

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89/90 (1927)  
**Heft:** 15

**Artikel:** Wärmeübergang in Grenzschichten bei stark veränderlicher Grundströmung  
**Autor:** Stodola, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41677>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Wärmeübergang in Grenzschichten bei veränderlicher Grundströmung. — Zum Wettbewerb für die Peterschule Basel. — II. Wettbewerb für die Bezirksschule Lenzburg. — + Frédéric Broillet. — Mitteilungen: Raumersparungen durch Saugschwellen in Wasserschlosskammern. Eine Fachtagung „Dauerbruch“. Forschungsinstitut für Wasserbau und Wasserkraft am Walchensee. Schiffahrt auf dem Oberrhein. Beteiligung von Schweizer Architekten an der Ausstellung des Deut-

schen Werkbundes „Die Wohnung“. Einmännige Bedienung elektrischer Lokomotiven bei den S.B. Neuzzeitliches Hüttenkraftwerk. Schweizer Mustermesse. Soldatenstube in Bellinzona. Neues Postgebäude in Biel. Berufung. Verband Deutscher Elektrotechniker. — Wettbewerbe: Völkerbundgebäude Genf. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizer. Ingenieur- und Architekten-Verein. Basler Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. Sektion Bern.

## Wärmeübergang in Grenzschichten bei stark veränderlicher Grundströmung.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Im Anschluss an unsern Aufsatz über den Wärme-Uebergang bei unveränderlicher Grundströmung, in der „Schweizer. Bauzeitung“ vom 30. Oktober 1926, wobei ausserhalb der Grenzschichte neben der Geschwindigkeit auch die Temperatur stets gleich bleibt, dehnen wir hier die Theorie auf den Fall stark veränderlicher Grundgeschwindigkeit und Temperatur aus, wie sie etwa in Expansionsdüsen auftreten. In den Bezeichnungen jenes als bekannt vorausgesetzten Aufsatzes lauten die hydrodynamischen Gleichungen bei stets gleichem Rauminhalt für zweidimensionale Strömung (mit fortlaufender Numerierung der Gleichungen)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \dots \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (37)$$

Für die Grundströmung darf man in der Nähe der Wand die Geschwindigkeit  $v$  vernachlässigen, erhält also

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \quad (38)$$

wobei wir  $U, \partial U / \partial x = U'$  als gegebene Funktionen von  $x$  ansehen dürfen, und  $(1/\varrho) (\partial p / \partial x)$  in (36) durch  $UU'$  ersetzen. Als einfachste empirische Annahme über den Geschwindigkeitsverlauf senkrecht zur Wand wählen wir wieder

$$u = U \left( \frac{y}{\Delta} \right)^{1/7} = U \eta^{1/7} \quad \dots \quad (39)$$

obwohl die Rechnung auch mit einem allgemeineren Ansatz leicht durchführbar wäre. Gl. (37) liefert

$$v = - \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \int \left[ U' \eta^{1/7} - U \frac{\eta}{7} \frac{\Delta'}{\Delta} \right] \Delta d\eta \quad \dots \quad (40)$$

mit  $\Delta' = \partial \Delta / \partial x$

Die Einschiebung von  $v$  in (36) erlaubt nach Erweiterung mit  $dy$ ,  $\tau/\varrho$  durch Integration als:

$$\frac{\tau}{\varrho} = - \int UU' \Delta d\eta + \int \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \quad \dots \quad (41)$$

$= - UU' \Delta \eta + \frac{49}{72} UU' \Delta \eta^{9/7} - \frac{7}{72} U^2 \Delta' \eta^{9/7} + C$

darzustellen. Die Konstante wird durch die Bedingung bestimmt, dass für

$$\eta = 1; \tau = 0$$

werden müsse. Für  $\eta = 0$  erhalten wir alsdann die Schubspannung an der Wand, die mit  $\tau_w$  bezeichnet werden soll.

Es ergibt sich

$$\tau_w / \varrho = C = \frac{23}{72} UU' \Delta + \frac{7}{72} U^2 \Delta' \quad \dots \quad (42)$$

also ist

$$\frac{\tau}{\varrho} = \Delta UU' \left[ (1 - \eta) - \frac{49}{72} (1 - \eta^{9/7}) \right] + \frac{7}{72} U^2 \Delta' (1 - \eta^{9/7}) \quad (43)$$

Die hier vorkommende Grösse  $\Delta'$  wird durch die Differentialgleichung der Schichtdicke mit  $\tau_w$  verknüpft. Diese lautet für Beharrungsströmung

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \varrho u^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int \varrho u dy = + \Delta UU' \varrho - \tau_w \quad (44)$$

oder mit Gl. (39)

$$\frac{7}{9} \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \Delta \varrho) - \frac{7}{8} U \frac{\partial}{\partial x} (U \varrho \Delta) = \Delta UU' \varrho - \tau_w$$

hieraus folgt:

$$\Delta' = - \frac{23}{7} \frac{UU'}{U} \Delta + \frac{72}{7} \frac{\tau_w}{\varrho U^2} \quad \dots \quad (45)$$

Nun schieben wir  $\Delta'$  in Gl. (43) ein, was auf

$$\frac{\tau}{\varrho} = - UU' \Delta \left[ \eta (1 - \eta^{2/7}) \right] + \frac{\tau_w}{\varrho} (1 - \eta^{9/7}) \quad (46)$$

führt. Der tatsächliche Wert von  $\tau_w$  kann weder aus Gl. (41) noch aus (45) ermittelt werden. Für den Fall beschleunigungsfreier Strömung ist  $\tau_w$  durch die Formel von Prandtl-Kármán gegeben. Würde man annehmen, dass auch bei beschleunigter Strömung, d. h.  $U' > 0$ , der gleiche Ausdruck für  $\tau_w$  gilt, so führt Gl. (46) bei hinreichend grossem  $U'$  wie ersichtlich für Zwischenwerte von  $\eta$  auf negative Werte von  $\tau$ . Da jedoch die Geschwindigkeit in der Grenzschichte unter allen Umständen vom Werte Null an der Wand in stetiger Weise zunimmt (auch wenn man ein allgemeineres Gesetz als Gl. (39) voraussetzt) ist ein Negativwerden, d. h. ein Zeichenwechsel der Schubspannung physikalisch ausgeschlossen. So zwingt uns die Anschauung die Folgerung auf, dass  $\tau_w$  von dem bis anhin allgemein benützten klassischen Wert abweichen u. zw. so gross werden muss, dass  $\tau$  in Gl. (46) stets einen positiven Wert erhalte. Diese Vorschrift scheint mit einer Willkür behaftet zu sein, die jedoch verschwindet, wenn man beachtet, dass bei abnehmendem  $U'$  das  $\tau_w$  allmählich in den klassischen Wert übergehen muss. Wie man aus einer graphischen Darstellung erkennt, bleibt  $\tau$  positiv, sofern die Tangente an  $\tau$  im Punkte  $\eta = 1$  negativ ist. Man erhält

$$\left( \frac{d(\tau/\varrho)}{d\eta} \right)_{\eta=1} = + \frac{2}{7} UU' \Delta - \frac{9}{7} \frac{\tau_w}{\varrho} \text{ soll } < 0$$

$$\text{oder } \tau_w / \varrho > \frac{2}{9} UU' \Delta$$

Setzen wir also

$$\tau_w = \frac{2}{9} UU' \Delta \varrho + f(U, \varrho, v, \Delta) \quad \dots \quad (46a)$$

so muss für  $U' = 0$  das Zusatzglied in den klassischen Ausdruck übergehen, d. h. es ist

$$f(U, \varrho, v, \Delta) = \psi \varrho U^2 \left( \frac{v}{U \Delta} \right)^{1/4} = \tau_o \quad \dots \quad (47)$$

Somit lautet der vollständige Ausdruck von (46)

$$\tau = - UU' \Delta \varrho \left[ \eta (1 - \eta^{2/7}) - \frac{2}{9} (1 - \eta^{9/7}) \right] + \tau_o (1 - \eta^{9/7}) \quad \dots \quad (48)$$

in welchem bemerkenswerter Weise nichts Willkürliches mehr vorkommt.

Ferner wird Gl. (45)

$$\Delta' = - \frac{U'}{U} \Delta + \frac{72}{7} \frac{\tau_o}{\varrho U^2} \quad \dots \quad (48a)$$

Für den Fall, dass als Geschwindigkeitsgesetz der allgemeine Ansatz

$$u = U \eta^{\frac{1}{7}} \quad \dots \quad (48b)$$

gewählt würde, ergeben die gleichen Ueberlegungen als Ausdruck der Schubspannung

$$\tau = - UU' \Delta \varrho \left[ \eta \left( 1 - \eta^{\frac{2}{7}} \right) - \frac{2}{2+n} \left( 1 - \eta^{\frac{2+n}{7}} \right) \right] + \tau_o \left( 1 - \eta^{\frac{2+n}{7}} \right) \quad \dots \quad (48c)$$

Dabei liefert die von Kármánsche Dimensionsbetrachtung

$$\tau_o = B^{-\frac{2n}{n+1}} \varrho U^2 \left( \frac{v}{U \Delta} \right)^{\frac{2}{n+1}} \quad \dots \quad (48d)$$

worin die Konstante  $B$  aus Versuchen abzuleiten wäre.

Differentialgleichung des Temperaturverlaufes.

Der Temperaturverlauf bestimmt die Wärmeleitung, die in der Wärmegleichung zum Vorschein kommt. Auf die Raumeinheit bezogen erhalten wir wie früher

$$dq_{\text{leit}} + dq_{\text{reib}} = \gamma c_v dT + A p \frac{dv}{v} \quad \dots \quad (49)$$

worin  $v$  den Rauminhalt pro 1 kg bedeutet.

Mit  $\varrho = \text{unveränderlich}$  fällt das Glied  $A \rho d\vartheta/d\eta$  dahin, und wir dürfen bei vollkommener Unzusammendrückbarkeit  $c_p$  mit  $c_p$  vertauschen.

Die **Leitungswärme** besteht einerseits aus der zur Wand senkrechten turbulenten Strömung in Richtung von  $+y$  (für die Zeit und Flächeneinheit)

$$q_y = -\frac{\gamma}{\varrho} c_p \tau \frac{\partial \vartheta / \partial y}{\partial u / \partial y} \quad \dots \quad (50)$$

Da wir in der  $x$ -Richtung stark veränderliche Temperatur zulassen, tritt jedoch Gleichung:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad \dots \quad (51)$$

hinzu. Die Vermehrung des Wärmeinhaltes der Raumseinheit während der Zeit  $dt$  durch Leitung ist alsdann

$$dq_{\text{leit}} = (q_y - q_y' + q_x - q_x') dt = \left( -\frac{\partial q}{\partial y} dy - \frac{\partial q}{\partial x} dx \right) dt \quad (52)$$

In Bezug auf die Wärmeleitzahl  $\lambda$  in  $q_x$  würde man wohl in turbulenten Grenzschichte die turbulente Leitfähigkeit einzusetzen haben.

Um die Rechenarbeit nicht übermäßig zu verwickeln wollen wir vorerst, wie es bei einem Flüssigkeitstrom zutreffen dürfte, von der **axialen Wärmeleitung** absehen.

Als **Reibungswärme**, die in der Raumseinheit während der Zeiteinheit erzeugt wird, gilt wie früher:

$$q_{\text{reib}} = A \tau \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots \quad (53)$$

Für die Temperatur wird man bei sich regelmässig entwickelnden Grenzschichten (also in nicht zu grosser Nähe von Ablösungspunkten usw.) den Ansatz

$$\vartheta = \Theta f(\eta) \quad \dots \quad (54)$$

benutzen dürfen, worin  $\Theta$  die aus der Druckabnahme sich ergebende Temperaturdifferenz gegen die Wand als Funktion von  $x$  gegeben sein und die Funktion  $f$  dann von  $x$  unabhängig vorausgesetzt wird. Die „substantielle“ Temperaturzunahme ist

$$\begin{aligned} d\vartheta &= \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \left[ \left( \Theta' f(\eta) - \Theta \frac{\partial f}{\partial \eta} \eta \frac{d'}{d} \right) u + v \Theta \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{1}{d} \right] dt. \end{aligned} \quad (55)$$

Also lautet die vereinfachte Wärmegleichung:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\gamma}{\varrho} c_p \tau \frac{\partial \vartheta / \partial y}{\partial u / \partial y} \right) + A \tau \frac{\partial u}{\partial y} &= \\ = \gamma c_p \left[ \left( \Theta' f(\eta) - \Theta \frac{\partial f}{\partial \eta} \eta \frac{d'}{d} \right) u + v \Theta \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{1}{d} \right] & \end{aligned} \quad (56)$$

Nach Einsetzen von  $u$  und  $v$  gemäss Gl. (39) u. (40) und Ordnen entsteht mit  $\partial \Theta / \partial x = \Theta'$ ;  $\partial f / \partial \eta = f'$ ;  $\frac{\partial d}{\partial x} = d'$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau \eta^{6/7} f' \right) + \frac{A U^2 \tau \eta^{-6/7}}{49 g c_p \Theta} &= \\ = \frac{\gamma U d}{7 g \Theta} \left[ U \Theta' \eta^{1/7} f - \frac{7}{8} f' \left( \frac{d'}{d} + \frac{U'}{U} \right) U \Theta \eta^{8/7} \right] & \end{aligned} \quad (57)$$

Mit Rücksicht auf (48a) vereinfacht sich  $d'/d + U'/U$  zu  $(72/7) (\tau_0/9 U^2 d)$ . Nach Ausführung der Differentiation entstünde eine vollständige Gleichung zweiter Ordnung für  $f$  mit verwickelten Koeffizienten, deren allgemeine Integration kaum tunlich wäre. Mit demselben Grade der Näherung, die uns zur Vernachlässigung der axialen Wärmeleitung führte, setzen wir in Gl. (51)  $\Theta' = 0$ , wodurch sie in

$$f_0 f'' + f_1 f' + f_2 = 0 \quad \dots \quad (58)$$

übergeht, mit

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \tau \eta^{6/7} \\ f_1 &= \frac{\partial}{\partial \eta} (f_0) + \frac{9}{7} \tau_0 \eta^{8/7} \\ f_2 &= \frac{A U^2 \tau}{49 g c_p \Theta} \eta^{-6/7} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (59)$$

Um den Einfluss der Beschleunigung, also mittelbar  $U'$  klar hervortreten zu lassen, vernachlässigen wir weiterhin die **Reibungswärme** so dass in Gl. (58)  $f_2 = 0$  also

$\frac{f''}{f'} = -\frac{f_1}{f_0}$  integriert  $\lg f' = -\int \frac{f_1}{f_0} d\eta + \lg C_1'$ ; liefert; daraus folgt

$$f = \int f' d\eta = C_1' \int e^{-\int \frac{f_1}{f_0} d\eta} d\eta + C_2' \quad \dots \quad (60)$$

Die Integration muss im allgemeinen zeichnerisch bewerkstelligt werden; sie erledigt sich einfacher, wenn man  $\eta$  durch die Veränderliche  $\zeta = 1 - \eta$  ersetzt und die Integrale als bestimmte, mit  $\zeta = 0$  beginnend, ansetzt. Mit  $f(\eta) = f(1 - \zeta) = \varphi(\zeta)$  wird  $\partial f / \partial \eta = -\partial \varphi / \partial \zeta$  und  $\partial^2 f / \partial \eta^2 = \partial^2 \varphi / \partial \zeta^2$ . Somit lautet Gl. (58)

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = + \frac{f_1(1 - \zeta)}{f_0(1 - \zeta)} = \frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_0(\zeta)} \quad \dots \quad (61)$$

und deren Integral, ähnlich wie (60)

$$\varphi = C_2 - C_1 \int e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} d\beta \quad \dots \quad (62)$$

Die Bedingungen der Lösung sind

$$\varphi = 1 \quad \text{für } \zeta = 0 \quad \text{hieraus } C_2 = 1$$

$$\varphi = 0 \quad \text{„} \quad \zeta = 1 \quad \text{hieraus}$$

$$C_1 = \frac{C_2}{\int e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} d\beta} \quad \dots \quad (62a)$$

Die Funktion  $\varphi_0$  verschwindet für  $\zeta = 1$  und erfordert in der Umgebung dieses Wertes die Einschaltung einer analytischen Integration für ein klein zu wählendes Intervall  $\zeta_1$  bis 1, d. h.  $\eta = \eta_1$  bis 0.

Nun ist

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\tau'}{\tau} + \frac{6}{7\eta} + \frac{9}{7} \frac{\tau_0}{\tau} \eta^{\frac{2}{7}} \quad \dots \quad (63)$$

Das erste und dritte Glied können neben dem bei  $\eta = 0$  ins Unendliche wachsenden Mittelglied gestrichen werden, und es bleibt

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{6}{7\eta} = \frac{6}{7(1 - \zeta)} \quad \dots \quad (63a)$$

Für  $\eta = 1$  wird  $\tau = 0$  und  $f_1/f_0$  wächst scheinbar wieder ins Unendliche. Wenn man indes den Ausdruck von  $\tau'/\tau$  bildet, so erkennt man, dass er mit dem 3. Glied den Wert 0/0 ergibt, dessen Grenzwert in bekannter Weise durch Differentiation ermittelt einen endlichen Betrag liefert, den man übrigens bei zeichnerischer Darstellung unmittelbar als Fortsetzung der Schaulinie  $f_1/f_0$  gewinnt. Bei Gasen, wo man  $c_p/c_v$  nicht der Einheit gleich setzen darf, ginge  $f_1/f_0$  bei  $\eta = 1$  ins negativ Unendliche, was im Temperaturverlauf bei Benützung obiger Gleichungen einen physikalisch unmöglich senkrechten Anstieg für  $\eta = 1$  ergäbe. Allein bei veränderlichen  $\varrho$  darf in der Wärmegleichung das Glied  $A \rho d\vartheta/d\eta$  nicht vernachlässigt werden, wodurch sich die Verhältnisse vollständig ändern und erst nach erfolgter allgemeiner Integration feststellbar wäre, ob an Gl. (50) etwa eine Berichtigung anzubringen sei.

Im Intervall zwischen  $\zeta_1$  und 1 zerlegen wir das Integral in Gl. (62) nach dem Schema  $\int_0^1 = \int_0^{\zeta_1} + \int_{\zeta_1}^1$ , wobei

sich in  $\int_0^1$  der Exponent von  $e$  als Summe  $\int_0^{\zeta_1} = \int_0^{\zeta_1} + \int_{\zeta_1}^{\beta}$  darstellt, und im zweiten Teilintegral die angenäherte Funktion (63a) zu verwenden ist. Man erhält somit

$$\int_{\zeta_1}^{\beta} \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta = \int_{\zeta_1}^{\beta} \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta - \frac{6}{7} \lg \left( \frac{1 - \beta}{1 - \zeta_1} \right)$$

und das ganze Integral

$$\int_0^1 e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} d\beta = \int_0^{\zeta_1} e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} d\beta + \int_{\zeta_1}^1 \left( \frac{1 - \beta}{1 - \zeta_1} \right)^{-6/7} e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} d\beta \quad (63b)$$

und schliesslich

$$\varphi = 1 - C_1 \left\{ \int_0^{\zeta_1} e^{\int \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} d\beta + e^{\int_0^{\zeta_1} \frac{\varphi_1}{\varphi_0} d\zeta} 7 \eta_1^{6/7} [\eta_1^{1/7} - \eta^{1/7}] \right\} \quad (63c)$$

Im Ausdrucke von  $C_1$  Gl. (62a) gewinnt man den Wert des Integrales aus (63c), indem man die obere Grenze  $\zeta = 1$  oder  $\eta = 0$  wählt, d. h. es ist

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^{\zeta_1} e^{\vartheta} \int_0^{\frac{q_1}{q_0} \alpha \zeta} d\beta + 7 \eta_1 e^{\vartheta} \int_0^{\zeta_1} \frac{q_1}{q_0} d\zeta} \quad (63d)$$

Bringt man in (63c) die beiden Glieder auf den in Gl. (63d) vorhandenen Nenner, so entsteht für die Wandnähe der ungemein einfache Ausdruck

$$\vartheta = \Theta \varphi = \varepsilon \Theta \eta^{1/7} \quad (63e)$$

$$\text{mit } \varepsilon = 7 C_1 e^{\vartheta} \eta_1^{6/7} \quad (63f)$$

Einführung einer genaueren Geschwindigkeitsfunktion.

$$u = U \frac{\eta^{1/7}}{7} (8 - \eta) \quad (64)$$

Diese besitzt die Eigenschaft, für  $\eta = 1$  die Schaulinie von  $u$  tangential in  $U$  zu überführen, d. h. es ist  $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} = 0$ . Die vollkommen gleichartig durchgeführte Rechnung liefert für  $\tau$  den Ausdruck:

$$\frac{\tau}{\vartheta} = - U U' \Delta \chi_1(\eta) + \frac{\tau_w}{\vartheta} \chi_2(\eta) \quad (65)$$

wobei sowohl  $\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=1}$  wie  $\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \eta}\right)_{\eta=1}$  gleich 0 sind. Die Forderung, dass  $\tau$  beständig grösser als 0 sei, wird für die Nachbarschaft von  $\eta = 1$  erfüllt, wenn die zweite Ableitung von  $\tau$  negativ ist, d. h. die Schaulinie von  $\tau$  muss nach oben konkav gekrümmmt sein. Die graphische Darstellung der beiden Funktionen  $\chi_1, \chi_2$  zeigt, dass alsdann auch im ganzen übrigen Verlauf  $\tau > 0$  bleibt. Die Ausrechnung führt zur Beziehung

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\tau}{\vartheta} \right) = - \frac{50}{147} U U' \Delta + \frac{138}{49} \frac{\tau_w}{\vartheta} \text{ soll } < 0 \quad (66)$$

oder:

$$\frac{\tau_w}{\vartheta} > \frac{25}{207} U U' \Delta \quad (67)$$

Die weitere Forderung, dass  $\tau_w$  bei  $U' = 0$  in den klassischen Wert übergehe, wird also erfüllt, falls man setzt:

$$\frac{\tau_w}{\vartheta} = \frac{25}{207} U U' \Delta + \frac{\tau_0}{\vartheta} \quad (68)$$

Allein dem veränderten Gesetz Gl. (64) entspricht hier

$$\tau_0 = 0,0279 \vartheta U^2 \left( \frac{v}{U \Delta} \right)^{1/4} \quad (69)$$

Die neu zu bildende Grenzschicht-Differentialgleichung lautet

$$\Delta' = - \frac{U'}{U} \Delta + \psi \left( \frac{v}{U \Delta} \right)^{1/4} \quad (70)$$

mit  $\psi' = 23,0 \cdot \psi$  und  $\psi = 0,0225$ . Nach Erweiterung mit  $\Delta^{1/4}$  und Einführung von  $z = \Delta^{5/4}$  kann man die Integration leicht bewerkstelligen und erhält

$$z - z_0 = \Delta^{5/4} - \Delta_0^{5/4} = \frac{5}{4} \psi' \nu^{1/4} U^{-5/4} \int_0^x U dx \quad (72)$$

wo  $\Delta_0$  die Schichtendicke für  $x = 0$  bedeutet. Setzen wir  $\Delta_0 = 0$ , so folgt

$$\Delta = 0,705 \frac{\nu^{1/5}}{U} \left\{ \int_0^x U dx \right\}^{4/5} \quad (73)$$

Mit dem Geschwindigkeitsansatz Gl. (39) erhält man als Koeffizient in dem gleichartig geformten Ausdruck von  $\Delta$  0,37 anstatt 0,705; ferner wird

$$\tau_w = 0,0853 \vartheta \nu^{1/5} U' \left\{ \int_0^x U dx \right\}^{4/5} + \tau_0 \quad (74)$$

während mit Geschwindigkeitsgesetz Gl. (39) der Koeffizient vor dem Integral gleich ist 0,0823.

Die gute Uebereinstimmung der  $\tau_w$ -Werte bei nicht un wesentlicher Verschiedenheit ihrer Ableitung dürfte als Stütze der angewendeten Begründung angesehen werden. Wir rechnen im folgenden mit den Formeln, die dem einfachen 1/7 Gesetz entsprechen.

Die an die Wand übergehende Wärmemenge ist das Negative des Ausdrückes  $q_y$  Gl. (50) bei  $\eta = 0$ . Mit Rücksicht auf Gl. (39) und (63e) entsteht

$$q = \frac{\gamma}{\vartheta} c_p \tau_w \varepsilon \frac{\Theta}{U} \quad (75)$$

und mit Rücksicht auf Gl. (46a) und (47) erhalten wir:

$$q = \frac{\gamma}{\vartheta} c_p \varepsilon \frac{\Theta}{U} \left[ \frac{2}{9} U U' \Delta \vartheta + \psi \vartheta U^2 \left( \frac{v}{U \Delta} \right)^{1/4} \right] \quad (76)$$

Wie ersichtlich, wird unter sonst gleichen Umständen, insbesondere gleich grosser Schichtendicke, die übergehende Wärmemenge im Verhältnisse von

$$K = \varepsilon \left( 1 + \frac{\frac{2}{9} U U' \Delta \vartheta}{\psi \vartheta U^2 \left( \frac{v}{U \Delta} \right)^{1/4}} \right) \quad (77)$$

gegenüber beschleunigungsfreier Strömung vergrössert.

#### Laminare Endschicht.

Die an der Wand haftende laminare „Endschicht“ habe die im Verhältnis zu  $\Delta$  kleine Dicke  $\Delta_0 = \eta_0 \Delta$ . Sie bestimmt sich aus der Gleichheit der Schubspannungen am Uebergang in die turbulenten Schichte, d. h. aus

$$\tau_{\text{lamin}} = \mu \frac{u_0}{\Delta_0} = \vartheta \frac{U \eta_0^{1/7}}{\Delta_0 \left( \frac{\Delta_0}{\Delta} \right)} = \frac{\vartheta \nu U}{\Delta \eta_0^{6/7}} = \tau_{\text{turb}} \underset{\sim}{=} \tau_w \quad (78)$$

Hieraus folgt

$$\eta_0 = \left[ \frac{\nu \vartheta U^2}{U \Delta \tau_w} \right]^{1/6} \quad (79)$$

Die Temperatur nehmen wir im Sinne der in „Schweiz. Bauzeitung“ 1926 begründeten Näherung linear, als

$$\vartheta_1 = b_1 \eta \quad (80)$$

an. Von  $\eta = \eta_0$  an gilt das allgemeine Integral Gl. (62)

$$\vartheta_{\text{II}} = \Theta - c_1 \int_0^{\zeta_0} e^{\vartheta} \int_0^{\frac{q_1}{q_0} d\zeta} d\beta \quad (81)$$

worin die Konstante  $c_1$  nun so zu bestimmen ist, dass für  $\eta = \eta_0$  die Temperaturen übereinstimmen, oder mit der Bezeichnung

$$\Phi_0 = \int_0^{\zeta_0} e^{\vartheta} \int_0^{\frac{q_1}{q_0} d\zeta} d\beta \quad \text{mit } \zeta_0 = 1 - \eta_0 \quad (81a)$$

$$\Theta = c_1 \Phi_0 = b_1 \eta_0 \quad (81b)$$

Bei sehr kleinem  $\eta_0$  wird man zur Berechnung von  $\Phi_0$  mit Vorteil das Integral 63b verwenden.

Des ferneren muss die aus dem turbulenten in den laminaren Teil strömende Wärme turbulent und laminar ausgedrückt gleich sein, d. h. für  $\eta = \eta_0$

$$q_t = \frac{\gamma c_p \tau_w}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta_{\text{II}} / \partial \eta}{\partial u / \partial \eta} = \lambda_{\text{lamin}} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} = \frac{\gamma c_p \nu}{\sigma \Delta} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} \quad (81c)$$

Hierin ist

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \vartheta_{\text{II}}}{\partial \eta} \right)_0 &= - \frac{\partial \vartheta_{\text{II}}}{\partial \zeta} = c_1 e^{\vartheta} \int_0^{\zeta_0} \frac{q_1}{q_0} d\zeta \\ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_0 &= \frac{1}{7} U \eta_0^{-6/7}; \quad \left( \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} \right)_0 = b_1 \end{aligned} \right\} \quad (81d)$$

Somit erhält man

$$\frac{7 \tau_w}{\vartheta U} \eta_0^{6/7} c_1 \Phi_0' = \frac{\nu}{\sigma \Delta} b_1 \quad (81e)$$

Setzt man  $b_1$  aus (81b) ein, so kann man  $c_1$  und damit die in die Endschicht eintretende Wärme nach Gl. (81c) ermitteln, die von der Reibungswärme abgesehen, auch die in die Wand dringende Wärme darstellt.

Indem man  $\tau_w$  mittels Gl. (79) durch  $\eta_0$  ausdrückt und die Bezeichnung

$$q_{\text{turb}} = \frac{\gamma c_p \tau_w \Theta}{\vartheta u} \quad (82)$$

einführt, erhält man

$$q = \frac{q_{\text{turb}}}{\frac{\Phi_0}{7 \Phi_0'} \eta_0^{6/7} + \sigma \eta_0^{1/7}} \quad (83)$$

## WÄRMEÜBERGANG IN GRENZSCHICHTEN BEI STARK VERÄNDERLICHER GRUNDSTRÖMUNG.

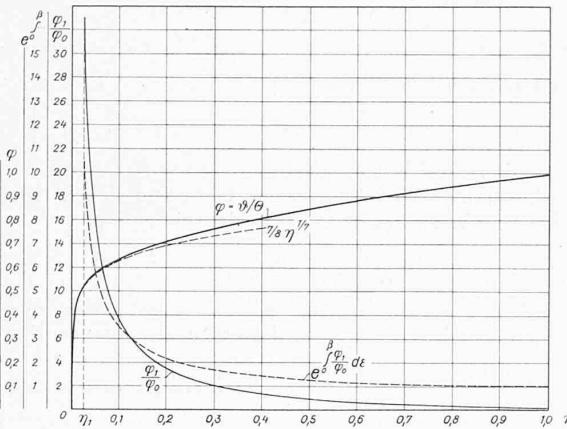


Abb. 1.

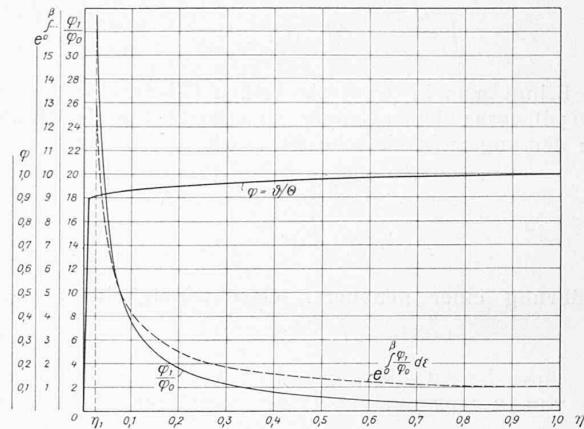


Abb. 2.

Nähert sich  $U'$  der Grenze 0, so geht Gl. (83) stetig über in den Ausdruck

$$q = \frac{q_{\text{turb}}}{1 + (\sigma - 1) \eta_0^{1/7}} \quad \dots \quad (84)$$

der in „Schweiz. Bauzeitung“ 1916 bereits entwickelt, jedoch in anderer Form mitgeteilt worden ist. Die Endschicht übt hiernach den gleichen Einfluss aus, wie bei gleichmässiger Grundströmung, sie wirkt bei grossen  $\sigma$  als isolierende Einlage. In der Nähe von  $\sigma = 1$  nähert sich der Nenner in Gl. (83) jedoch nicht der Einheit, sondern dem Werte  $1/\varepsilon$  im Sinne der Gl. (75).

## Beispiel.

Wir greifen willkürlich einen Punkt der Strömung heraus, in dem beispielsweise

$U = 40 \text{ m/sec}$ ;  $U' = 255 \text{ sek}^{-1}$ ;  $\Delta = 0,63 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  sei. Man kann auch bei Wasser als strömender Flüssigkeit  $\sigma = 1$  erreichen, wenn man als Temperatur rd.  $130^\circ \text{C}$  voraussetzt. Die neuen Formeln ergeben dann, wenn man die Turbulenz bis an die Wand ausdehnt, den in Abb. 1 dargestellten Temperaturverlauf. Der Anschluss an die Wand erfolgt gemäss Gleichung

$$\vartheta = \varepsilon \theta \eta^{1/7} \text{ mit } \varepsilon = 7/8$$

der punktiert in die Abbildung 1 eingetragen ist. Die Vergrösserungsziffer Gl. (77) ergibt sich hiernach zu

$$K = 1,50$$

Rechnet man  $\varepsilon$  und  $K$  mit dem gleichen  $UU'$ , jedoch mit  $\Delta = 1,51 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , so erhält man

$$\varepsilon = 7/9; K = 2,53$$

Hieraus folgt, dass der Wärmeübergang bei beschleunigter Strömung erheblich grösser sein kann als bei gleichmässiger Strömung.

Die stark isolierende Wirkung der „Endschicht“ bei höherem  $\sigma$  kommt in Abbildung 2 zum Ausdruck, die mit gleichem  $UU' \Delta$  wie in Abbildung 1, aber  $t = 8^\circ \text{C}$ , also  $\sigma = 10$  entworfen ist und auf  $q = q_{\text{turb}}/5,75$  führt, wobei zu beachten ist, dass  $q_{\text{turb}}$  mit dem neuen Ausdruck der Schubspannung  $\tau_w$  zu rechnen ist.

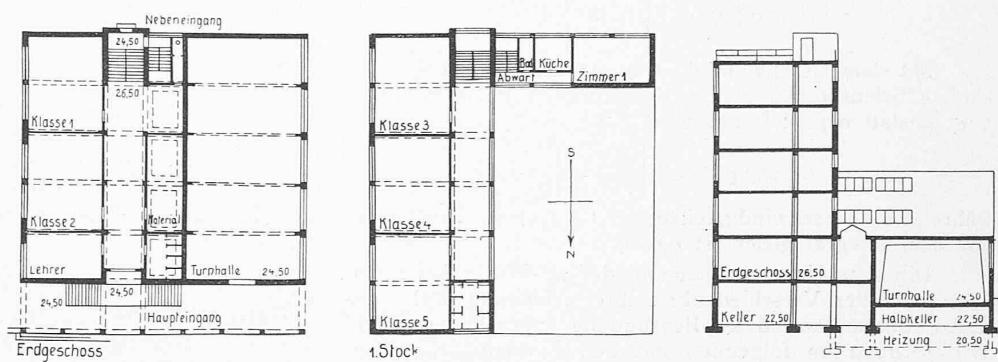
Versuche müssen erweisen, ob diese aus der Theorie der Grenzschichten gezogenen Folgerungen mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Da solche Versuche sehr heikel und umständlich sind, somit geraume Zeit vergehen kann, bevor Ergebnisse vorliegen, schien es uns, um Meinungsaustausch anzuregen, gerechtfertigt, diese Studie schon jetzt zu veröffentlichen.

## Zum Wettbewerb für die Petersschule Basel.

Was uns veranlasst, auf das Ergebnis dieser Konkurrenz hier näher einzugehen, ist die — schon anderwärts beobachtete — im vorliegenden Falle aber besonders eindrücklich in Erscheinung getretene Tatsache, dass die bis ins kleinste festgelegten und ausgetüftelten Wettbewerbs-Programme sehr oft die Lösung eigentlich schon in sich bergen und die Konkurrenzen nur mehr zu einem Kampf um die Aufmachung, um die äussere Erscheinung, die Formgebung werden lassen. Im Falle Petersschule wird dies schon beim ersten Blick auf die prämierten Projekte deutlich erkennbar: sie alle zeigen im Prinzip die gleiche Anordnung: ein winkel förmiges Gebäude birgt in seinem längern Trakt die Mehrzahl der verlangten Schulräume, im kürzern Flügel die übrigen Klassenzimmer und in dessen Erdgeschoss die Turnhalle. Tatsächlich scheint, bei buchstäblicher Einhaltung aller Programm-Vorschriften, eine andere Lösungsmöglichkeit kaum vorhanden zu

sein, und es ist deshalb, obwohl alle diese Lösungen notwendig mit grösseren Nachteilen behaftet bleiben mussten (entweder bringt diese Ecklösung einen beschatteten Hof oder eine grössere Anzahl ungünstig belichteter Schulzimmer), gegen den Jury-Entscheid wohl kaum etwas einzuwenden.

Dass aber diese sehr bedingten Lösungen nicht aus der Aufgabe an sich oder aus örtlichen Schwierigkeiten notwendigerweise hervorgehen mussten, sondern eine Folge der Programmbestimmungen sind, mag an Hand einiger nichtprämiierter Entwürfe gezeigt werden. Klar geht aus



Entwurf Arch. P. Artaria für die Petersschule in Basel. — Grundrisse und Schnitt, 1:600.