Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 89/90 (1927)
Heft: 23

Inhaltsverzeichnis

Band 89. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 23**

Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons.

Von Prof. Dr.-Ing. OTTO FÖPPL, Braunschweig.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe, die Eigenschwingungszahl eines gespannten Seiles zu berechnen, das mit mehreren Lasten behaftet ist. Der gleiche Weg, der hier zur Lösung führt, kann auch zur Berechnung der Eigenschwingungszahl einer Zug- und Druckfeder eingeschlagen werden, die mit aufgesetzten Massen behaftet ist, oder einer Welle, die Schwungmassen trägt. Der folgenden Betrachtung wohnt deshalb weitergehende Bedeutung inne, als es nach den zuerst folgenden Ausführungen scheinen mag.

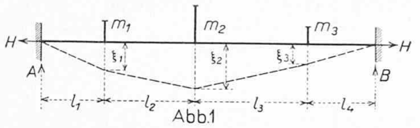

Abb. 1

Wir beziehen uns auf Abbildung 1, in der ein mit der Kraft H gespanntes Drahtseil mit den Massen m_1, m_2 ... dargestellt ist. Das Eigengewicht des Drahtseils wird vernachlässigt. Das Drahtseil mit den Lasten kann Schwingungen senkrecht zur Axe ausführen, deren Ausschläge ξ_1, ξ_2 ... klein sein sollen gegenüber den Abständen l_1, l_2 ... zwischen den einzelnen Massen. Auf jede Masse m werden durch das Seil Kräfte von beiden Seiten her übertragen. Die wagrechten Kraftkomponenten sind in erster Annäherung gleich H; sie heben sich für jede Masse heraus. In lotrechter Richtung wirkt auf die Masse m_n von links die Komponente $-\,H\,\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l_n}$ und von rechts $+\,H\,\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_{n+1}}$; das negative Vorzeichen gibt an, dass die Masse m_n durch die Kraft nach der Nullage zu beschleunigt wird. Es ist also:

$$m_n\,\frac{d^2\,\xi_n}{dt^2} = -\,H\left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l_n} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Gleichung (1) und die entsprechenden Gleichungen für die übrigen Massen haben bei s Massen s Lösungen. Von Interesse ist gewöhnlich nur die Lösung I. Ordnung. Um sie zu finden, muss eine Gleichung von s^{ten} Grad gelöst werden, was bei $s > 3$ erhebliche Schwierigkeiten verursacht. Die Lösung von der I. Ordnung kann aber in angenäherter Weise auch gefunden werden, wenn die ungefähre Form, nach der das gespannte Drahtseil schwingt, bekannt ist, und darauf bauen die nachfolgenden Ausführungen auf.

Wir stützen uns auf den Aufsatz des Verfassers: „Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle, die mit mehreren Massen behaftet ist", in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" Jahrgang 1927, Heft 1, wo die Biegungsschwingungszahl einer mit Einzellasten behafteten Welle mit Hilfe des Impulssatzes angenähert bestimmt worden ist. Wir bezeichnen mit ξ_{01}, ξ_{02} ... die Grösstausschläge, die bei der Schwingung auftreten, und setzen den Ausschlag ξ_n zur Zeit t gleich $c\;\xi_{on}$. Der Koeffizient c ist nur von der Zeit abhängig; er hat also für alle Ausschläge zu einer bestimmten Zeit gleiche Grösse. Wenn n_I die minutliche Schwingungsdauer I. Ordnung und $\omega_I = \frac{2\,\pi\,n_I}{60}$ die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung ist, können wir $c = \cos\,\omega_I\,t$ setzen.

Mit A und B bezeichnen wir die beiden durch die Festpunkte übertragenen Kräfte in lotrechter Richtung, die bei der Schwingung auftreten; es ist also

$$A = H\,\frac{\xi_1}{l_1} = H\,\frac{\xi_{01}}{l_1}\,\cos\,\omega_I\,t$$

und

$$B = H\,\frac{\xi_s}{l_{s+1}} = H\,\frac{\xi_{os}}{l_{s+1}}\,\cos\,\omega_I\,t$$

Nach der dynamischen Grundgleichung ist ferner die Summe der äussern Kräfte in lotrechter Richtung gleich der Summe der Massen multipliziert mit ihren Beschleunigungen in dieser Richtung:

$$A + B = \sum_{n=0}^{n=s} m_n\,\frac{d^2\,\xi_n}{dt^2} = -\,\omega_I{}^2\,\cos\,\omega\,t \sum m_n\,\xi_{on} \quad . \quad (2)$$

Das Summenzeichen ist über die sämtlichen Massen zu erstrecken, die auf dem schwingenden Drahtseil sitzen. Der grösste Ausschlag ist zur Zeit $t = 0$ vorhanden; dann ist:

$$A_0 + B_0 = -\,\omega_I{}^2 \sum m_n\,\xi_{on} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Gleichung (3) gilt für die Schwingungslinie. Wir vergleichen sie mit einer entsprechenden Gleichung, die für die statische Seillinie aufgestellt ist und die angibt, dass das Gewicht $m\,g$ der Massen m von den beiden Festpunkten aus getragen wird:

$$A + B = -\,g \sum m_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wir finden, dass beide Gleichungen, abgesehen von einem Faktor, den wir $p = \frac{a\,\omega_I{}^2}{g}$ nennen wollen, dadurch von einander verschieden sind, dass unter dem einen Summenzeichen die Massen und unter dem andern die Massen m multipliziert mit den Durchbiegungen ξ_0 in der Nullage auftreten. Wir können deshalb sagen, „die Schwingungskurve ist jene Seilkurve, die entsteht, wenn man das Seil statt durch die Massen m durch die Massen multipliziert mit den Grösstdurchbiegungen belastet". Wir setzen deshalb im nachfolgenden statt der Massen m fingierte Massen $\varkappa\,m\,\xi_0$ ein. Damit die fingierten Massen auch wirklich die Dimension von Massen haben, muss der Faktor $\varkappa$ die Dimension cm^{-1} haben. Wir werden sehen, dass $\varkappa$ bei der Aufstellung der Gleichung für die Schwingungsdauer herausfällt.

Die Grössen der einzelnen Werte ξ_0 sind uns nicht bekannt. Wir kennen aber die Senkungen ξ_G, die die Massen durch elastisches Nachgeben des Seils unter ihrem Eigengewicht erfahren. Für die angenäherte Berechnung nehmen wir an, ξ_0 sei gleich ξ_G und die fingierten Massen infolgedessen $\varkappa\,m\,\xi_G$. Den fingierten Massen entsprechen lotrechte Seilzüge an den beiden Festpunkten:

$$A_G' + B_G' = g\,\varkappa \sum m\,\xi_G \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wenn die Schwingungskurve in der Endlage gleich der Seilkurve ist, gibt Gleichung (5) auch die bei der Schwingung in der Totlage von aussen auf das System übertragene lotrechte Kraft an. Die Werte in einer Zwischenlage zur Zeit t erhalten wir wieder durch Multiplikation der rechten Seite von Gleichung (5) mit $c = \cos\,\omega_I\,t$:

$$A + B = g\,\varkappa\,\cos\,\omega_I\,t \sum m\,\xi_G \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir betrachten nun den Schwingungsvorgang von der Zeit $t = 0$, zu der die Massen in der äussersten Schwingungslage sind, bis zur Zeit $t = t_a = \frac{T_I}{4} = \frac{2\,\pi}{4\,\omega_I}$ des Durchganges der Massen durch die Mittellage. Mit T_I ist die Schwingungsdauer I. Ordnung in Sekunden bezeichnet,