**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
**Band:** 89/90 (1927)
**Heft:** 15

## Inhaltsverzeichnis

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 03.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

INHALT: Wärmeübergang in Grenzschichten bei veränderlicher Grundströmung. — Zum Wettbewerb für die Petersschule Basel. — II. Wettbewerb für die Bezirkschule Lenzburg. — † Frédéric Broillet. — Mitteilungen: Raumersparungen durch Saugschwellen in Wasserschlosskammern. Eine Fachtagung „Dauerbruch". Forschungsinstitut für Wasserbau und Wasserkraft am Walchensee. Schiffahrt auf dem Oberrhein. Beteiligung von Schweizer Architekten an der Ausstellung des Deutschen Werkbundes „Die Wohnung". Einmännige Bedienung elektrischer Lokomotiven bei den S. B. B. Neuzeitliches Hüttenkraftwerk. Schweizer Mustermesse. Soldatenstube in Bellinzona. Neues Postgebäude in Biel. Berufung. Verband Deutscher Elektrotechniker. — Wettbewerbe: Völkerbundgebäude Genf. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizer. Ingenieur- und Architekten-Verein. Basler Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. Sektion Bern.

Band 89. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 15

# Wärmeübergang in Grenzschichten bei stark veränderlicher Grundströmung.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Im Anschluss an unsern Aufsatz über den Wärme-Uebergang bei unveränderlicher Grundströmung, in der „Schweizer. Bauzeitung" vom 30. Oktober 1926, wobei ausserhalb der Grenzschichte neben der Geschwindigkeit auch die Temperatur stets gleich bleibt, dehnen wir hier die Theorie auf den Fall stark veränderlicher Grundgeschwindigkeit und Temperatur aus, wie sie etwa in Expansionsdüsen auftreten. In den Bezeichnungen jenes als bekannt vorausgesetzten Aufsatzes lauten die hydrodynamischen Gleichungen bei stets gleichem Rauminhalt für zweidimensionale Strömung (mit fortlaufender Numerierung der Gleichungen)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad . \quad . \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Für die Grundströmung darf man in der Nähe der Wand die Geschwindigkeit $v$ vernachlässigen, erhält also

$$U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wobei wir $U$, $\partial U/\partial x = U'$ als gegebene Funktionen von $x$ ansehen dürfen, und $(1/\varrho)(\partial p/\partial x)$ in (36) durch $UU'$ ersetzen. Als einfachste empirische Annahme über den Geschwindigkeitsverlauf senkrecht zur Wand wählen wir wieder

$$u=U\left(\frac{y}{\Delta}\right)^{1/7}=U\eta^{1/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

obschon die Rechnung auch mit einem allgemeineren Ansatz leicht durchführbar wäre. Gl. (37) liefert

$$v=-\int_0\frac{\partial u}{\partial x}\partial y=-\int_0\left[U'\eta^{1/7}-U\frac{\eta}{7}\frac{\Delta'}{\Delta}\right]\Delta\, d\eta$$

$$=\frac{1}{8}(U\Delta'-7U'\Delta)\eta^{8/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

mit $\Delta'=\partial\Delta/\partial x$

Die Einschiebung von $v$ in (36) erlaubt nach Erweiterung mit $dy$, $\tau/\varrho$ durch Integration als:

$$\frac{\tau}{\varrho}=-\int UU'\Delta\, d\eta+\int\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

$$=-UU'\Delta\eta+\frac{49}{72}UU'\Delta\eta^{9/7}-\frac{7}{72}U^2\Delta'\eta^{9/7}+C \quad (41)$$

darzustellen. Die Konstante wird durch die Bedingung bestimmt, dass für

$$\eta=1\,;\quad \tau=0$$

werden müsse. Für $\eta=0$ erhalten wir alsdann die Schubspannung an der Wand, die mit $\tau_w$ bezeichnet werden soll.

Es ergibt sich

$$\tau_w/\varrho=C=\frac{23}{72}UU'\Delta+\frac{7}{72}U^2\Delta' \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

also ist

$$\frac{\tau}{\varrho}=\Delta UU'\left[(1-\eta)-\frac{49}{72}(1-\eta^{9/7})\right]+\frac{7}{72}U^2\Delta'(1-\eta^{9/7}) \quad (43)$$

Die hier vorkommende Grösse $\Delta'$ wird durch die Differentialgleichung der Schichtendicke mit $\tau_w$ verknüpft. Diese lautet für Beharrungsströmung

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\Delta\varrho u^2\,dy-U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\Delta\varrho u\,dy=+\Delta UU'\varrho-\tau_w \quad (44)$$

oder mit Gl. (39)

$$\frac{7}{9}\frac{\partial}{\partial x}(U^2\Delta\varrho)-\frac{7}{8}U\frac{\partial}{\partial x}(U\varrho\Delta)=\Delta UU'\varrho-\tau_w$$

hieraus folgt:

$$\Delta'=-\frac{23}{7}\frac{U'}{U}\Delta+\frac{72}{7}\frac{\tau_w}{\varrho U^2} \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Nun schieben wir $\Delta'$ in Gl. (43) ein, was auf

$$\frac{\tau}{\varrho}=-UU'\Delta\left[\eta(1-\eta^{2/7})\right]+\frac{\tau_w}{\varrho}(1-\eta^{9/7}) \quad . \quad (46)$$

führt. Der tatsächliche Wert von $\tau_w$ kann weder aus Gl. (41) noch aus (45) ermittelt werden. Für den Fall beschleunigungsfreier Strömung ist $\tau_w$ durch die Formel von Prandtl-Kármán gegeben. Würde man annehmen, dass auch bei beschleunigter Strömung, d. h. $U'>0$, der gleiche Ausdruck für $\tau_w$ gilt, so führt Gl. (46) bei hinreichend grossem $U'$ wie ersichtlich für Zwischenwerte von $\eta$ auf negative Werte von $\tau$. Da jedoch die Geschwindigkeit in der Grenzschichte unter allen Umständen vom Werte Null an der Wand in stetiger Weise zunimmt (auch wenn man ein allgemeineres Gesetz als Gl. (39) voraussetzt) ist ein Negativwerden, d. h. ein Zeichenwechsel der Schubspannung physikalisch ausgeschlossen. So zwingt uns die Anschauung **die Folgerung auf, dass $\tau_w$ von dem bis anhin allgemein benützten klassischen Wert abweichen** u. zw. so gross werden muss, dass $\tau$ in Gl. (46) **stets einen positiven Wert erhalte.** Diese Vorschrift scheint mit einer Willkür behaftet zu sein, die jedoch verschwindet, wenn man beachtet, dass bei abnehmendem $U'$ das $\tau_w$ allmählich in den klassischen Wert übergehen muss. Wie man aus einer graphischen Darstellung erkennt, bleibt $\tau$ positiv, sofern die Tangente an $\tau$ im Punkte $\eta=1$ negativ ist. Man erhält

$$\left(\frac{d(\tau/\varrho)}{d\eta}\right)_{\eta=1}=+\frac{2}{7}UU'\Delta-\frac{9}{7}\frac{\tau_w}{\varrho}\ \text{soll}<0$$

oder

$$\tau_w/\varrho>\frac{2}{9}UU'\Delta$$

Setzen wir also

$$\tau_w=\frac{2}{9}UU'\Delta\varrho+f(U,\varrho,\nu,\Delta) \quad . \quad . \quad (46a)$$

so muss für $U'=0$ das Zusatzglied in den klassischen Ausdruck übergehen, d. h. es ist

$$f(U,\varrho,\nu,\Delta)=\psi\varrho U^2\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{1/4}=\tau_o \quad . \quad . \quad (47)$$

Somit lautet der vollständige Ausdruck von (46)

$$\tau=-UU'\Delta\varrho\left[\eta(1-\eta^{2/7})-\frac{2}{9}(1-\eta^{9/7})\right]+$$
$$\tau_o(1-\eta^{9/7}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

in welchem bemerkenswerter Weise nichts Willkürliches mehr vorkommt.

Ferner wird Gl. (45)

$$\Delta'=-\frac{U'}{U}\Delta+\frac{72}{7}\frac{\tau_o}{\varrho U^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48a)$$

Für den Fall, dass als Geschwindigkeitsgesetz der allgemeine Ansatz

$$u=U\eta^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48b)$$

gewählt würde, ergeben die gleichen Ueberlegungen als Ausdruck der Schubspannung

$$\tau=-UU'\Delta\varrho\left[\eta\left(1-\eta^{\frac{2}{n}}\right)-\frac{2}{2+n}\left(1-\eta^{\frac{2+n}{n}}\right)\right]+$$
$$\tau_o\left(1-\eta^{\frac{2+n}{n}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48c)$$

Dabei liefert die von Kármánsche Dimensionsbetrachtung

$$\tau_o=B^{-\frac{2n}{n+1}}\varrho U^2\left(\frac{\nu}{U\Delta}\right)^{\frac{2}{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad (48d)$$

worin die Konstante $B$ aus Versuchen abzuleiten wäre.

### Differentialgleichung des Temperaturverlaufes.

Der Temperaturverlauf betimmt die Wärmeleitung, die in der **Wärmegleichung** zum Vorschein kommt. Auf die Raumeinheit bezogen erhalten wir wie früher

$$dq_{\text{leit}}+dq_{\text{reib}}=\gamma c_v\,dT+Ap\frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}} \quad . \quad . \quad (49)$$

worin $\mathfrak{v}$ den Rauminhalt pro 1 kg bedeutet.