

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 89/90 (1927)
Heft: 12

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber Transversalschwingungen der Dampfturbinen-Laufradscheiben. — Zum Einsturz der Oderbrücke bei Gatz. — Wettbewerb Primarschulhaus mit Turnhalle in Muri bei Bern. — Strassenbahn und Autobus. — Mitteilungen: Eisenbahn-Hubbrücke über die Maas in Rotterdam. Dreiachsige englische Strassenbahnwagen. Corson-Legierungen. Ueber die Sicherungsarbeiten zur Erhaltung der West-

gruppe des Mainzer Domes. Eidgen. Technische Hochschule. Schweizer Mustermesse Basel. Zur Frage der neuen schweizer. Landeskarte. — Nekrologie: Walter Zuppinger. K. Weber. — Wettbewerbe: Schulhaus mit Turnhalle in Arosa. Bezirksschule Lenzburg. — Literatur. — Vereinsnachrichten: St. Galler Ingenieur- und Architekten-Verein. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. Sektion Bern des S.I.A. S.T.S.

Ueber Transversalschwingungen der Dampfturbinen-Laufradscheiben.

Von Dr. FR. DUBOIS, Schaffhausen.

Das Problem der Transversalschwingungen der Dampfturbinen-Radscheiben gilt mit Recht als verwickelte Aufgabe, die bis heute noch nicht erschöpfend behandelt worden ist. Für die Scheibe konstanter Dicke hat Kirchhoff in seiner berühmten Abhandlung in „Crelle's Journal“¹⁾, die exakte mathematische Lösung des Problems dargelegt, die von dem Zerfall der Differentialgleichung 4. Ordnung in zwei konjugierte 2. Ordnung ausgeht und auf Zylinderfunktionen führt. Für die Scheibe veränderlicher Dicke hat Stodola²⁾ eine auf die Berechnung der Deformationsenergie und der kinetischen Energie der gebogenen Scheibe beruhende, praktisch gut anwendbare Methode entwickelt. Als Früchte der Stodolaschen Lösung sind eine Reihe schöner, rechnerisch-praktischer Arbeiten entstanden, unter andern diejenige von Oehler³⁾. Schliesslich hat Hahn⁴⁾ ein Verfahren zur Berechnung der Schwingungszahl angedeutet, das die Eigenschaften der Integralgleichungen benutzt.

Trotz der fast zu erwartenden Aussichtslosigkeit des Unternehmens, haben wir die Neugierde gehabt, auf die vollständige Differentialgleichung der Kreisscheibe veränderlicher Dicke den Grundgedanken der Kirchhoff'schen Lösung anzuwenden, und gelangten dabei zu dem erfreulichen Ergebnis, dass der Vorgang Kirchhoff's innert gewisser Annäherungen für mehrere Dickengesetze auf eine Lösung in mathematisch-geschlossener Form führt. Diese wird durch bekannte Funktionen (Bessel'sche, hypergeometrische, und verwandte) dargestellt.

Diese Untersuchung bildet den Inhalt folgender Zeilen, die nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erheben, sondern nur die Grundzüge dieser Lösung darlegen sollen.

Biegungsgleichung der Scheibe veränderlicher Dicke.

Wir benutzen anfänglich der Zweckmässigkeit halber⁵⁾ rechtwinklige Koordinaten und beziehen die Scheibe auf ein System $oxyz$, dessen oz -Axe mit der Scheibenaxe, und dessen xy -Ebene mit der undeformierten Scheibenmittelfläche übereinstimmt.

Wir bezeichnen wie üblich mit σ die Normalspannungen und mit τ die Schubspannungen, und beachten dass, da es sich um eine Biegungsaufgabe handelt, die Spannungen sich aus je einem über dem Scheibenquerschnitt gleichmässig verteilten Anteil und je einem linear verlaufenden Anteil zusammensetzen, z. B.

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_{xb}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xyb}$$

(Index 0 bedeutet gleichmässig verteilt, Index b linear, von der Biegung herrührend).

Wir bezeichnen ferner mit Stodola die am Volumenelemente wirkenden Kräftepaare und Kräfte wie folgt:

M_1, M'_1, M_2, M'_2 = Biegungsmomente

(Momente der Normalspannungen σ_{xb} , σ_{yb})

K_1, K'_1, K_2, K'_2 = Drillungsmomente

(Momente der Schubspannungen τ_{xyb} , τ_{yxb})

S_1, S'_1, S_2, S'_2 = Vertikale Schubkräfte

(Resultierende der Schubspannungen τ_{xz_0} , τ_{yz_0})

N_1, N'_1, N_2, N'_2 = Horizontale Normalkräfte

(Resultierende der Normalspannungen σ_{x_0} , σ_{y_0})

T_1, T'_1, T_2, T'_2 = Horizontale Schubkräfte

(Resultierende der Schubspannungen τ_{xy_0} , τ_{yx_0})

¹⁾ Kirchhoff. „Crelle's Journal“, Bd. 40 (1850).

²⁾ Stodola. „S. B. Z.“, 1914, Bd. 63, S. 112 und „Dampfturbinen“, 5. und 6. Auflage.

³⁾ E. Oehler, „Krupp'sche Monatshefte“, 6. Jahrgang, Januar 1925, S. I und „Z. V. D. I.“, Bd. 69, Nr. 11, 14. März 1925, S. 335.

⁴⁾ E. Hahn. „S. B. Z.“, Bd. 87, Nr. 1, 2. Januar 1926, S. I.

Alsdann lauten die Gleichgewichtsgleichungen am Element $dxdy h$ (Abbildungen 1 und 2, Seite 150 u. 151):

1) Momentengleichung, bezogen auf Axe oy , bzw. ihre Ableitung nach x

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 K_2}{\partial y \partial x} dy - \frac{\partial S_1}{\partial x} dx = 0 \dots (1)$$

2) Momentengleichung, bezogen auf Axe ox , bzw. ihre Ableitung nach y

$$\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 K_1}{\partial x \partial y} dx - \frac{\partial S_2}{\partial y} dy = 0 \dots (2)$$

3) Kraftkomponentengleichung nach Richtung oz

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} dx + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy + \frac{\partial (N_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x})}{\partial x} dx + \frac{\partial (N_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y})}{\partial y} dy + \frac{\partial (T_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y})}{\partial x} dx + \frac{\partial (T_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x})}{\partial y} dx + \mu dx dy h \left(-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (3)$$

(ζ = Ausbiegung der Mittelfläche der Scheibe senkrecht zur xoy -Ebene, $\mu = \gamma/g$ = spezifische Masse des Materials).

Durch Addition von (1) + (2) + (3) erhält man sofort die Biegungsgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 K_2}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 K_1}{\partial x \partial y} dx + \\ & \frac{\partial (N_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x})}{\partial x} dx + \frac{\partial (N_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y})}{\partial y} dy + \frac{\partial (T_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y})}{\partial x} dx + \\ & \frac{\partial (T_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x})}{\partial y} dy - \mu dx dy h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \dots (4) \end{aligned}$$

Hierin ist in Abwesenheit der Spannung σ_z zu setzen:

$$M_1 = \frac{1}{6} dy h^2 \sigma_{xb} \max, \quad M_2 = \frac{1}{6} dx h^2 \sigma_{yb} \max$$

$$K_1 = \frac{1}{6} dy h^2 \tau_{yxb} \max, \quad K_2 = \frac{1}{6} dx h^2 \tau_{xyb} \max$$

$$N_1 = dy h \sigma_{x_0}, \quad N_2 = dx h \sigma_{y_0}$$

$$T_1 = dy h \tau_{xy_0}, \quad T_2 = dx h \tau_{yxb}$$

$$\sigma_{xb} \max = - \frac{E}{1 - v^2} (\zeta_1 + r \zeta_2) \frac{h}{2}$$

$$\sigma_{yb} \max = - \frac{E}{1 - v^2} (\zeta_2 + r \zeta_1) \frac{h}{2}$$

$$\tau_{yxb} \max = - G \omega \frac{h}{2}, \quad \tau_{xyb} \max = - G \omega \frac{h}{2}$$

wobei E = Elastizitätsmodul, G = Gleitmodul, $v = 1$: Poisson'sche Zahl, ζ_1 und ζ_2 die Krümmungsänderungen und ω die „Reckung“ bedeuten.

$$r_1 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}; \quad r_2 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}; \quad \omega = 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

Schiebt man alle diese Werte in (4) ein, und beachtet dass $G = \frac{E}{2(1+v)}$ ist, so erhält man die Differentialgleichung der Biegungsschwingung der Scheibe veränderlicher Dicke mit Zugbelastung in der Mittelfläche unter Einführung des Laplace'schen Operators $\mathcal{A}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(h^3 \mathcal{A}(\zeta)) - (1 - v) \left(\frac{\partial^2(h^3)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(h^3)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. \frac{2 \partial^2(h^3)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right) - \frac{12(1-v^2)}{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \sigma_{x_0} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(h \sigma_{y_0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \tau_{xy_0} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \tau_{yxb} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] = \\ & - \frac{12(1-v^2)}{E} \mu h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \dots \dots \dots \dots \quad (5) \end{aligned}$$

⁵⁾ Weil die vorkommenden zahlreichen Umrechnungen mit dem Laplace'schen Operator \mathcal{A} in rechtwinkligen Koordinaten viel symmetrischer und kürzer sind als in Polarkoordinaten.

⁶⁾ In Wirklichkeit ist der wahre Ausdruck der Reckung bei veränderlicher Dicke $\frac{1}{h} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right]$. Wir behalten aber, um die Gleichungen nicht noch komplizierter zu machen, den üblichen Ausdruck $\frac{2 \partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}$.