

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 87/88 (1926)
Heft: 1

Artikel: Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique
Autor: Hahn, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40817>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique. — Das Kirchgemeindehaus Enge in Zürich (mit Tafeln 1 bis 4). — Zur Berechnung der Gewölbe-Staumauern. — Korrespondenz. — Miscellanea: Ueber die Tagung der Rheinzentral-kommission im November 1925. Zweiflügelige Klappbrücke über den Washingtonsee-Kanal in Seattle. Vollbahnelektrifizierung in der Tschechoslowakei. Ausfuhr elektrischer

Energie. Verband Schweizerischer Transportanstalten. Eidgenössische Technische Hochschule. — Nekrologie: J. A. Brinell. — Konkurrenzen: Seebadanstalt und Strandbad in Kreuzlingen. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Sektion Solothurn des S. I. A. Basler Ingenieur- und Architekten-Verein. Maschineningenieur-Gruppe Zürich der G. E. P.

Band 87.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 1

Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique.

Par E. HAHN, Professeur à l'Université de Nancy.

1. Dans un mémoire sur la vitesse critique des arbres et la formule de Dunkerley, paru dans cette revue en novembre 1918, j'ai montré comment cette formule pouvait s'étendre sans difficulté au cas de masses continues et j'ai indiqué en note, qu'il y avait là le point de départ d'une détermination commode de la vitesse critique des arbres.

Un nouvel examen de la question m'a fait constater que la portée de ma remarque était beaucoup plus générale et, qu'en suivant la voie indiquée, on arrivait à la détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique vibrant sous l'effet d'une cause quelconque. C'est ce que je me propose d'établir dans ce travail.

2. Considérons tout d'abord le cas d'une pièce telle que la position d'une masse élémentaire puisse être définie à l'aide d'une seule coordonnée x . Ce cas comprend donc celui des arbres, celui des aubes de turbines et aussi celui des disques, lorsque par vibration ils affectent la forme d'une cloche. Le cas plus général d'une déformation avec diamètres nodaux sera envisagé plus loin.

Soit $y = Y \cos \lambda t$ (1)
l'élongation à un instant quelconque d'un point de masse dm ; cette élongation est comptée à partir de la position non déformée de la pièce. Dans la formule (1), Y désigne une fonction

$Y = f(x)$ (2)
qui définit la forme affectée par la pièce dans sa position de déformation maximum.

3. Désignons en général par dF_s la force qui sollicite la pièce au point d'abscisse $x = s$ et par α_{xs} le coefficient d'influence relatif à la pièce considérée et établi en tenant compte de la forme et des liaisons de celle-ci. Nous trouvons immédiatement pour la déformation au point x l'expression:

$$y = \int_{s=0}^{s=l} \alpha_{xs} dF_s \quad (3)$$

où les limites expriment que l'intégrale est à étendre à la pièce entière.

Si, simultanément, la pièce est sollicitée en s par un couple élémentaire dC_s , l'expression (3) comporte un terme de plus que l'on forme aisément en faisant intervenir les coefficients d'influence γ_{xs} relatifs aux couples. Il vient:

$$y = \int_{s=0}^{s=l} \alpha_{xs} dF_s + \int_{s=0}^{s=l} \gamma_{xs} dC_s \quad (4)$$

Comme on le verra par la suite, il est nécessaire de considérer aussi l'inclinaison de la ligne élastique; on peut former pour celle-ci une expression analogue à (4) en introduisant les coefficients d'influence β_{xs} et δ_{xs} des forces et des couples sur l'inclinaison τ de la ligne élastique. On trouve:

$$\tau = \int_{s=0}^{s=l} \beta_{xs} dF_s + \int_{s=0}^{s=l} \delta_{xs} dC_s \quad (5)$$

J'ai indiqué dans le mémoire précité comment les coefficients β , γ , δ se déduisent aisément des coefficients α ; il suffit de rappeler ici les résultats trouvés:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{xs} &= \frac{\partial \alpha_{xs}}{\partial x} \\ \gamma_{xs} &= \frac{\partial \alpha_{xs}}{\partial s} \\ \delta_{xs} &= \frac{\partial^2 \alpha_{xs}}{\partial x \partial s} \end{aligned} \right\} (6)$$

4. Supposons, pour commencer, que la pièce considérée n'est sollicitée par aucune force extérieure. Dans ce cas, dF_s et dC_s se réduisent aux forces et aux couples d'inertie résultant de la vibration. Soit M la masse de l'unité de longueur au point s et Θ , le moment d'inertie d'une tranche de longueur 1, par rapport à un axe perpendiculaire au plan xy et passant par le centre de gravité de cette tranche; nous pouvons écrire les relations:

$$dF_s = -y_s'' M ds, \quad dC_s = -\tau_s'' \Theta ds \quad . (7)$$

où le double accent désigne la dérivée seconde par rapport au temps et l'indice s spécifie qu'il s'agit de grandeurs relatives au point d'abscisse s . Mais

$$y_s'' = -\lambda^2 Y \cos \lambda t$$

$$\text{donc:} \quad dF_s = \lambda^2 M Y \cos \lambda t ds = \lambda^2 M y ds \quad . . . (8)$$

D'autre part,

$$\tau = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \tau'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (y'') = -\lambda^2 \tau$$

et par suite:

$$dC_s = \lambda^2 \Theta \tau_s ds \quad (9)$$

Si l'on porte les valeurs (8) et (9) dans (4) et (5) on arrive au système d'équations intégrales homogènes:

$$\left. \begin{aligned} y &= \lambda^2 \int_{s=0}^{s=l} [\alpha_{xs} M y_s + \gamma_{xs} \Theta \tau_s] ds \\ \tau &= \lambda^2 \int_{s=0}^{s=l} [\beta_{xs} M y_s + \delta_{xs} \Theta \tau_s] ds \end{aligned} \right\} . . . (10)$$

que l'on peut mettre aussi sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} y &= \lambda^2 l \int_0^1 [\alpha_{\xi\zeta} M y_\zeta + \gamma_{\xi\zeta} \Theta \tau_\zeta] d\zeta \\ \tau &= \lambda^2 l \int_0^1 [\beta_{\xi\zeta} M y_\zeta + \delta_{\xi\zeta} \Theta \tau_\zeta] d\zeta \end{aligned} \right\} . . (11)$$

à condition de poser

$$x = \xi l, \quad s = \zeta l.$$

On montre dans la théorie des équations intégrales qu'un tel système peut être remplacé par une équation unique:

$$\Phi(\xi) = \lambda^2 l \int_0^1 K(\xi, \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta \quad . . . (12)$$

à condition de choisir la fonction K de telle manière que:

$$\left. \begin{aligned} K(\xi, \zeta) &= \alpha_{\xi\zeta} M, & \text{pour } \begin{cases} 0 < \xi < 1 \\ 0 < \zeta < 1 \end{cases} \\ K(\xi, \zeta) &= \gamma_{\xi\zeta} \Theta, & \text{pour } \begin{cases} 0 < \xi < 1 \\ 1 < \zeta < 2 \end{cases} \\ K(\xi, \zeta) &= \beta_{\xi\zeta} M, & \text{pour } \begin{cases} 1 < \xi < 2 \\ 0 < \zeta < 1 \end{cases} \\ K(\xi, \zeta) &= \delta_{\xi\zeta} \Theta, & \text{pour } \begin{cases} 1 < \xi < 2 \\ 1 < \zeta < 2 \end{cases} \end{aligned} \right\} . (13)$$

et de poser

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\zeta) &= y_\zeta & \text{pour } 0 < \zeta < 1 \\ \Phi(\zeta) &= \tau_\zeta & \text{pour } 1 < \zeta < 2 \end{aligned} \right\} . . (14)$$

5. De même qu'un système de n équations linéaires et homogènes n'admet des solutions non toutes nulles que si le déterminant des coefficients des inconnues s'annule, l'équation (12) ne possède des solutions différentes de zéro que si une certaine série entière $D(\lambda^2 l)$ du paramètre $\lambda^2 l$ s'annule pour un certain nombre de valeurs du paramètre. Fredholm a démontré que cette série est de la forme

$$\left. \begin{aligned} D(\lambda^2 l) &= 1 - (\lambda^2 l) A_1 + \frac{(\lambda^2 l)^2}{1 \cdot 2} A_2 + \dots \\ &+ (-1)^p \frac{(\lambda^2 l)^p}{p!} A_p + \dots \end{aligned} \right\} (15)$$

Calculer les fréquences critiques revient donc à trouver les racines de l'équation $D(\lambda^2 l) = 0$.

Par un raisonnement qui consiste à étendre à un déterminant comportant un nombre infini de termes, le développement employé dans mon précédent mémoire pour un déterminant de n termes, on démontre d'autre part que le terme A_p a pour expression

$$A_p = \int_0^2 \int_0^2 \dots \int_0^2 K \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \end{matrix} \right) d\xi_1 \dots d\xi_p \quad (16)$$

où

$$K \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \end{matrix} \right)$$

désigne le déterminant symétrique d'ordre p formé avec p valeurs quelconques de la fonction K . En particulier on a

$$A_1 = \int_0^2 K(\xi, \xi) d\xi \quad (17)$$

et

$$A_2 = \int_0^2 \int_0^2 K \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2 \\ \xi_1, \xi_2 \end{matrix} \right) d\xi_1 d\xi_2 \quad (18)$$

D'après un théorème de Mr. Hadamard, le coefficient de $(\lambda^2 l)^n$ est inférieur en valeur absolue à

$$N^n \cdot 2^n \cdot \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$$

N étant une limite supérieure de $|K(\xi, \xi)|$. On voit aisément que dans le problème qui nous occupe, ces coefficients décroissent très rapidement. On pourra donc presque toujours, lorsqu'il s'agit de la première fréquence critique, négliger tous les termes, sauf le premier. On aura dans ces conditions la relation très simple

$$\lambda^2 = \frac{1}{l A_1} \quad (19)$$

c'est-à-dire, si l'on met pour A_1 sa valeur:

$$\lambda^2 = \frac{1}{\int_0^2 (\alpha_{\xi\xi} M + \delta_{\xi\xi} \Theta) d\xi} \quad (19 \text{ bis})$$

Cette relation se réduit à

$$\lambda^2 = \frac{1}{l \int_0^2 \alpha_{\xi\xi} M d\xi} \quad (19 \text{ ter})$$

dans le cas où l'effet des moments d'inertie Θ est négligeable. C'est ce qui se produit pour toutes les pièces rectilignes non chargées de masses additionnelles à grand moment d'inertie.

L'emploi des formules (19) ne nécessite que la détermination (par la méthode de Mohr, par exemple) des quelques valeurs des coefficients d'influence $\alpha_{\xi\xi}$ et $\delta_{\xi\xi}$ nécessaires pour tracer la courbe de la fonction $\alpha_{\xi\xi} M + \delta_{\xi\xi} \Theta$, puis une quadrature facile à effectuer graphiquement.

Les formules (19) constituent donc un moyen rapide et commode de détermination de la fréquence critique du premier ordre.

6. Reprenons maintenant la question dans le cas plus général où des forces extérieures données sollicitent la pièce concurrentement avec les forces d'inertie provenant de la vibration. Nous envisagerons ici le cas important au point de vue pratique où la pièce est sollicitée par des forces centrifuges dirigées parallèlement à l'axe des x et résultant d'une rotation de vitesse angulaire ω . Soit x_0 la distance de l'origine de la pièce à l'axe de rotation.

La masse $M ds$ située à la distance $(s + x_0)$ de cet axe, développe une force centrifuge $dF_s' = \omega^2 M (s + x_0) ds$ qui détermine un moment fléchissant $dC_s' = y_s dF_s'$. Ce moment tend généralement à redresser la pièce, par suite la flèche $\delta y'$ qu'il produit en x , $\delta y' = \gamma_{xs} dC_s'$, vient en diminution de celle créée par les forces d'inertie. Le second membre des équations (3) et (4) est donc à compléter dans le cas présent par le terme soustractif

$$-\int_0^l \gamma_{xs} dC_s'$$

De même, au second membre de (5) doit figurer le terme $-\int_0^l \delta_{xs} dC_s'$.

On est donc conduit au nouveau système d'équations:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^l [\lambda^2 \alpha_{xs} M y_s + \lambda^2 \gamma_{xs} \Theta \tau_s - y_s \omega^2 M (s + x_0) \gamma_{xs}] ds \\ \tau &= \int_0^l [\lambda^2 \beta_{xs} M y_s + \lambda^2 \delta_{xs} \Theta \tau_s - y_s \omega^2 M (s + x_0) \delta_{xs}] ds. \end{aligned}$$

Il est préférable d'introduire ici aussi les variables ξ et ζ et d'écrire en ordonnant les termes:

$$\begin{aligned} y &= \lambda^2 l \int_0^1 \left[\left[\alpha_{\xi\xi} - \frac{\omega^2}{\lambda^2} (\zeta l + x_0) \gamma_{\xi\xi} \right] M y_\xi + \gamma_{\xi\xi} \Theta \tau_\xi \right] d\xi \\ \tau &= \lambda^2 l \int_0^1 \left[\left[\beta_{\xi\xi} - \frac{\omega^2}{\lambda^2} (\zeta l + x_0) \delta_{\xi\xi} \right] M y_\xi + \delta_{\xi\xi} \Theta \tau_\xi \right] d\xi \end{aligned} \quad (20)$$

Nous retrouvons donc ici un système d'équations intégrales homogènes analogue au système (11) et qui se ré- tout exactement de la même manière. Les fréquences critiques sont données par les racines de la série $D(\lambda^2 l)$ correspondante. En particulier, si nous arrêtons le développement au premier terme en $\lambda^2 l$, nous aurons comme équation définissant la vitesse critique:

$$1 - \lambda^2 l A_1' = 0 \quad (21)$$

où, par analogie à (17)

$$A_1' = \int_0^1 (\alpha_{\xi\xi} M + \delta_{\xi\xi} \Theta) d\xi - \frac{\omega^2}{\lambda^2} \int_0^1 (\zeta l + x_0) \gamma_{\xi\xi} M d\xi \quad (22)$$

La première de ces intégrales n'est autre que la grandeur A_1 , définie par (17); désignons la seconde, pour abréger, par B , la relation (21) devient:

$$1 - \lambda^2 l \left(A_1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2} B \right) = 0$$

soit:

$$\lambda^2 l A_1 = 1 + \omega^2 B l$$

Mais $l A_1$ est l'inverse du carré de la fréquence critique de la pièce, lorsqu'elle n'est sollicitée par aucune force extérieure; soit λ' cette fréquence, il vient donc:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 = 1 + \omega^2 B l \quad (23)$$

relation intéressante puisqu'elle indique de combien la fréquence critique se trouve relevée du fait de l'action de la force centrifuge. Par exemple, si l'on détermine expérimentalement λ' pour une aube de turbine à vapeur, en opérant au repos, la formule 23 permet immédiatement de calculer (la détermination du facteur B ne présente pas de difficulté) quelle sera cette fréquence, lorsque l'aube sera montée sur une roue de vitesse angulaire donnée.

7. Considérons maintenant le cas d'un disque vibrant autour de plusieurs diamètres nodaux. Soient x et φ ou s et ψ les coordonnées polaires définissant la position d'un point quelconque du plan médian du disque. Nous supposons que l'épaisseur h est relativement faible, ce qui permet d'opérer comme si la masse du disque était concentrée sur le plan médian. Nous admettons que le disque tourne autour de son axe avec la vitesse angulaire ω et qu'il vibre autour de m diamètres nodaux. L'élongation $y_{s,\psi}$ de la vibration au point s, ψ , peut s'exprimer par une fonction de la forme

$$y_{s,\psi} = Y \cos \lambda t \cos m \psi, \quad (24)$$

l'accélération correspondante au même point,

$$y_{s,\psi}'' = -\lambda^2 Y \cos \lambda t \cos m \psi = -\lambda^2 y_{s,\psi}$$

détermine une force d'inertie

$$dF_{s,\psi} = -y'' dm = \lambda^2 y_{s,\psi} dm,$$

dm désignant la masse élémentaire située en s, ψ . Cette masse a pour expression, si l'on représente par μ la masse spécifique,

$$dm = \mu h s d\psi ds,$$

donc

$$dF' = \lambda^2 y_{s,\psi} \mu h s d\psi ds \quad (25)$$

D'autre part, la force centrifuge

$$dF'' = \omega^2 s dm = \omega^2 \mu h s^2 ds d\psi$$

développée par la rotation du disque, suscite au point s, ψ un moment fléchissant d'intensité:

$$dC = y_{s,\psi} \omega^2 \mu h s^2 ds d\psi \quad (26)$$

qui tend à atténuer les déformations γ . Faisons de nouveau usage des coefficients d'influence, soit $\alpha(x, \varphi; s, \psi)$ le coefficient relatif aux points x, φ et s, ψ pour les forces parallèles à l'axe de rotation et $\gamma(x, \varphi; s, \psi)$ celui relatif aux couples contenus dans les plans radiaux¹⁾; on peut écrire immédiatement pour la flèche $y_{x, \varphi}$ la relation:

$$y_{x, \varphi} = \iint [\alpha(x, \varphi; s, \psi) \lambda^2 h s - \gamma(x, \varphi; s, \psi) \omega^2 h s^2] \mu y_{s, \psi} ds d\psi \quad (27)$$

où l'intégrale double est à étendre à la masse entière du disque. Posons, pour abréger

$$\mu h s = z \quad (28)$$

et mettons λ^2 en évidence, nous obtenons finalement

$$y_{x, \varphi} = \lambda^2 \iint \left[\alpha(x, \varphi; s, \psi) - \frac{\omega^2}{\lambda^2} \gamma(x, \varphi; s, \psi) s \right] z y_{s, \psi} ds d\psi \quad (29)$$

Telle est l'équation intégrale homogène à deux variables qui régit le problème. Les propriétés de l'équation de Fredholm rappelées au paragraphe 5 peuvent être étendues à l'équation (29), de sorte que, dans ce cas aussi, la recherche des fréquences critiques revient à déterminer les valeurs de λ^2 qui annulent une certaine série entière analogue à (15):

$$D(\lambda^2) = 1 - \lambda^2 A_1 + \frac{\lambda^4}{1 \cdot 2} A_2 + \dots + (-1)^p \frac{\lambda^{2p}}{p!} A_p + \dots$$

Si, pour abréger, on écrit (29) sous la forme

$$y_{x, \varphi} = \lambda^2 \iint K(x, \varphi; s, \psi) y_{s, \psi} ds d\psi,$$

on vérifie facilement que les deux premiers coefficients A sont donnés par les relations suivantes:

$$A_1 = \iint K(x, \varphi; x, \varphi) dx d\varphi \quad (30)$$

$$A_2 = \iint \iint [K(x, \varphi; x, \varphi) K(s, \psi; s, \psi) - K^2(x, \varphi; s, \psi)] ds d\psi dx d\varphi \quad (31)$$

Il n'y aurait pas de difficultés à former les coefficients suivants sous forme d'intégrales multiples des déterminants d'ordres supérieurs que l'on peut tirer de la matrice constituée par les valeurs de la fonction $K(x, \varphi; s, \psi)$.

Pour simplifier l'écriture, les limites des intégrales n'ont pas été indiquées explicitement, elle sont à choisir de manière à correspondre à toute l'étendue du disque, cela pour chaque variable.

S'il s'agit de déterminer uniquement la première fréquence critique, on peut arrêter le développement au premier terme en λ^2 , et l'on a comme équation de condition

$$0 = 1 - \lambda^2 A_1 \quad (32)$$

ou encore, si l'on introduit dans (30) l'expression explicite de K ,

$$0 = 1 - \lambda^2 \iint \alpha(x, \varphi; x, \varphi) z dx d\varphi + \omega^2 \iint \gamma(x, \varphi; x, \varphi) x z dx d\varphi \quad (33)$$

Désignons respectivement par H_1 et H_2 les deux intégrales doubles du second membre, nous obtenons pour la première fréquence critique du disque, suivant qu'il est immobile ou qu'il tourne à la vitesse ω , les deux valeurs:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{H_1}} \quad (34)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 H_2}{H_1}} \quad (35)$$

On a par suite aussi:

$$\lambda_2 : \lambda_1 = \sqrt{1 + \omega^2 H_2} \quad (36)$$

8. Dès 1914, M. Stodola a indiqué une méthode de détermination des fréquences critiques basée sur un théorème de Rayleigh. Il est donc naturel de comparer les avantages respectifs de sa solution et de la mienne au point de vue des applications numériques.

On sait que la méthode Stodola nécessite le calcul du travail de déformation, du travail des forces centrifuges et de l'énergie cinétique de la pièce et cela pour trois formes au moins de la ligne élastique; d'après le théorème de Ragleigh, la fréquence cherchée est en effet un minimum dont la détermination nécessite la connaissance de trois valeurs au moins de λ .

¹⁾ Pour ces couples et pour ceux-là seulement la relation (6) entre les coefficients α et γ subsiste.

En ce qui concerne les pièces à axe rectiligne, telles que les aubes de turbines, par exemple, il ne paraît pas douteux que cet ensemble de calculs ne soit beaucoup plus long que l'application de la formule (15). L'emploi de la méthode de Mohr permet en effet de trouver rapidement les trois ou quatre valeurs du coefficient d'influence α_{xx} qui suffisent amplement pour en tracer avec une précision suffisante la courbe en fonction de x .

Il en va sans doute encore de même dans le cas des disques vibrant sans diamètres nodaux, quoique là déjà, la détermination des coefficients α soit plus difficile que pour les pièces droites.

Pour les disques vibrant avec diamètres nodaux, la méthode de M. Stodola garde l'avantage, car la détermination exacte des coefficients d'influence se heurte à de grandes difficultés.

Néanmoins les formules (34) et (35) conservent leur intérêt. Tout d'abord, elles montrent nettement quels sont les facteurs essentiels qui déterminent l'ordre de grandeur de la fréquence critique. Elles facilitent aussi l'étude expérimentale de la question. Au lieu d'avoir à entreprendre des essais compliqués sur des disques en rotation, il suffira désormais de déterminer quelques valeurs du coefficient $\alpha(x, \varphi; x, \varphi)$ par des essais de flexion des disques au repos et sollicités par des charges concentrées convenablement distribuées. Ces formules se prêtent enfin à une évaluation rapide de λ dont il est parfois utile de connaître l'ordre de grandeur, sans être obligé de recourir à de trop longs calculs.

Dans ce but, on peut en effet décomposer le disque en anneaux concentriques, indépendants les uns des autres, et traiter chaque secteur compris entre deux diamètres nodaux consécutifs comme un prisme encastré à ses deux extrémités. La détermination des coefficients α redevient ainsi facile et le calcul des intégrales H_1 et H_2 ne présente plus de difficultés. Il va sans dire qu'en opérant ainsi, on exagère la flexibilité du disque et, par suite, on obtient une valeur de λ certainement inférieure à la réalité. La connaissance de cette limite inférieure n'en sera pas moins utile, surtout si des calculs comparatifs effectués dans quelques cas concrets venaient fournir des indications quant à l'ordre de grandeur de l'écart entre la valeur exacte de λ et celle fournie par le calcul approché¹⁾.

9. Dans ce travail, on n'a envisagé que la première fréquence critique et arrêté par suite le développement des séries D au premier terme en λ^2 . Il est évident que pour obtenir les fréquences critiques des ordres suivants, il suffit en principe de prendre un nombre convenable de termes dans le développement. Le calcul se complique naturellement beaucoup; pour les pièces droites, cependant, la détermination de la seconde fréquence critique demeure relativement aisée.

Mon mémoire de 1918 contenait une discussion au sujet de l'erreur commise sur λ^2 du fait de la suppression des termes contenant les puissances supérieures. Elle est naturellement applicable ici. Cette erreur ne dépasse pas quelques centièmes et n'a aucune importance pratique.

10. Je voudrais encore en terminant faire une remarque au sujet de la relation qui existe entre la fréquence critique d'un arbre et le nombre de tours critique. Dans les notes complémentaires (Anhang) ajoutées à la 6^{me} édition allemande de son ouvrage sur les turbines à vapeur²⁾, M. Stodola signale la différence qui existe entre ces deux grandeurs dans le cas où l'arbre est chargé de masses dont le moment d'inertie Θ n'est pas négligeable. Il montre que la fréquence critique est plus petite que le nombre de tours critique. Ce fait résulte immédiatement de nos équations et de celles établies dans mon mémoire de 1918. La

¹⁾ Faute de temps et d'aide, l'auteur n'a pu entreprendre de calculs comparatifs de ce genre. Il serait reconnaissant aux spécialistes et aux bureaux d'études de maisons de construction qui pourraient être amenés à en faire, de vouloir bien lui en communiquer les résultats.

²⁾ Voir aussi 2^{me} édition française.

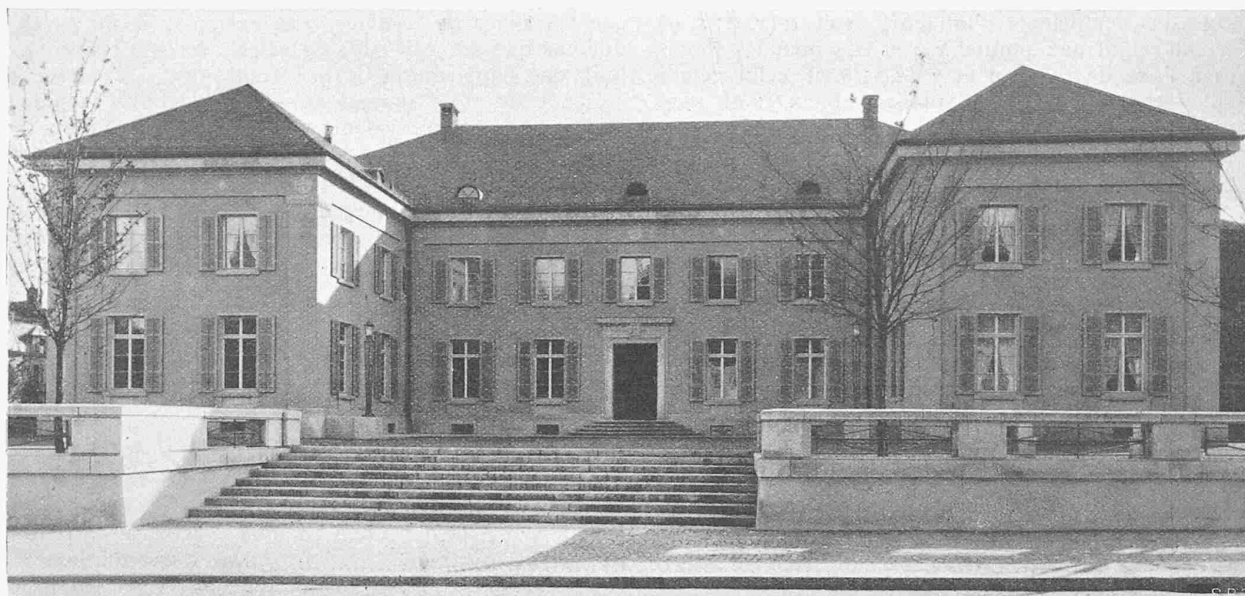


Abb. 5. Kirchgemeindehaus Enge in Zürich. Haupteingangseite (Nordfront) an der Bederstrasse.

fonction H , qui figure au dénominateur de la formule (19 bis) se compose des deux termes additifs

$$l \int_0^1 a_{\xi\xi} M d\xi \quad \text{et} \quad l \int_0^1 \delta_{\xi\xi} \Theta d\xi.$$

Si, au contraire, on traite le problème de la vitesse critique (voir le mémoire de 1918 cité précédemment), on

constate que le second figure avec le signe —, on a donc

$$\omega_c^2 = \frac{1}{l \int_0^1 (a_{\xi\xi} M - \delta_{\xi\xi} \Theta) d\xi} \quad \dots (37)$$

La différence entre λ et ω_c apparaît donc immédiatement, on a

$$\frac{\lambda^2}{\omega_c^2} = \frac{\int_0^1 (a_{\xi\xi} M - \delta_{\xi\xi} \Theta) d\xi}{\int_0^1 (a_{\xi\xi} M + \delta_{\xi\xi} \Theta) d\xi} \cong 1 - 2 \frac{\int_0^1 \delta_{\xi\xi} \Theta d\xi}{\int_0^1 a_{\xi\xi} M d\xi} \quad (38)$$

Cette formule met mieux en évidence que celle de M. Stodola les facteurs qui exercent une influence sur le rapport $\lambda : \omega_c$, qu'elle permet de calculer rapidement. Les raisons physiques de cette différence apparaissent aussi nettement. Dans la pièce vibrante, les couples d'inertie ajoutent leur action à celle des forces d'inertie, tandis que dans le cas de l'arbre, les couples créés par l'inclinaison des masses tendent à redresser l'arbre; les déformations qu'ils produisent viennent en diminution de celles dues aux forces centrifuges.

11. En dehors de l'intérêt que paraissent présenter, à divers égards, les formules publiées ici, celui de la méthode utilisée me semble justifier une dernière remarque. Je n'ai pas connaissance que les équations intégrales aient jamais été utilisées à la résolution de problèmes techniques. Le présent exemple montre que, dans certains cas, elles sont susceptibles de rendre à l'ingénieur aussi, de précieux services.

Das Kirchgemeindehaus Enge in Zürich.

Architekten PFLEGHARD & HÄFELI, Zürich.

(Mit Tafeln 1 bis 4.)

Das Charakteristikum der Bauaufgabe eines „Kirchgemeindehauses“ ist ihre Vieldeutigkeit, und die Unklarheit selbst der Bauherrschaft darüber, was eigentlich alles in einem solchen Hause vorsichgehen soll, nach welcher Seite sich der Betrieb entwickeln wird. Besonders der grosse Saal ist ein nur negativ zu definierendes Lokal: er ist als Saal einer Kirch-Gemeinde natürlich nicht bloss ein beliebiges Vergnügungsort, er wird also eine gewisse Würde besitzen müssen, andererseits ist er aber auch kein Betsaal. Eine neutrale, ruhig-unaufdringliche Haltung ist also wohl das Gegebene, und von Fall zu Fall können dann die entscheidenden Akzente nach irgend einer Richtung durch abnehmbare Dekorationen u. dergl. gegeben werden. Ferner

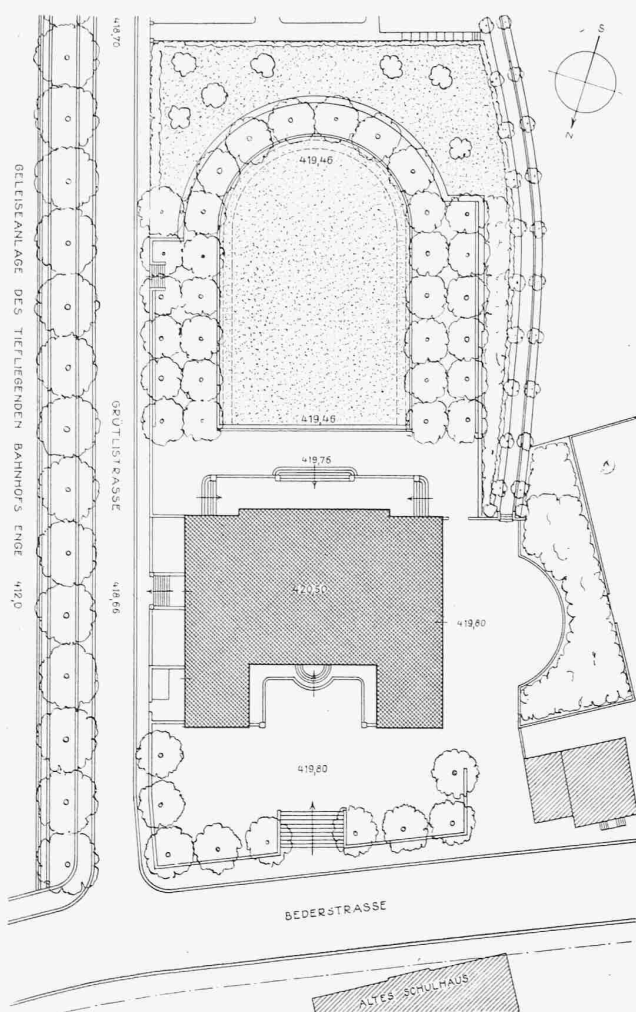


Abb. 1. Lageplan des Kirchgemeindehauses Enge. — Masstab 1 : 1000.