnung und der Verträglichkeitsbedingung, die für den Fall der Kegelschale lautet

$$d = -\operatorname{ctg} \alpha [e_2' t + (e_2 - e_1)]^{16}) \quad . \quad (45)$$

darin ist  $t$  die vom Kegelscheitel aus gemessene Länge der Mittelflächen-Mantellinie.

### Besondere Belastungsfälle.

#### a) Eigengewicht $g$ t/m<sup>2</sup> Schalenoberfläche

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{V}{2\pi r \sin^2 \alpha} = \frac{gr}{2 \cos \alpha}; \quad T_{20} = gr \cos \alpha \\ a_{20} &= -\frac{T_{20} - r T_{10}}{r} \frac{s^4}{4} \sin \alpha = -\frac{gs^4}{8} (\sin 2\alpha - r \operatorname{ctg} \alpha) \\ a_{10} &= -\frac{h^3}{12} \operatorname{ctg} \alpha [e_2' t + (e_2 - e_1)] \\ &= -\frac{gs^4}{8r} [(2+r) \cos 2\alpha + (1-r)] \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (46)$$

#### b) Gleichförmig verteilte Belastung auf Horizontalprojektion $\rho$ t/m<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{\rho r}{2}; \quad T_{20} = \rho \cos^2 \alpha \\ a_{20} &= -\frac{\rho s^4}{8} [\cos 2\alpha + (1-r)] \\ a_{10} &= -\frac{\rho s^4}{8r \operatorname{tg} \alpha} [(2+r) \cos 2\alpha + 1-r] \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (47)$$

Man beachte, dass die Randdrehungen der Kegelschale infolge der  $g$  und  $\rho$  nach innen und nicht (wie bei der Kugelschale) nach aussen geschehen.

<sup>16)</sup> Man findet diesen Ausdruck unmittelbar durch Spezialisierung der allgemeinen Verträglichkeitsbedingung. — Eine Zurückführung von  $a$  auf die Komponenten  $X$  und  $Z$  der äusseren Belastungen bietet bei der Kegelschale keine Vorteile.

Geschlossene Formeln für die Einflusszahlen der Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke habe ich noch nicht aufstellen können.

Bei den sehr dünnen Kegeldächern mit kleiner Nutzlast ( $\rho = \sim 0,1 \text{ t/m}^2$ ) kann  $\omega_1 = 1$  gesetzt, also mit den einfacheren Ausdrücken

$$a_{11} = s, \quad a_{12} = \frac{s^2}{2} \sin \alpha, \quad a_{22} = \frac{s^3}{2} \sin^2 \alpha \quad . \quad (48)$$

für die Einflusszahlen gerechnet werden.<sup>17)</sup>

Rechnet man, zur Abschätzung der Zwängungs Kräfte, in erster Annäherung mit starrer Einspannung, so ergeben sich für die Randkräfte mit Hilfe der vereinfachten Einflusszahlen und weiter oben angegebenen  $a_{10}$  und  $a_{20}$  Werte, folgende geschlossenen Formeln a) infolge Eigengewicht

$$\begin{aligned} M &= -g \frac{s^2}{2} \left[ \cos \alpha - \left( \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{s}{r} \right] \\ H &= + \frac{g s}{2} \frac{\sin 2\alpha - (\cos 2\alpha + \frac{1}{2}) \frac{s}{r}}{\sin^2 \alpha} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (49)$$

b) infolge gleichförmig verteilter Nutzlast  $\rho$  t/m<sup>2</sup> auf Horizontalprojektion

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\rho s^2}{4} \left[ 1 + \cos 2\alpha - \frac{1 + 2 \cos 2\alpha \frac{s}{r}}{\operatorname{tg} \alpha} \right] \\ H &= + \frac{\rho s}{2} \left[ \frac{(1 + \cos 2\alpha) \sin \alpha - \cos \alpha (1 + 2 \cos 2\alpha) \frac{s}{r}}{\sin^2 \alpha} \right] \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (50)$$

Man rechnet etwas zu ungünstig, wenn die den  $s/r$  proportionalen Subtrahenden weggelassen werden. Der Fehler beträgt nur wenige Prozente, da  $s/r$  nach Voraussetzung sehr klein ist.

Die der Abschätzung dienenden bequemeren Ausdrücke lauten also

$$\begin{cases} M = -\frac{gs^2}{2} \cos \alpha, & H = +gs \operatorname{ctg} \alpha \\ M = -\frac{\rho s^2}{4} (1 + \cos 2\alpha), & H = +\frac{\rho s}{2} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases} \quad (51a) \quad (51b)$$

Auf ähnliche Weise kann man natürlich auch für die Zwängungs Kräfte der starr eingespannten Kugelschale unveränderlicher Dicke geschlossene Formeln erhalten, deren Aufstellung mit Hilfe der vereinfachten Einflusszahlen und der angegebenen Formeln für  $a_{10}$  und  $a_{20}$  dem Leser überlassen wird.

### ZAHLENBEISPIEL 5.

In dem kreisrunden Eisenbeton-Wasserbehälter (für rund 600 m<sup>3</sup>) mit Kugelboden und Kegeldach, gemäss Abb. 8 sollen die Meridianbiegemomente infolge der monolithischen Anschlüsse ermittelt werden. Die Ringmomente werden ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt.

In Einhaltung der im Eisenbetonbau für die Erschliessung der statischen Unbestimmtheit geltenden Grundlage wird die Berechnung der Zwängungs Kräfte unter Annahme eines isotropen Baumaterials und unter Vernachlässigung der Bewehrung durchgeführt. Nach erfolgter Bemessung könnte zwar die Bewehrung mit einem Dehnungsmass  $n = 5 \div 10$  in einer zweiten Kontrollberechnung Berücksichtigung finden; doch kann meistens eine solche unterbleiben, da sich das Kräftespiel nur wenig ändert.

<sup>17)</sup> Diese einfachen Formeln gelten angenähert für beliebig geformte Rotationsschalen. Vergl. meinen Beitrag an den Referatenband des Intern. Kongresses für Mechanik Zürich 1927.

Die genannte Berechnungsgrundlage erscheint ganz besonders bei Flüssigkeitsbehältern aus Eisenbeton angezeigt, da zur Vermeidung von Rissbildungen nirgends die Zugfestigkeit des unbewehrten Beton überschritten werden soll.<sup>18)</sup>

Das  $\lambda = l/s$  der Wand unseres Behälters ist (wie überhaupt bei den meisten zur Ausführung gelangenden Objekten) bedeutend grösser als 3, so dass die Zwängungskräfte an beiden Rändern sich gegenseitig nicht mehr beeinflussen und voneinander getrennt berechnet werden können.

#### A. Unterer Rand.

Es sind hier vier Konstruktionsteile, nämlich die Wand, der Boden, die Säulen und der Fussring miteinander monolithisch verbunden. Im Vergleich mit den übrigen genannten Konstruktionsteilen ist der elastische Widerstand der Säulen gering, sodass man ihn in einer Ueberschlagsrechnung vernachlässigen könnte. Dies gilt aber unter keinen Umständen für den Fussring, der schon aus konstruktiven Gründen einen massigen Querschnitt erhalten muss. Seine Biege- oder richtiger Verkantungssteifigkeit ist zwar sehr gering, sein Dehnungswiderstand aber von der gleichen Grössenordnung wie bei der Wand und dem Boden.

Will man die elastischen Widerstände aller genannten Konstruktionsteile berücksichtigen, so rechnet man am einfachsten und übersichtlichsten nach der *Deformations-Methode*. Als Ueberzählig sind die  $J_c E$ -fache Dehnung  $v$  des Fussringradius und die  $J_c E$ -fache Drehung (Verkantung)  $\alpha$  des Fussringquerschnittes einzuführen, während nach der Kraftmethode 6 Ueberzählig zu wählen wären. Wir gehen also vom Hauptsystem der im Schwerpunkt Kreis des Fussringquerschnittes *starr* eingespannten Konstruktionsteile aus und haben somit die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\Sigma H &= C_{22} v + C_{12} \alpha + C_{20} = 0 \\ \Sigma M &= C_{12} v + C_{11} \alpha + C_{10} = 0\end{aligned}$$

aufzustellen. Der für viele Leser neue Berechnungsgang wird am besten aus der nachfolgenden Zahlenrechnung erhellen.

#### 1) Randkräfte in der zylindrischen Wand.

$$r = 5,325; l = 8,00 \text{ m}, h_1 = 0,25; h_2 = 0,10;$$

$$l_1 = \frac{25}{15} 8 = 13,34 \text{ m}$$

$$s_1 = 0,76 \sqrt{0,25 \cdot 5,325} = 0,876; s_1^2 = 0,7674; s_1^3 = 0,672; s_1^4 = 0,59$$

$$1 - 1,25 \left( \frac{s}{l} \right)_1 = 0,918; 1 - 0,25 \left( \frac{s}{l} \right)_1 = 0,984$$

nach Formeln (19):

$$a_{11} = \frac{0,876}{0,918} = 0,955; a_{12} = \frac{0,7674}{2 \cdot 0,918} = 0,418;$$

$$a_{22} = \frac{0,672 \cdot 0,984}{2 \cdot 0,918} = 0,36$$

$$a_{20} = \frac{s_1^4}{4} p_1 = 0,59 \cdot 2 = 1,18; a_{10} = \frac{a_{20} h_2}{l h_1} = \frac{1,18}{8} \cdot \frac{1}{2,5} = 0,059$$

Aus den Randverschiebungen  $a_{ik}$  sind die Verschiebungen  $b_{ik}$  des Fussringmittelkreises, den man sich mit dem Rand der Wandung durch eine starre Scheibe ver-

<sup>18)</sup> Es sei daran erinnert, dass die berechnete Biege-Zugbeanspruchung im Beton sich ungefähr doppelt so gross als die „wahre“ ergibt.

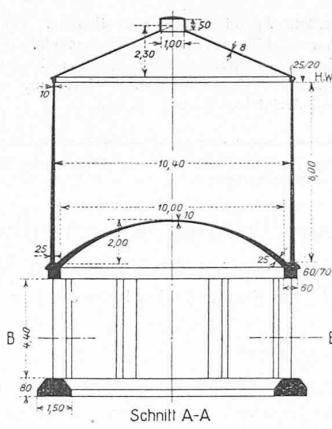


Abb. 8 Schnitt A-A

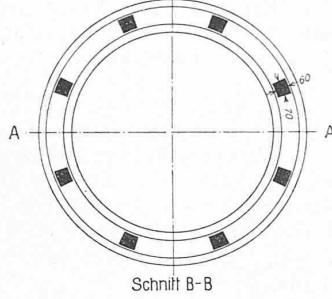


Abb. 8 Schnitt B-B

bunden denkt, zu berechnen. Bezeichnet man mit  $a$  den Vertikalabstand des Mittelkreises des Wandrandes vom Mittelkreis des Fussringes, so gelten die leicht ersichtlichen Formeln (Abb. 9).

$$\begin{aligned}b_{22} &= a_{22} + 2 \cdot a \cdot a_{12} + a^2 a_{11} \\ &= 0,36 + 2 \cdot 0,35 \cdot 0,418 + \\ &\quad + 0,35^2 \cdot 0,955 \\ &= 0,36 + 0,293 + 0,117 \\ &= 0,770\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{12} &= a_{12} + a \cdot a_{11} \\ &= 0,418 + 0,35 \cdot 0,955 \\ &= 0,752\end{aligned}$$

$$b_{11} = a_{11} = 0,955$$

Das Eigengewicht der Wand samt dem Kegeldach beträgt pro lfd. m 4,5 t; diese Vertikalkraft wird auf den Fussring mit einer Exzentrizität  $e = -0,1 \text{ m}$  übertragen.

Die Verschiebungen  $b_{20}$  und  $b_{10}$  ergeben sich also aus

$$b_{20} = a_{20} - 0,45 b_{12} = 1,18 - 0,45 \cdot 0,752 = +0,84$$

$$b_{10} = a_{10} - 0,45 b_{11} = 0,059 - 0,45 \cdot 0,955 = -0,37$$

#### Elastizitätsgleichungen.

$H$	$M$	Belastungglieder inf. Wasserdr. u. Eigengewicht	$v=1$	$\alpha=1$	Festverhältnisse
0,770	0,752	- 0,84	1	0	- 0,976
.	0,955	+ 0,37	0	1	
- 0,735		+ 0,82	- 0,976		
0,22		1,19			
	$M = + 5,41$		- 4,44	+ 4,55 tm	
	$H = - 6,36$		+ 5,64	- 4,44 t	

Das von  $v=1$ , bei unterdrückter Drehmöglichkeit, erzeugte Moment (-4,44) ergibt sich, wie es nach der dualen Form des Maxwell-Mohr'schen Reziprozitätsgesetzes auch sein muss, gleich gross wie die von  $\alpha=1$ , bei unterdrückter Verschiebungsmöglichkeit, erzeugte spezifische Schubkraft (da  $v$  und  $\alpha$  an der gleichen Stelle zur Wirkung gelangen, gilt hier das Maxwell'sche Gesetz).

#### 2. Randkräfte im Behälterboden:

Halbe Stützweite  $q = 5,00 \text{ m}$ ;  $f = 2,00$ ;  $h_1 = 0,25$ ;  $h_2 = 0,10 \text{ m}$

$$r = \frac{y^2 + f^2}{2f} = 7,25 \text{ m}; l = 7,25 \cdot 0,7614 = 5,52;$$

$$l_1 = \frac{l h_1}{h_2 - h_1} = 5,52 \frac{25}{15} = 9,20 \text{ m}$$

$$s_1 = 0,76 \sqrt{0,25 \cdot 7,25} = 1,02 \text{ m}, \frac{s_1^2}{2} = 0,52; \frac{s_1^3}{2} = 0,53; \frac{s_1^4}{4} = 0,270 \text{ m}$$

Nach Gleichung (36) ist:

$$\begin{aligned}w_1 &= 1 - 0,5 \frac{s}{r} \operatorname{ctg} \alpha - 1,25 \frac{s}{l_1} = 1 - 0,5 \cdot \frac{1,02}{7,25} \cdot \frac{5,25}{5} \\ &\quad - 1,25 \cdot \frac{1,02}{9,20} = \underline{0,7875}\end{aligned}$$

$$w_2 = 1 - 0,5 \frac{s}{r} \operatorname{ctg} \alpha - 0,25 \frac{s}{l_1} = \underline{0,8985}$$

$$a_{11} = \frac{1,02}{0,7875} = \underline{1,296}; a_{12} = \frac{s_2 \sin \alpha}{2 \omega_1} = \frac{0,52}{0,7875} \cdot \frac{5}{7,25} = \underline{0,455}$$

$$a_{22} = \frac{s^3}{2} \sin^2 \alpha \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0,53 \cdot 0,477 \cdot \frac{0,8985}{0,7875} = \underline{0,288}$$

Nach Gleichungen (40):

Vom Eigengewicht ( $\alpha_0 = \sim 45^\circ$ )

$$T_{10} = 7,25 \cdot 2 \left[ 0,625 \left( \frac{4}{3,14 \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 0,25 \left( 1 - \frac{4}{3,14 \sqrt{2}} \right) \right] = 2,13 \text{ t}$$

$$T_{20} = \frac{0,625 \cdot 7,25}{1,414} - 2,13 = 1,1 \text{ t}$$

Vom Wasserdruck nach Gleichungen (43):

$$T_{10} = \frac{7,25}{2} \left( 6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{17,75}{12,05} \right) = 25,2 \text{ t}$$

$$T_{20} = 7,25 \cdot 8 - 25,2 = 32,8 \text{ t}$$

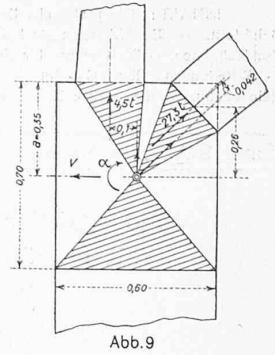


Abb. 9

Nach Gleichung (38):

$$a_{20} = -\frac{32,8 + 1,1}{7,25} \cdot 0,27 \cdot 0,69 = -0,871$$

Nach Gleichungen (39a), (40) und (42):

$$a_{10} = \frac{0,871}{9,20 \cdot 0,69} + 0,69 \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,625}{7,25} \right) 0,27 = 0,137 + 0,218 \\ = 0,355$$

$$b_{22} = a_{22} + 2 \alpha a_{12} + a^2 a_{11} \\ = 0,288 + 2 \cdot 0,26 \cdot 0,455 + 0,26 \cdot 1,296 = 0,612$$

$$b_{12} = a_{12} + \alpha a_{11} = 0,455 + 0,337 = 0,792$$

$$b_{11} = a_{11} = 1,296$$

Bei der Berechnung von  $b_{20}$  und  $b_{10}$  ist wieder zu berücksichtigen, dass die statisch bestimmte Randkraft

$$T_{10} = 25,2 + 2,1 = 27,3 \text{ t}$$

auf den Ring exzentrisch übertragen wird:

$$M_e = -27,3 \cdot 0,042 = -1,146 \text{ tm}$$

$$b_{20} = a_{20} + b_{12} M_e = -0,871 - 0,792 \cdot 1,146 = -1,779 \\ b_{10} = a_{10} + b_{11} M_e = 0,355 - 1,296 \cdot 1,146 = -1,129$$

$H$	$M$	Belastungsglieder	$v=1$	$\alpha=1$	Festverhältnisse
inf. Wasserdr.					
u. Eigengewicht					
0,612	0,792	1,779	1	0	-1,294
.	1,296	1,129	0	1	
-1,025	-2,300	-	-1,294		
+0,271	-1,171				
	$M = -4,32$		-4,775 + 3,69		
	$H = +8,5$		+9,08 - 4,775		

### 3. Randkräfte in den Säulen.

$v$  und  $\alpha$  seien zunächst die mit der Biegefestigkeit  $J_E$  der Säule vervielfachten Verschiebungsgrößen.

Die zu  $v=1$  und  $\alpha=1$  zugehörigen Festhaltungskräfte berechnen sich dann folgendermassen

$$a_{11} = l = 4,40; \quad a_{12} = \frac{l^2}{2} = 9,68; \quad a_{22} = \frac{l^3}{3} = 28,39$$

$$b_{22} = 28,39 + 2 \cdot 0,35 \cdot 4,40 + 0,35^2 \cdot 4,40 = 35,71$$

$$b_{12} = -(9,68 + 0,35 \cdot 4,40) = -11,22$$

$$b_{11} = a_{11} = 4,40$$

(man beachte, dass hier die gegenseitige Verschiebungsgröße das negative Vorzeichen aufweist)

$H$	$M$	$v=1$	$\alpha=1$
35,71	-11,22	1	0
.	4,40	0	1
	$M = +0,362$		+1,15
	$H = +0,142$		+0,362

Die gefundenen Werte sind mit

$$\frac{J_{\text{Säule}}}{J_c} \frac{8}{2 \pi r} = \frac{0,7 \cdot 0,6^3}{0,25^3} \cdot \frac{8}{2 \cdot 3,14 \cdot 5,21} = 2,37$$

zu vervielfachen, um die auf die Längeneinheit des Ringes bezogenen Erzeugungskräfte infolge der Einheiten der  $J_c E$  fachen Verschiebungsgrößen zu erhalten.

$$v=1 \quad \alpha=1 \\ M = 0,8575 \quad 2,725 \\ H = 0,337 \quad 0,8575$$

### 4. Erzeugungskräfte infolge $v=1, \alpha=1$ im Fussring.

Wir rechnen, genau genug, mit einem rechteckigen Querschnitt  $70 \cdot 60$

$$H = \frac{F}{r^2 J_c} = \frac{0,7 \cdot 0,6 \cdot 12}{0,25^3 \cdot 5,21^2} = +11,9 \text{ t}$$

$$M = \frac{J}{J_c r^2} = \frac{0,6 \cdot 0,70^3}{0,25 \cdot 5,21^2} = +0,485 \text{ tm}$$

### Verschiebungsgleichungen

$$C_{22} = \Sigma H \text{ in Folge } v=1 \\ = +5,64 + 9,08 + 0,337 + +11,9 = +26,96$$

$$C_{12} = \Sigma M \text{ in Folge } v=1 \\ = \Sigma H \text{ in Folge } \alpha=1$$

$$= -4,44 - 4,775 + 0,8575 = -8,357$$

$$C_{11} = \Sigma M \text{ in Folge } \alpha=1 \\ = +4,55 + 3,69 + 2,725 + 0,485 = +11,45$$

$C_{20} = \Sigma H$  im Hauptsystem der starr eingespannten Konstruktionsteile infolge der Belastungen

$$= 6,36 - 8,5 + 27,3 \cdot \frac{5,25}{7,25} = -2,14 + 19,76 = +17,62$$

$C_{10} = \Sigma M$  in Folge der Belastungen =  $-5,41 + 4,32 = -1,9$

$$\begin{array}{ccc} v & \alpha & \text{Belastungsglieder} \\ 26,96 & -8,357 & +17,62 \\ . & +11,45 & -1,09 \\ & | & | \\ & a = +0,493 & \\ & V = +0,806 & \end{array}$$

### Definitive Randkräfte.

#### 1) In der Wand:

$$H = -6,36 - 4,44 \cdot 0,493 + 5,64 \cdot 0,806 = -4 \text{ t}$$

$$M = +5,41 + 4,55 \cdot 0,493 - 4,44 \cdot 0,806 - 0,35 \cdot 4 \\ = +2,67 \text{ tm}$$

#### 2) im Boden:

$$H = +8,5 + 9,08 \cdot 0,806 - 4,775 \cdot 0,493 = +13,47 \text{ t}$$

$$M = -4,32 - 4,775 \cdot 0,806 + 3,69 \cdot 0,493 + 0,26 \cdot 13,47 - 1,146 = -4 \text{ tm}$$

#### 3) in den Säulen (Abstand 4,10):

$$H = (0,337 \cdot 0,806 + 0,8575 \cdot 0,493) \cdot 4,10 = 2,84 \text{ t}$$

$$M = (2,725 \cdot 0,493 + 0,8575 \cdot 0,806) \cdot 4,10 = 8,34 \text{ tm}$$

#### 4) auf den Ring wirkende Kräfte:

$$H = 0,806 \cdot 11,9 = 9,59 \text{ t}$$

$$M = 0,493 \cdot 0,485 = 0,24 \text{ tm}$$

$$\text{Probe} \quad \Sigma H = -4 + 13 \cdot 47 + \frac{2,84}{4,10} + 9,59 - 27,3 \cdot \frac{5,25}{7,25} \\ = 23,71 - 23,76 = \sim 0$$

Die durchgeföhrte, beim jetzigen Stand der praktischen Biegetheorie der Schalen als genau zu betrachtende Berechnung der elastisch unbestimmten Randkräfte ist in mancher Hinsicht aufschlussreich: Vor allem erbringt sie den Nachweis, dass man die Fussringe kreisrunder Behälter nach der bis jetzt gebräuchlichen Berechnung viel zu stark bewehrt. Nach ihr wäre die von der Belastung des Bodens schon allein herrührende Zugkraft im Ring

$$Z = r T_{10} \cos \alpha = 5,21 \cdot 19,76 = \sim 103 \text{ t}, \quad \text{während die Berücksichtigung der elastischen Deformation}$$

$$Z = 5,21 \cdot 9,59 = \sim 50 \text{ t},$$

also eine weniger wie halb so starke Bewehrung ergibt.

Der Einwand, den man machen könnte, dass der Beton des Zugringes reißt und bei der Erschliessung der statischen Unbestimmtheit nicht berücksichtigt werden darf, wird durch die auftretende Betonzugspannung

$$\sigma_{bz} = \frac{50}{0,6 \cdot 0,7} \cdot 0,1 = 11,9 \text{ kg/cm}^2,$$

die unterhalb der Zugfestigkeit eines richtig dosierten Beton 1:2:4 liegt, widerlegt (der Zementgehalt wird bei Flüssigkeitsbehältern eher noch reichlicher gewählt). Anderseits werden, infolge der elastischen Nachgiebigkeit des Behälters, die Säulen durch Biegemomente beansprucht (8,34 tm), die man keineswegs vernachlässigen darf.

Man muss sich dabei vergegenwärtigen, dass die in Frage kommenden elastischen Deformationen, die eine so starke Änderung des Kräftespiels in den Randzonen bedingen, überaus klein und etwa von der Größenordnung  $10^{-1}$  der bei Stabtragwerken auftretenden entsprechenden Deformationen sind. In unserm Fall findet man z.B. für die wahren Werte von  $v$  und  $\alpha$

$$v = \frac{0,806}{J_c E} = \frac{0,806 \cdot 12}{0,25^3 \cdot 2 \cdot 10^6} \cdot 10^3 = \sim 0,31 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{0,493 \cdot 12}{0,25^3 \cdot 2 \cdot 10^6} \cdot \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{3,14} = 39''$$

Die Kurve der Meridianbiegemomente in Funktion von  $\varphi = \frac{x}{s}$  ( $x$  = vom Rand weg gemessene Meridianbogenlänge) infolge der gefundenen statisch unbestimmten Randkräfte errechnet sich wieder, sowohl für die zylindrische Wand als auch den Kugelboden, etwas zu ungünstig, mit Hilfe der mehrmals erwähnten Zimmermann'schen Tafel, aus

$$\begin{aligned}G_1 &= Me^{-\varphi} \cos \varphi + (M - Ns) e^{-\varphi} \sin \varphi \\&= M \eta_1 + (M - Ns) \eta_2\end{aligned}$$

Bei der Zylinderschale ist für die Querkraft  $N = H$  und beim Kugelboden (auch Kegeldach)  $N = H \sin \alpha$  zu setzen.

Ausser den Meridianbiegemomenten sind auch die Ringkräfte  $T_2$  infolge der Randkräfte  $M$  und  $H$  zu bestimmen. Man findet aus dem für die Zylinderschale strengen und für die Kugel- und Kegelschale meistens genügend genauen Ansatz

$$G_1'' = \frac{T_2}{r} \quad (T_1 = 0)$$

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{s^2}{r} [Me^{-\varphi} \sin \varphi - (M - Ns) e^{-\varphi} \cos \varphi] = \\&= \frac{s^2}{r} [M \eta_2 - (M - Ns) \eta_1]\end{aligned}$$

Die Uebereinanderlagerung der  $T_2$  und der  $T_{20}$  ergibt die zur Bemessung der Ringbewehrung massgebenden Ringzugkräfte.

Die grössten Betondruckspannungen ergeben sich am Kämpfer aus

$$\sigma_1 = \frac{T_{10}}{h} + 6 \frac{G_1}{h^2}$$

Es kann auf die weitere, durch obige Angabe vollständig klar gelegte Zahlenrechnung verzichtet werden.

Es sei nur bemerkt, dass eine Verstärkung des Bodens am Kämpfer, in unserem Beispiel, etwa auf 30 cm, als angezeigt erscheint.

#### B. Oberer Rand.

Die genaue Berechnung kann auf gleiche Weise wie am untern Rand geschehen; nur genügt es hier, bei den geringen Querschnittsabmessungen des Ringes, unmittelbar mit den  $a_{ik}$  und  $a_{ko}$  an Stelle der  $b_{ik}$  und  $b_{ko}$  zu rechnen. Die Zahlenrechnung bietet also hier nichts neues und sei weggelassen. Da es sich übrigens bei den als Dächer verwendeten Schalen nur um ganz kleine Zwängungs Kräfte handelt, können diese auch für den ungünstigsten Fall vollkommener Einspannung berechnet werden.

Mit  $r = 12,84$  m;  $h = 0,08$  m;  $s = 0,769$ ;  $s^2 = 0,592$  findet man nach den angenäherten Formeln, z. B. für Eigengewicht (51 a)

$$M = -g \frac{s^2}{2} \cos \alpha = -0,2 \cdot \frac{0,592}{2} \cdot \frac{11,74}{12,84} = 0,0541 \text{ tm}$$

$$H = g s \operatorname{ctg} \alpha = 0,2 \cdot 0,769 \cdot \frac{11,74}{5,20} = +347 \text{ kg/m}$$

Man übersehe nicht, dass es sich hier nur um den statisch unbestimmten Ergänzungsschub handelt.

#### SCHLUSSWORT.

Mit der vorliegenden Arbeit ist die angenäherte Biegetheorie der bei Behälter und Kuppelbauten zur Anwendung gelangenden monolithischen Verbindungen von Rotationsschalen zu einem gewissen Abschluss gebracht, so weit es sich um stetig verteilt und polarsymmetrisch belastete, an den Randkreisen vertikal unverschieblich gelagerte Schalen handelt.

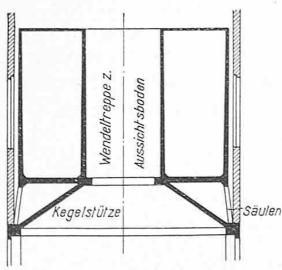


Abb. 10

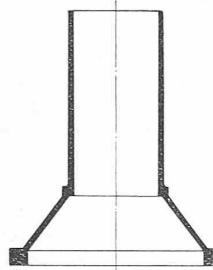


Abb. 11

Die nicht seltenen Fälle der an zwei Randkreisen in vertikaler Richtung unverschieblich gelagerten kurzen Schalen sind zwar nicht untersucht worden. Doch sind die Biegekräfte in solchen Schalen gewöhnlich sehr klein und sie

können, nötigenfalls, angenähert ermittelt werden mit der vollständigen Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{s^4}{4} G_1^{IV} + G_1 = 0$$

Eine besondere Behandlung verlangen die beidseitig offenen Schalen, die eine über einen Randkreis gleichförmig verteilte aktive Vertikalbelastung tragen und gleichzeitig an den Rändern an der freien Bewegungsmöglichkeit gehindert sind.

Dieser Fall ist sehr häufig: Er tritt nach Abb. 10 und 11 bei Kuppen mit monolithisch verbundenen Laternenaufstätzen, bei Kühltürmen, bei Ringbehältern mit Kegelstützen u. s. f. auf.

Zu seiner Erledigung sind die zur Vertikalbelastung gehörenden Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen nach Abbildung 12 zu ermitteln. Angenäherte Werte für diese Einflusszahlen lassen sich ebenfalls, mit verhältnismässig wenig Mühe, berechnen, worüber wir uns eine besondere Arbeit vorbehalten.

#### Schaffhausen als Industriestadt.

Vortrag, gehalten an der G. E. P.-Versammlung 1927 in Schaffhausen von H. KÄSER, Ing.

(Schluss von Seite 246.)

Ich fürchte Sie zu ermüden, wenn ich auch in knappester Form alle in Schaffhausen und Umgebung niedergelassenen Industrien besprechen wollte; ich begnügen mich damit, Ihnen noch einige davon aufzuzählen, um deren Mannigfaltigkeit zu zeigen. Da haben wir die bekannte Polsternägel- und Metallwarenfabrik Bürgin & Cie.; die Baumwollzwirnerei von Hermann Frey, die Erstellerin des vielbenützten Gloragarnes. Die Schaffhauser Tuchfabrik liefert Stoffe u. a. für unsere Armee. Die Firma Carl Maier erstellt elektrische Apparate und baut ganze Verteilanlagen für die S. B. B., wie wir sie da und dort längs der Bahnlinien als ungewohnte Gebilde erstaunt betrachten. Ein altes, weit herum bekanntes Unternehmen ist auch die Schweizerische Seil-Industrie vormals C. Oechslin zum Mandelbaum; sie lieferte schon Heinrich Moser die Drahtseile für die Transmissionen des Schaffhauser Kraftwerkes. Wenn Sie irgendwo in der Schweiz, in einer Konditorei, bei einem Metzger oder Coiffeur eine schöne Laden- oder Schaufenster-Einrichtung sehen, so dürfen Sie sich daran erinnern, dass die Glas-Manufaktur A.-G. Schaffhausen in dieser Branche führend ist. Die Schaffhauser Strickmaschinenfabrik verschickt ihre sinnreich ausgedachten Maschinen nach allen europäischen Staaten. Auf dem Bureau des Architekten und Ingenieurs bis nach China und Australien findet man Masstäbe, Zeichenutensilien, Messlatten usw. der Masstabfabrik Schaffhausen A.-G. Gut verankert in unserem jassfreudigen Vaterland ist die Spielkartenfabrik J. Müller & Cie. Zu erwähnen sind auch die Portlandzementwerke, die Ziegel- und die Knorr'sche Lebensmittelfabrik in Thayngen, und auf der andern Seite des Rheines liegen in unserer Nachbarschaft die Ziegelei Paradies und die grosse Bindfadenfabrik. Die schöne Konservenfabrik in Hallau brachte erwünschten Verdienst in jene Gegend. Noch ist meine Aufzählung nicht vollständig, von dem entwickelten Gewerbe und Kleinhandwerk gar nicht zu sprechen. Selbstverständlich haben wir auch eine grosse Brauerei, deren vorzügliches Falkenbier Sie wohl noch kennen lernen werden.

Für den Schluss habe ich mir aber unser grösstes Industrie-Unternehmen aufgespart, die A.-G. der Eisen- und Stahlwerke vorm. Georg Fischer, mit denen unsere Stadt durch zahlreiche Beziehungen auf das engste verbunden ist. Wir haben bereits gehört, dass der Enkel des Gründers der Stahlwerke in den fünfziger Jahren dem darniederliegenden Unternehmen durch die Einführung des Weichguss-Verfahrens, insbesondere der schmiedbaren Rohrverbindungsstücke, neuen Impuls zu geben vermochte. Die Beleg-