Band 90. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 1

Berechnung der Eigenfrequenzen von Dampfturbinenschaufeln.

Von Dr. E. JAQUET, Dipl. Masch.-Ing., Pilsen.

Die Schwingungen der Laufschaufeln gehören zu den unangenehmsten Erscheinungen im Dampfturbinenbau und können, wie bekannt, zu verheerenden Folgen führen. Die Kanäle der Leitapparate sind durch mehr oder weniger starke Stege von einander getrennt, sodass die Schaufel durch einen „zerhackten" Dampfstrom saust, der eine erzwungene Schwingung hervorruft. Besteht nun Resonanz zwischen der Eigenfrequenz der Laufschaufel und der Frequenz dieser Impulse, so kann bei ungenügender Dämpfung ein Ermüdungsbruch eintreten. Ueber die Art der Dämpfung sind schon verschiedene Ansätze gemacht worden, die aber noch nicht zu voller Befriedigung geführt haben. Um den Schwingungen tunlichst aus dem Wege zu gehen, trachtet man am besten danach, die erregende Kraft klein zu machen, was durch dünne Leitstege (gefräste statt gegossene Düsen) erreicht werden kann, sodass der auftretende Dampfstrom kontinuierlicher wird. Ferner wird es angeraten sein, Resonanzgebiete möglichst zu vermeiden. In der vorliegenden Arbeit sollen nun einige Methoden zur Berechnung der Eigenfrequenzen besprochen und für Spezialfälle ein Verfahren zu deren leichter Ermittlung angegeben werden.

Es sind dafür drei verschiedene Methoden gebräuchlich: eine analytische, eine graphische und eine gemischte.

Die *analytische Methode,* nach den Ansätzen von Rayleigh [1]), ist überall da anwendbar, wo wir es mit zylindrischen Schaufeln (Querschnitt und Trägheitsmoment = konstant) aus homogenem Material zu tun haben [2]).

Die *graphische Methode* [3]) geht ebenfalls auf Rayleigh zurück. Sie ist die einzige, mit der man auch verjüngte Schaufeln (Querschnitt und Trägheitsmoment = variabel), mit oder ohne Bandage, behandeln kann. Sie ist somit die allgemeinste Methode, nur leider etwas umständlich, besonders bei den Oberschwingungen, wo das Verfahren nicht mehr konvergent [4]) ist, und wo man sich mit Probieren oder Superposition mehrerer Schwingungen aushelfen muss. Diese beiden ersten Methoden sind hinreichend bekannt und sollen daher nicht weiter besprochen werden.

Die *gemischte Methode,* eine graphisch-analytische Interpolationsmethode wird mit Vorteil verwendet für zylindrische Schaufeln mit einer Einzelmasse am freien Ende. Es gibt Firmen [5]), die die Bandage so ausführen, dass sie die radiale Abdeckung des Schaufelkanals jeweilen mit der betreffenden Schaufel aus einem Stück herstellen, wodurch das Aufnieten der Bandagebleche entfällt. Die weitern Rechnungen befassen sich ausschliesslich mit solchen Schaufeln, die am Fusse eingespannt sind und am freien Ende eine Einzelmasse tragen [6]).

Es bezeichne:

l	die Länge der Schaufel
m_1	die Masse der Schaufel pro Längeneinheit
J	das Trägheitsmoment
E	den Elastizitätsmodul
$m_S = m_1\,l$	die Masse der Schaufel
m_D	die Masse der Deckplatte
$n = \lambda/2\pi$	die Frequenz.

Legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, dass der Ursprung mit der Einspannungsstelle, die x-Richtung mit der Schaufelaxe zusammenfällt. Die Querschwingung möge in der x-y-Ebene stattfinden. Für die Form der elastischen Linie lässt sich dann der folgende Ausdruck schreiben:

$$y = [a\,e^{\varkappa x} + a'\,e^{-\varkappa x} + b\cos\varkappa x + b'\sin\varkappa x]\cos\lambda t \quad (1)$$

wobei t die Zeit bedeutet und $\varkappa$ eine Abkürzung für

$$\varkappa = \left(\frac{m_1\lambda^2}{JE}\right)^{1/4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Koeffizienten a, a', b, b' bestimmen sich aus den Randbedingungen:

$$1.\ \text{für } x = 0{:}\quad y = y' = 0\ ^{7)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$2.\ \text{für } x = l{:}\quad y'' = 0 \text{ d. h. Moment} = 0 \quad . \quad (4)$$

Ferner ist am freien Ende eine Schubkraft vorhanden, von der Trägheit der Deckplatte herrührend, sodass

$$m_D\,\ddot{y} = JE\,y''' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

nach einigen Zwischenrechnungen erhält man für die Masse m_D der Deckplatte den Ausdruck:

$$m_D = \frac{2 + \cos\varkappa l\,(e^{\varkappa l} + e^{-\varkappa l})}{A\left[e^{\varkappa l}(\sin\varkappa l - \cos\varkappa l) + e^{-\varkappa l}(\sin\varkappa l + \cos\varkappa l)\right]} \quad (6)$$

wobei

$$A = \lambda^2/JE\varkappa^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Aus den bekannten Grössen λ zu berechnen ist ziemlich umständlich. Es führt rascher zum Ziel, wenn man einige λ annimmt und m_D berechnet. Durch graphische Interpolation findet man beim wahren Wert von m_D den zugehörigen Wert von λ.

Allein auch diese Rechnung nimmt viel Zeit in Anspruch und bietet dem Ungeübten einige Schwierigkeit in der vernünftigen Wahl der Werte von λ. Bei der Vielstufigkeit der modernen Turbinen wäre es erwünscht, Formeln oder Kurven zu besitzen, die ein rasches und sicheres Auffinden der Schwingungszahlen gestatten.

Die Masse m_D bewirkt, dass die Frequenz des Grundtones und der Obertöne herabgesetzt wird, verglichen mit der Schaufel ohne Einzelmasse. Der Grundton n_0 der Schaufel ohne Deckel ist gegeben durch [8])

$$n_0 = 0{,}56\left(\frac{JE}{m_1\,l^4}\right)^{1/2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

die folgenden Obertöne n_1 und n_2 stehen im Verhältnis

$$n_0 : n_1 : n_2 = 1 : 6{,}3 : 17{,}5 \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Wir wollen nun untersuchen, um wieviel diese Frequenzen herabgesetzt werden bei einem beliebigen Massenverhältnis α = Masse der Deckplatte : Masse der Schaufel. Setzen wir in den Ausdruck (8) $\varkappa\lambda = \xi$ ein, so finden wir

$$\alpha = \frac{m_D}{m_S} = \frac{2 + \cos\xi\,(e^{\xi} + e^{-\xi})}{\xi\left[e^{\xi}(\sin\xi - \cos\xi) + e^{-\xi}(\sin\xi + \cos\xi)\right]} \quad (10)$$

Diskussion dieser Gleichung $\alpha = f(\xi)$.

a) Die Nullstellen:

$$0 = 1 + \cos\xi\,\frac{(e^{\xi} + e^{-\xi})}{2} = 1 + \cos\xi\cosh\xi \quad (11)$$

Dies ist die bekannte Periodengleichung für den Stab ohne Einzelmasse. Die Lösungen [9]) dazu hat schon Rayleigh angegeben:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= 0{,}597\,\pi \\ \xi_2 &= 1{,}494\,\pi \sim {}^3/_2\,\pi \\ \xi_3 &= {}^5/_2\,\pi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

---

1) J. W. Rayleigh, „Theorie des Schalles".

2) Siehe z. B. W. Hort, „Technische Schwingungslehre", § 90, sowie „Zeitschrift für technische Physik", 1925, Nr. 6, Seite 216, wo erzwungene Schwingungen mit Hilfe von sogen. Normalfunktionen behandelt werden.

3) Siehe z. B. Stodola, „Dampf- und Gasturbinen", V. Aufl., S. 946.

4) Aehnlich wie bei den kritischen Drehzahlen der Wellen, siehe Stodola, l. c. Seite 386.

5) Z. B. die A.-G. vormals Skodawerke in Pilsen.

6) Das selbe Problem behandelt W. Hort in anderer Form. Vergl. „Technische Schwingungslehre", 2. Auflage, Seite 458.

7) Striche bedeuten Ableitung nach der Länge x, Punkte nach der Zeit.

8) Siehe z. B. Stodola, l. c., Seite 296,

9) Siehe z. B. Hort, l. c, Seite 458.