Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 89/90 (1927)

Heft: 12

Inhaltsverzeichnis

Band 89. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 12

Ueber Transversalschwingungen der Dampfturbinen-Laufradscheiben.

Von Dr. FR. DUBOIS, Schaffhausen.

Das Problem der Transversalschwingungen der Dampfturbinen-Radscheiben gilt mit Recht als verwickelte Aufgabe, die bis heute noch nicht erschöpfend behandelt worden ist. Für die *Scheibe konstanter Dicke* hat Kirchhoff in seiner berühmten Abhandlung in „Crelle's Journal"[1]), die exakte mathematische Lösung des Problems dargelegt, die von dem Zerfall der Differentialgleichung 4. Ordnung in zwei konjugierte 2. Ordnung ausgeht und auf Zylinderfunktionen führt. Für die *Scheibe veränderlicher Dicke* hat Stodola[2]) eine auf die Berechnung der Deformationsenergie und der kinetischen Energie der gebogenen Scheibe beruhende, praktisch gut anwendbare Methode entwickelt. Als Früchte der Stodola'schen Lösung sind eine Reihe schöner, rechnerisch-praktischer Arbeiten entstanden, unter andern diejenige von Oehler[3]). Schliesslich hat Hahn[4]) ein Verfahren zur Berechnung der Schwingungszahl angedeutet, das die Eigenschaften der Integralgleichungen benützt.

Trotz der fast zu erwartenden Aussichtslosigkeit des Unternehmens, haben wir die Neugierde gehabt, auf die vollständige Differentialgleichung der Kreisscheibe veränderlicher Dicke den Grundgedanken der Kirchhoff'schen Lösung anzuwenden, und gelangten dabei zu dem erfreulichen Ergebnis, dass der Vorgang Kirchhoff's innert gewisser Annäherungen für mehrere Dickengesetze auf eine Lösung in mathematisch-geschlossener Form führt. Diese wird durch bekannte Funktionen (Bessel'sche, hypergeometrische, und verwandte) dargestellt.

Diese Untersuchung bildet den Inhalt folgender Zeilen, die nicht den Anspruch auf Vollständigkeit erheben, sondern nur die Grundzüge dieser Lösung darlegen sollen.

Biegungsgleichung der Scheibe veränderlicher Dicke.

Wir benutzen anfänglich der Zweckmässigkeit halber[5]) rechtwinklige Koordinaten und beziehen die Scheibe auf ein System $oxyz$, dessen oz-Axe mit der Scheibenaxe, und dessen xy-Ebene mit der undeformierten Scheibenmittelfläche übereinstimmt.

Wir bezeichnen wie üblich mit σ die Normalspannungen und mit τ die Schubspannungen, und beachten dass, da es sich um eine Biegungsaufgabe handelt, die Spannungen sich aus je einem über dem Scheibenquerschnitt gleichmässig verteilten Anteil und je einem linear verlaufenden Anteil zusammensetzen, z. B.

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_{x_b}\,, \qquad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xy_b}$$

(Index o bedeutet gleichmässig verteilt, Index b linear, von der Biegung herrührend).

Wir bezeichnen ferner mit Stodola die am Volumenelemente wirkenden Kräftepaare und Kräfte wie folgt:

M_1, M'_1; M_2, M'_2 = Biegungsmomente (Momente der Normalspannungen σ_{x_b}, σ_{y_b})

K_1, K'_1; K_2, K'_2 = Drillungsmomente (Momente der Schubspannungen τ_{xy_b}, τ_{yx_b})

S_1, S'_1; S_2, S'_2 = Vertikale Schubkräfte (Resultierende der Schubspannungen τ_{xz_0}, τ_{yz_0})

N_1, N'_1; N_2, N'_2 = Horizontale Normalkräfte (Resultierende der Normalspannungen σ_{x_0}, σ_{y_0})

T_1, T'_1; T_2, T'_2 = Horizontale Schubkräfte (Resultierende der Schubspannungen τ_{xy_0}, τ_{yx_0})

Alsdann lauten die Gleichgewichtsgleichungen am Element $dx\,dy\,h$ (Abbildungen 1 und 2, Seite 150 u. 151):

1) Momentengleichung, bezogen auf Axe oy, bezw. ihre Ableitung nach x

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 K_2}{\partial y \partial x}dy - \frac{\partial S_1}{\partial x}dx = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

2) Momentengleichung, bezogen auf Axe ox, bezw. ihre Ableitung nach y

$$\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 K_1}{\partial x \partial y}dx - \frac{\partial S_2}{\partial y}dy = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

3) Kraftkomponentengleichung nach Richtung oz

$$\frac{\partial S_1}{\partial x}dx + \frac{\partial S_2}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(N_1\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(N_2\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial y}dy +$$
$$\frac{\partial\left(T_1\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(T_2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)}{\partial y}dx + \mu\,dx\,dy\,h\left(\frac{-\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (3)$$

(ζ = Ausbiegung der Mittelfläche der Scheibe senkrecht zur xoy-Ebene, $\mu = \gamma/g$ = spezifische Masse des Materials).

Durch Addition von (1) + (2) + (3) erhält man sofort die Biegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 K_2}{\partial y \partial x}dy + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 K_1}{\partial x \partial y}dx +$$
$$\frac{\partial\left(N_1\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(N_2\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(T_1\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)}{\partial x}dx +$$
$$\frac{\partial\left(T_2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)}{\partial y}dy - \mu\,dx\,dy\,h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hierin ist in Abwesenheit der Spannung σ_z zu setzen:

$$M_1 = {}^1/_6\,dy\,h^2\sigma_{x_b\,\max}\,, \quad M_2 = {}^1/_6\,dx\,h^2\sigma_{y_b\,\max}$$
$$K_1 = {}^1/_6\,dy\,h^2\tau_{xy_b\,\max}\,, \quad K_2 = {}^1/_6\,dx\,h^2\tau_{yx_b\,\max}$$
$$N_1 = dy\,h\,\sigma_{x_0}\,, \quad N_2 = dx\,h\,\sigma_{y_0}$$
$$T_1 = dy\,h\,\tau_{xy_0}\,, \quad T_2 = dx\,h\,\tau_{yx_0}$$
$$\sigma_{x_b\,\max} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2\right)\frac{h}{2}$$
$$\sigma_{y_b\,\max} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varkappa_2 + \nu\varkappa_1\right)\frac{h}{2}$$
$$\tau_{xy_b\,\max} = -G\omega\frac{h}{2}\,, \quad \tau_{yx_b\,\max} = -G\omega\frac{h}{2}$$

wobei E = Elastizitätsmodul, G = Gleitmodul, $\nu = 1$: Poisson'sche Zahl, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Krümmungsänderungen und ω die „Reckung" bedeuten.

$$r_1 = \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,; \quad r_2 = \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\,; \quad \omega = 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y}\ ^{6)}$$

Schiebt man alle diese Werte in (4) ein, und beachtet dass $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ist, so erhält man die Differenzialgleichung der Biegungschwingung der Scheibe veränderlicher Dicke mit Zugbelastung in der Mittelfläche unter Einführung des Laplace'schen Operators $\Delta(\;) = \frac{\partial^2(\;)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\;)}{\partial y^2}$:

$$\Delta(h^3\Delta\zeta) - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2(h^3)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(h^3)}{\partial y^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left.\frac{2\,\partial^2(h^3)}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y}\right) - \frac{12(1-\nu^2)}{E}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\sigma_{x_0}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(h\sigma_{y_0}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\tau_{xy_0}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\tau_{yx_0}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right] =$$
$$-\frac{12(1-\nu^2)}{E}\mu h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

---

[1]) Kirchhoff. „Crelle's Journal", Bd. 40 (1850).

[2]) Stodola. „S. B. Z.", 1914, Bd. 63, S. 112 und „Dampfturbinen", 5. und 6. Auflage.

[3]) E. Oehler. „Krupp'sche Monatshefte", 6. Jahrgang, Januar 1925, S. 1 und „Z. V. D. I.", Bd. 69, Nr. 11, 14. März 1925, S. 335.

[4]) E. Hahn. „S B. Z.", Bd. 87, Nr. 1, 2. Januar 1926, S. 1.

[5]) Weil die vorkommenden zahlreichen Umrechnungen mit dem Laplace'schen Operator Δ in rechtwinkligen Koordinaten viel symmetrischer und kürzer sind als in Polarkoordinaten.

[6]) In Wirklichkeit ist der wahre Ausdruck der Reckung bei veränderlicher Dicke $\frac{1}{h}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right]$. Wir behalten aber, um die Gleichungen nicht noch komplizierter zu machen, den üblichen Ausdruck $\frac{2\partial^2\zeta}{\partial x \partial y}$.