Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 87/88 (1926)
Heft: 1

Inhaltsverzeichnis

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique. — Das Kirchgemeindehaus Enge in Zürich (mit Tafeln 1 bis 4). — Zur Berechnung der Gewölbe-Staumauern. — Korrespondenz. — Miscellanea: Ueber die Tagung der Rheinzentralkommission im November 1925. Zweiflüglige Klappbrücke über den Washingtonsee-Kanal in Seattle. Vollbahnelektrifizierung in der Tschechoslovakei. Ausfuhr elektrischer Energie. Verband Schweizerischer Transportanstalten. Eidgenössische Technische Hochschule. — Nekrologie: J. A. Brinell. — Konkurrenzen: Seebadanstalt und Strandbad in Kreuzlingen. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Sektion Solothurn des S. I. A. Basler Ingenieur- und Architekten-Verein. Maschineningenieur-Gruppe Zürich der G. E. P.

Band 87. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 1

Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique.

Par E. HAHN, Professeur à l'Université de Nancy.

1. Dans un mémoire sur la vitesse critique des arbres et la formule de Dunkerley, paru dans cette revue en novembre 1918, j'ai montré comment cette formule pouvait s'étendre sans difficulté au cas de masses continues et j'ai indiqué en note, qu'il y avait là le point de départ d'une détermination commode de la vitesse critique des arbres.

Un nouvel examen de la question m'a fait constater que la portée de ma remarque était beaucoup plus générale et, qu'en suivant la voie indiquée, on arrivait à la détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique vibrant sous l'effet d'une cause quelconque. C'est ce que je me propose d'établir dans ce travail.

2. Considérons tout d'abord le cas d'une pièce telle que la position d'une masse élémentaire puisse être définie à l'aide d'une seule coordonnée x. Ce cas comprend donc celui des arbres, celui des aubes de turbines et aussi celui des disques, lorsque par vibration ils affectent la forme d'une cloche. Le cas plus général d'une déformation avec diamètres nodaux sera envisagé plus loin.

Soit
$$y = Y \cos \lambda t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
l'élongation à un instant quelconque d'un point de masse dm; cette élongation est comptée à partir de la position non déformée de la pièce. Dans la formule (1), Y désigne une fonction
$$Y = f(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
qui définit la forme affectée par la pièce dans sa position de déformation maximum.

3. Désignons en général par dF_s la force qui sollicite la pièce au point d'abscisse $x = s$ et par α_{xs} le coefficient d'influence relatif à la pièce considérée et établi en tenant compte de la forme et des liaisons de celle-ci. Nous trouvons immédiatement pour la déformation au point x l'expression:
$$y = \int_{s=0}^{s=l} \alpha_{xs}\, dF_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
où les limites expriment que l'intégrale est à étendre à la pièce entière.

Si, simultanément, la pièce est sollicitée en s par un couple élémentaire dC_s, l'expression (3) comporte un terme de plus que l'on forme aisément en faisant intervenir les coefficients d'influence γ_{xs} relatifs aux couples. Il vient:
$$y = \int_{s=0}^{s=l} \alpha_{xs}\, dF_s + \int_{s=0}^{s=l} \gamma_{xs}\, dC_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
Comme on le verra par la suite, il est nécessaire de considérer aussi l'inclinaison de la ligne élastique; on peut former pour celle-ci une expression analogue à (4) en introduisant les coefficients d'influence β_{xs} et δ_{xs} des forces et des couples sur l'inclinaison τ de la ligne élastique. On trouve:
$$\tau = \int_{s=0}^{s=l} \beta_{xs}\, dF_s + \int_{s=0}^{s=l} \delta_{xs}\, dC_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
J'ai indiqué dans le mémoire précité comment les coefficients β, γ, δ se déduisent aisément des coefficients α; il suffit de rappeler ici les résultats trouvés:
$$\left.\begin{aligned} \beta_{xs} &= \frac{\partial \alpha_{xs}}{\partial x} \\ \gamma_{xs} &= \frac{\partial \alpha_{xs}}{\partial s} \\ \delta_{xs} &= \frac{\partial^2 \alpha_{xs}}{\partial x\, \partial s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

4. Supposons, pour commencer, que la pièce considérée n'est sollicitée par aucune force extérieure. Dans ce cas, dF_s et dC_s se réduisent aux forces et aux couples d'inertie résultant de la vibration. Soit M la masse de l'unité de longueur au point s et Θ, le moment d'inertie d'une tranche de longueur 1, par rapport à un axe perpendiculaire au plan xy et passant par le centre de gravité de cette tranche; nous pouvons écrire les relations:
$$dF_s = -y_s''\, M\, ds, \qquad dC_s = -\tau_s''\, \Theta\, ds \quad . \quad (7)$$
où le double accent désigne la dérivée seconde par rapport au temps et l'indice s spécifie qu'il s'agit de grandeurs relatives au point d'abscisse s. Mais
$$y_s'' = -\lambda^2 Y \cos \lambda t$$
donc:
$$dF_s = \lambda^2 M Y \cos \lambda t\, ds = \lambda^2 M y\, ds \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$
D'autre part,
$$\tau = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \tau'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y'') = -\lambda^2 \tau$$
et par suite:
$$dC_s = \lambda^2 \Theta \tau_s\, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$
Si l'on porte les valeurs (8) et (9) dans (4) et (5) on arrive au système d'équations intégrales homogènes:
$$\left.\begin{aligned} y &= \lambda^2 \int_{s=0}^{s=l} [\alpha_{xs} M y_s + \gamma_{xs} \Theta \tau_s]\, ds \\ \tau &= \lambda^2 \int_{s=0}^{s=l} [\beta_{xs} M y_s + \delta_{xs} \Theta \tau_s]\, ds \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$
que l'on peut mettre aussi sous la forme:
$$\left.\begin{aligned} y &= \lambda^2 l \int_0^1 [\alpha_{\xi\zeta} M y_\zeta + \gamma_{\xi\zeta} \Theta \tau_\zeta]\, d\zeta \\ \tau &= \lambda^2 l \int_0^1 [\beta_{\xi\zeta} M y_\zeta + \delta_{\xi\zeta} \Theta \tau_\zeta]\, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$
à condition de poser
$$x = \xi l, \quad s = \zeta l.$$

On montre dans la théorie des équations intégrales qu'un tel système peut être remplacé par une équation unique:
$$\Phi(\xi) = \lambda^2 l \int_0^2 K(\xi, \zeta)\, \Phi(\zeta)\, d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$
à condition de choisir la fonction K de telle manière que:
$$\left.\begin{aligned} K(\xi,\zeta) &= \alpha_{\xi\zeta} M, && \text{pour } \begin{cases} 0 < \xi < 1 \\ 0 < \zeta < 1 \end{cases} \\ K(\xi,\zeta) &= \gamma_{\xi\zeta} \Theta, && \text{pour } \begin{cases} 0 < \xi < 1 \\ 1 < \zeta < 2 \end{cases} \\ K(\xi,\zeta) &= \beta_{\xi\zeta} M, && \text{pour } \begin{cases} 1 < \xi < 2 \\ 0 < \zeta < 1 \end{cases} \\ K(\xi,\zeta) &= \delta_{\xi\zeta} \Theta, && \text{pour } \begin{cases} 1 < \xi < 2 \\ 1 < \zeta < 2 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13)$$
et de poser
$$\left.\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= y_\zeta && \text{pour } 0 < \zeta < 1 \\ \Phi\zeta &= \tau_\zeta && \text{pour } 1 < \zeta < 2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

5. De même qu'un système de n équations linéaires et homogènes n'admet des solutions non toutes nulles que si le déterminant des coefficients des inconnues s'annule, l'équation (12) ne possède des solutions différentes de zéro que si une certaine série entière $D(\lambda^2 l)$ du paramètre $\lambda^2 l$ s'annule pour un certain nombre de valeurs du paramètre. Fredholm a démontré que cette série est de la forme
$$\left.\begin{aligned} D(\lambda^2 l) = 1 - (\lambda^2 l) A_1 + \frac{(\lambda^2 l)}{1 \cdot 2} A_2 + \ldots\ldots \\ + (-1)^p \frac{(\lambda^2 l)^p}{p!} A_p + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (15)$$