Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 89/90 (1927)

Heft: 15

Inhaltsverzeichnis

Band 89. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 15

Wärmeübergang in Grenzschichten bei stark veränderlicher Grundströmung.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Im Anschluss an unsern Aufsatz über den Wärme-Uebergang bei unveränderlicher Grundströmung, in der „Schweizer. Bauzeitung" vom 30. Oktober 1926, wobei ausserhalb der Grenzschichte neben der Geschwindigkeit auch die Temperatur stets gleich bleibt, dehnen wir hier die Theorie auf den Fall stark veränderlicher Grundgeschwindigkeit und Temperatur aus, wie sie etwa in Expansionsdüsen auftreten. In den Bezeichnungen jenes als bekannt vorausgesetzten Aufsatzes lauten die hydrodynamischen Gleichungen bei stets gleichem Rauminhalt für zweidimensionale Strömung (mit fortlaufender Numerierung der Gleichungen)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad . \quad . \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Für die Grundströmung darf man in der Nähe der Wand die Geschwindigkeit v vernachlässigen, erhält also

$$U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wobei wir U, $\partial U/\partial x = U'$ als gegebene Funktionen von x ansehen dürfen, und $(1/\varrho)(\partial p/\partial x)$ in (36) durch UU' ersetzen. Als einfachste empirische Annahme über den Geschwindigkeitsverlauf senkrecht zur Wand wählen wir wieder

$$u=U\left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7}=U\eta^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

obschon die Rechnung auch mit einem allgemeineren Ansatz leicht durchführbar wäre. Gl. (37) liefert

$$v=-\int_0\frac{\partial u}{\partial x}\partial y=-\int_0\left[U'\eta^{1/7}-U\frac{\eta}{7}\frac{\Delta'}{\Delta}\right]\Delta\,d\eta$$

$$=\frac{1}{8}(U\Delta'-7U'\Delta)\,\eta^{8/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

mit $\Delta'=\partial\Delta/\partial x$

Die Einschiebung von v in (36) erlaubt nach Erweiterung mit dy, τ/ϱ durch Integration als:

$$\frac{\tau}{\varrho}=-\int UU'\Delta\,d\eta+\int\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

$$=-UU'\Delta\eta+\frac{49}{72}UU'\Delta\eta^{9/7}-\frac{7}{72}U^2\Delta'\eta^{9/7}+C \quad (41)$$

darzustellen. Die Konstante wird durch die Bedingung bestimmt, dass für

$$\eta=1\,;\quad \tau=0$$

werden müsse. Für $\eta=0$ erhalten wir alsdann die Schubspannung an der Wand, die mit τ_w bezeichnet werden soll.

Es ergibt sich

$$\tau_w/\varrho=C=\frac{23}{72}UU'\Delta+\frac{7}{72}U^2\Delta' \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

also ist

$$\frac{\tau}{\varrho}=\Delta UU'\left[(1-\eta)-\frac{49}{72}(1-\eta^{9/7})\right]+\frac{7}{72}U^2\Delta'(1-\eta^{9/7}) \quad (43)$$

Die hier vorkommende Grösse Δ' wird durch die Differentialgleichung der Schichtendicke mit τ_w verknüpft. Diese lautet für Beharrungsströmung

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\Delta}\varrho u^2\,dy-U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\Delta}\varrho u\,dy=+\Delta UU'\varrho-\tau_w \qquad (44)$$

oder mit Gl. (39)

$$\frac{7}{9}\frac{\partial}{\partial x}(U^2\Delta\varrho)-\frac{7}{8}U\frac{\partial}{\partial x}(U\varrho\Delta)=\Delta UU'\varrho-\tau_w$$

hieraus folgt:

$$\Delta'=-\frac{23}{7}\frac{U'}{U}\Delta+\frac{72}{7}\frac{\tau_w}{\varrho U^2} \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Nun schieben wir Δ' in Gl. (43) ein, was auf

$$\frac{\tau}{\varrho}=-UU'\Delta\left[\eta(1-\eta^{2/7})\right]+\frac{\tau_w}{\varrho}(1-\eta^{9/7}) \quad . \quad (46)$$

führt. Der tatsächliche Wert von τ_w kann weder aus Gl. (41) noch aus (45) ermittelt werden. Für den Fall beschleunigungsfreier Strömung ist τ_w durch die Formel von Prandtl-Kármán gegeben. Würde man annehmen, dass auch bei beschleunigter Strömung, d. h. $U'>0$, der gleiche Ausdruck für τ_w gilt, so führt Gl. (46) bei hinreichend grossem U' wie ersichtlich für Zwischenwerte von η auf negative Werte von τ. Da jedoch die Geschwindigkeit in der Grenzschichte unter allen Umständen vom Werte Null an der Wand in stetiger Weise zunimmt (auch wenn man ein allgemeineres Gesetz als Gl. (39) voraussetzt) ist ein Negativwerden, d. h. ein Zeichenwechsel der Schubspannung physikalisch ausgeschlossen. So zwingt uns die Anschauung **die Folgerung auf, dass τ_w von dem bis anhin allgemein benützten klassischen Wert abweichen** u. zw. so gross werden muss, dass τ in Gl. (46) **stets einen positiven Wert erhalte.** Diese Vorschrift scheint mit einer Willkür behaftet zu sein, die jedoch verschwindet, wenn man beachtet, dass bei abnehmendem U' das τ_w allmählich in den klassischen Wert übergehen muss. Wie man aus einer graphischen Darstellung erkennt, bleibt τ positiv, sofern die Tangente an τ im Punkte $\eta=1$ negativ ist. Man erhält

$$\left(\frac{d(\tau/\varrho)}{d\eta}\right)_{\eta=1}=+\frac{2}{7}UU'\Delta-\frac{9}{7}\frac{\tau_w}{\varrho}\ \text{soll}<0$$

oder

$$\tau_w/\varrho>\frac{2}{9}UU'\Delta$$

Setzen wir also

$$\tau_w=\frac{2}{9}UU'\Delta\varrho+f(U,\varrho,\nu,\Delta) \quad . \quad . \quad (46a)$$

so muss für $U'=0$ das Zusatzglied in den klassischen Ausdruck übergehen, d. h. es ist

$$f(U,\varrho,\nu,\Delta)=\psi\varrho U^2\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{1/4}=\tau_o \quad . \quad . \quad (47)$$

Somit lautet der vollständige Ausdruck von (46)

$$\tau=-UU'\Delta\varrho\left[\eta(1-\eta^{2/7})-\frac{2}{9}(1-\eta^{9/7})\right]+\tau_o(1-\eta^{9/7}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

in welchem bemerkenswerter Weise nichts Willkürliches mehr vorkommt.

Ferner wird Gl. (45)

$$\Delta'=-\frac{U'}{U}\Delta+\frac{72}{7}\frac{\tau_o}{\varrho U^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48a)$$

Für den Fall, dass als Geschwindigkeitsgesetz der allgemeine Ansatz

$$u=U\eta^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48b)$$

gewählt würde, ergeben die gleichen Ueberlegungen als Ausdruck der Schubspannung

$$\tau=-UU'\Delta\varrho\left[\eta\left(1-\eta^{\frac{2}{n}}\right)-\frac{2}{2+n}\left(1-\eta^{\frac{2+n}{n}}\right)\right]+\tau_o\left(1-\eta^{\frac{2+n}{n}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48c)$$

Dabei liefert die von Kármánsche Dimensionsbetrachtung

$$\tau_o=B^{-\frac{2n}{n+1}}\varrho U^2\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{\frac{2}{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (48d)$$

worin die Konstante B aus Versuchen abzuleiten wäre.

Differentialgleichung des Temperaturverlaufes.

Der Temperaturverlauf betimmt die Wärmeleitung, die in der **Wärmegleichung** zum Vorschein kommt. Auf die Raumeinheit bezogen erhalten wir wie früher

$$dq_{\text{leit}}+dq_{\text{reib}}=\gamma c_v\,dT+A\,p\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}} \quad . \quad . \quad (49)$$

worin $\mathfrak{v}$ den Rauminhalt pro 1 kg bedeutet.