

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 87/88 (1926)
Heft: 16

Artikel: Mechano-statische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme
Autor: Hofacker, Karl
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-40877>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

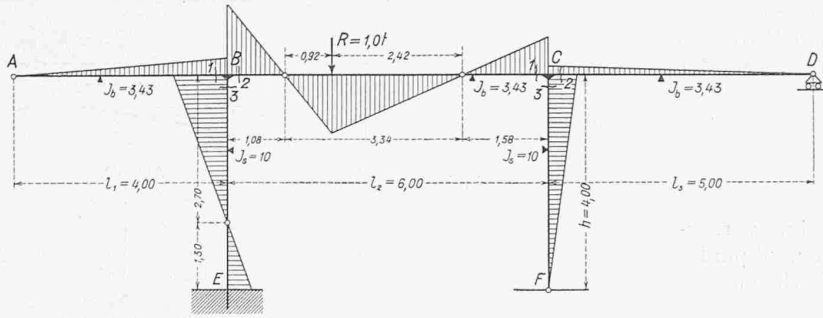


Abb. 38.

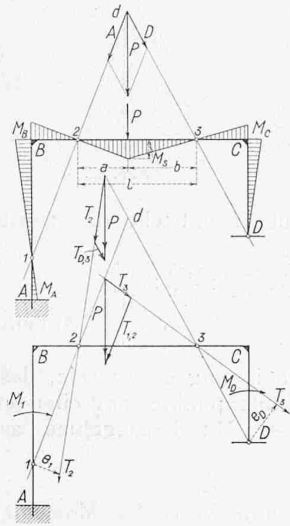


Abb. 35 und 36.

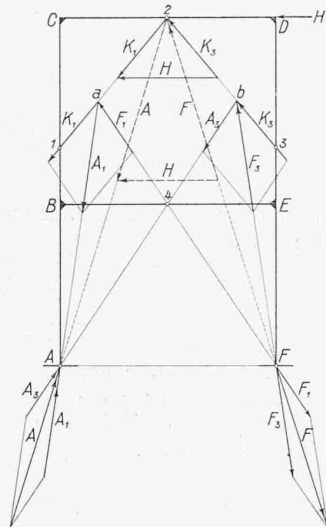


Abb. 37.

spiele 1 und 2, und das folgende Beispiel 3 (Abb. 35). Der durch die Einzellast P beanspruchte Rahmen weist die Momenten-Nullpunkte 1, 2 und 3 auf, durch die der Rahmen in lauter statisch bestimmte Systeme zerlegt wird. Unter der Einzellast P ist für den einfachen Balken 2-3 das Moment $M_s = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$. Die Eckmomente M_B und M_C ergeben sich durch Rückwärtsverlängern der Momentenlinie S_2 bzw. S_3 , das Einspannmoment M_A erhält man analog durch die Weiterführung der Momentenlinie von M_B durch den Nullpunkt 1 nach A.

Wie schon im zweiten Beispiel gezeigt wurde, können solche Systeme auch als kombinierte Dreigelenkbogen aufgefasst werden, so, dass einmal der Teil 123, und das andere Mal der Teil 23D wie ein Dreigelenkbogen wirkt, wobei der Stab 23 einen gemeinsamen Bestandteil beider Bogen darstellt. Dass das System nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn sich die Reaktionen der unbelasteten Scheiben auf der gegebenen Einzellast schneiden, zeigt Abb. 36. Die Kraft P liege ausserhalb (links) des Schnittpunktes d der Reaktionen. Fassen wir den Teil 123 als Dreigelenkbogen auf, so sind $T_{1,2}$ und T_3 die entsprechenden Kämpferdrücke. Die Scheibe 3D wird belastet durch T_3 , welche Kraft in Bezug auf Gelenk D ein Moment $T_3 \cdot e_D = M_D$ ausübt, d. h. das als Viergelenkbogen wirkende System erlaubt endliche Drehungen. Gleiches gilt, wenn der Teil 23D als Dreigelenkbogen vorausgesetzt wird; der Kämpferdruck T_2 am Hebelarm e_1 dreht die Scheibe 12 um den Punkt 1.

Selbst mehrfache Rahmen, wie z. B. der in Abb. 37 dargestellte zweistielige Stockwerkrahmen, lassen sich für gewisse Belastungen auf Dreigelenksysteme zurückführen. In der genannten Abbildung 37 sind das Netzbild und die Momenten-Nullpunkte des Rahmens dargestellt für die Belastung durch eine Horizontalkraft H in Höhe des oberen Riegels. Die Zerlegung von H im Scheitelgelenk 2 des Dreigelenkbogens 123 in die Richtungen 12 und 23 liefert die Kräfte K_1 und K_3 , die ihrerseits auf den untern Dreigelenkbogen A4F wirken. In den Punkten a und b findet die Zerlegung der oberen Kämpferdrücke in die Komponenten A_1 und F_1 bzw. A_3 und F_3 der Kämpferdrücke A und F des untern Dreigelenkbogens statt. Die letztgenannten schneiden sich bei genauer Konstruktion in 2 auf der Horizontalkraft H , ihre Resultierende muss wieder H ergeben. Ist der Rahmen neben der Belastung auch noch in Bezug auf Trägheitsmomente symmetrisch, so liegen die Momenten-Nullpunkte 1 und 3 gleich hoch und die Punkte 2 und 4 in Riegelmitte (Verhältnisse, die der Abb. 37 zu Grunde liegen).

II. Stabsysteme, die nicht statisch bestimmt werden.

a) Stabsysteme, bei denen keine Knotenpunkt-Verschiebungen auftreten. Das feste Lager A des in Abb. 38 skizzierten Rahmens nimmt die horizontalen Komponenten der auf den Rahmen wirkenden Kräfte auf, weshalb eine Verschiebung der Knotenpunkte nicht möglich ist. Die Momente des mittleren Feldes BC lassen sich nach dem früher gesagten ohne weiteres bestimmen, teils als solche eines einfachen Balkens, teils als Momente von Konsolträgern. Fortgeführt werden dann die Eckmomente in B und C im Verhältnis der Steifigkeit der anschliessenden Stäbe. Vorausgesetzt, dass hier der Einfluss der stets kleinen Verschiebungen der Momenten-Nullpunkte vernachlässigt werde, und a die Länge vom untersuchten Knotenpunkt bis zum nächsten Momenten-Nullpunkt bedeute, ist für jeden Stab die Steifigkeit $\frac{J}{a}$, J das Trägheitsmoment des Stabes darstellend. Gelenklager und Rollenlager sind bekanntlich gleichbedeutend mit Momenten-Nullpunkten.

In B sei das Konsolmoment M_{B_2} bereits berechnet. Es handelt sich nun darum, das Moment weiterzuleiten in die Stäbe BA und BE, d. h. die Momente M_{B_1} und M_{B_3} .

matorenkessel mit einem leichten Deckel abgeschlossen. Beim Auskochen unter Vakuum wird ein besonderer druckfester und mit dem Kessel gut abdichtbarer Deckel aufgesetzt. Zur Bestimmung der Isolierfähigkeit des Oels ist ein Prüftransformator von 3 kVA Leistung und für 0 bis 75 000 Volt Sekundärspannung aufgestellt. Die Regulierung der Spannung erfolgt vermittelst eines Induktionsreglers. Das Oel-Laboratorium enthält ferner alle Apparate, die zur raschen Bestimmung der physikalischen und chemischen Eigenschaften des Oels erforderlich sind.

(Fortsetzung folgt.)

Mechano-statische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme.

Von Ing. KARL HOFACKER, Luzern.

(Fortsetzung von Seite 193.)

Unter dem Titel: „Das Arbeiten mit dem Nupubest-Gerät“ veröffentlicht Ing. Rieckhof in der Zeitschrift „Der Bauingenieur“ vom 22. Januar an Hand interessanter Skizzen weitere Erkenntnisse für die Handhabung von Modellversuchen nach seinem in letzter Nummer besprochenen Verfahren, indem er in klarer Weise die auftretenden Fälle gruppiert. Grundsätzlich lassen sich die Tragwerke in zwei Hauptgruppen trennen, wovon die eine jene Systeme umfasst, die durch die Momenten-Nullpunkte so zerlegt werden können, während die andere alle jene Systeme vereinigt, die nach der Fixierung der Momenten-Nullpunkte noch der Steifigkeits-Verhältnisse der Stäbe benötigen, um die weitere Momenten-Ermittlung zu ermöglichen. Diese zweite Hauptgruppe zerfällt in die beiden Untergruppen: a) Stabsysteme, bei denen keine Knotenpunkt-Verschiebungen auftreten, und b) Stabsysteme, bei denen solche auftreten.

I. Stabsysteme, die statisch bestimmt werden.

Die Hauptgruppe I umfasst eine sehr grosse Anzahl von Stabsystemen, so die beiden früher betrachteten Bei-

zu bestimmen. Die Steifigkeit des Stabes BA beträgt nach obigem: $J/a = 3,43/4,00 = 0,86$, jene des Stabes BE $10/2,70 = 3,70$; die Summe der beiden Werte ist 4,56. Es sei der Wert von M_{B_2} zu 0,782 ermittelt worden.

Dann ist
$$M_{B_1} = \frac{0,782 \cdot 0,86}{4,56} = 0,148 \text{ mt}$$

$$M_{B_3} = \frac{0,782 \cdot 3,70}{4,56} = 0,634 \text{ mt}$$

Um die Aufgabe allgemein zu lösen, d. h. ohne voraussetzen zu müssen, dass der Einfluss der Momentennullpunkt-Verschiebung vernachlässigt werden dürfe, überlegen wir folgendermassen:

In Systemen mit unverschieblichen Knotenpunkten sind die Stabdrehwinkel Null, der Knotendrehwinkel eines Knotenpunktes mithin gleich den Tangentendrehwinkel aller anschliessenden Stäbe. Der Tangentendrehwinkel berechnet sich als Auflagerkraft eines mit der reduzierten Momentenfläche belasteten, einfachen Balkens. Wir berechnen für den Stab AB (Abb. 39) den Tangentendrehwinkel in A,

$$\tau_A = \frac{1}{l EJ} \left(\frac{M_A \cdot a}{2} \cdot (b + 2/3 a) - \frac{M_B \cdot b}{2} \cdot b/3 \right)$$

$$M_B = M_A \cdot \frac{b}{a}$$

$$\tau_A = \frac{M_A}{6 l EJ} (3ab + 2a^2 - \frac{b^3}{a})$$

Der Tangentendrehwinkel eines Stabes mit Gelenk oder Rollenlager am Ende ist ein Spezialfall des hier abgeleiteten, und wird für $b = 0$ also $a = l$ zu

$$\tau = \frac{M}{3 EJ} \cdot a$$

Für den Knotenpunkt B in Abb. 38 erhält man durch Gleichsetzung der Tangentendrehwinkel der Stäbe BE (allgem. Fall) und BA (Spezialfall) das Verhältnis der Momente M_{B_1} und M_{B_3}

$$M_{B_1} : M_{B_3} = \frac{J_b}{I_1} : \frac{2 h J_s}{3ab + 2a^2 - \frac{b^3}{a}}$$

Die Brüche des zweiten Verhältnisses stellen nun die genauen Steifigkeitswerte dar, und zwar der erste für Stäbe mit Gelenken am Ende und der zweite für Stäbe mit Momenten-Nullpunkten. Zum Vergleich wollen wir die oben, in vereinfachter Form, berechneten Momente nach der genauen Lösung bestimmen: Die Steifigkeit des Stabes BE beträgt

$$\frac{2 \cdot 4,00 \cdot 10}{3 \cdot 1,30 \cdot 2,70 + 2 \cdot 2,70^2 - \frac{1,3^3}{2,70}} = 3,30$$

Totale Steifigkeit $0,86 + 3,30 = 4,16$

$$M_{B_1} = \frac{0,782 \cdot 0,86}{4,16} = 0,162 \text{ mt}$$

$$M_{B_3} = \frac{0,782 \cdot 3,30}{4,16} = 0,620 \text{ mt}$$

Wir erkennen, dass der genaue Wert von M_{B_1} um 9% vergrössert wurde, während jener für M_{B_3} um 2% kleiner ausfällt.

b) Stabsysteme, bei denen Knotenpunkt-Verschiebungen auftreten. Auch hier lassen sich die Momente des belasteten Stabes ohne weiteres bestimmen; die übrigen Momente ermitteln sich auf Grund folgender Ueberlegungen:

Stellt die Abb. 40 die Biegelinie eines beliebigen Stabstückes mit zugehöriger Momentenfläche dar, so berechnet sich die Durchbiegung y des Stabes in G senkrecht zur Tangente in F nach dem allgemeinen Ausdruck

$$y = \frac{M \cdot x}{2} \cdot \frac{2}{3} x \cdot \frac{1}{EJ}$$

aus dem die erste Grundgleichung folgt:

$$M = \frac{3 y EJ}{x^2}$$

In Abb. 41 greifen wir einen Knotenpunkt eines Stabsystems heraus und erkennen die Biegelinien der einzelnen Stäbe. Abb. 42 zeigt die entsprechende Momentenfläche. Durch Anwendung der ersten Grundgleichung können wir das Verhältnis der Knotenpunktmomente aufstellen:

$$M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = \frac{3 y_1 E_1 J_1}{x_1^2} : \frac{3 y_2 E_2 J_2}{x_2^2} : \frac{3 y_3 E_3 J_3}{x_3^2} : \frac{3 y_4 E_4 J_4}{x_4^2}$$

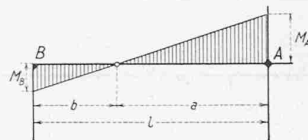


Abb. 39.

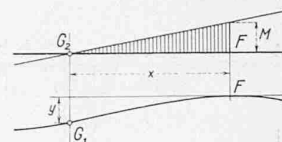


Abb. 40.

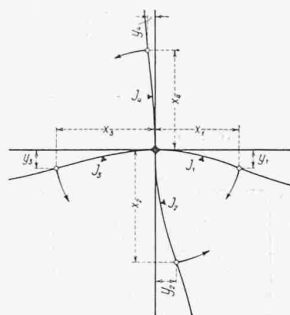


Abb. 41.

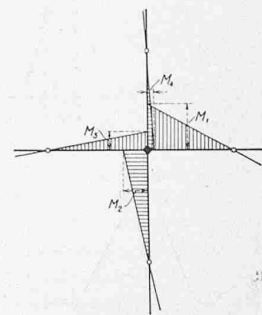


Abb. 42.

Für konstanten Elastizitätsmodul E entsteht die zweite Grundgleichung

$$M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = \frac{y_1 J_1}{x_1^2} : \frac{y_2 J_2}{x_2^2} : \frac{y_3 J_3}{x_3^2} : \frac{y_4 J_4}{x_4^2}$$

Sowohl für die Längenmasse als auch für die Trägheitsmomente sind nur Verhältniszahlen erforderlich.

Zur Kontrolle muss die Bedingung erfüllt sein, dass die Summe aller an einem Knotenpunkte angreifenden Momente gleich Null sein muss. Mit Bezugnahme auf Abb. 42 ist somit:

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4$$

Setzen wir hier voraus, der absolute Wert des Momentes M_1 z. B. sei bekannt, dann gelingt es uns, durch Zerteilen von M_1 nach Massgabe der Steifigkeitswerte der Stäbe, die Grösse der andern Momente zu ermitteln.

Es sind ausnahmsweise Fälle möglich, für die ein Stab keinen Nullpunkt erhalten kann; dann ist die Kontrollgleichung $\sum(M) = 0$ mit ins Gleichungssystem einzubeziehen. Diese Lösung gilt für die ganze Hauptgruppe II.

Auch bei diesen Modellversuchen spielt der Elastizitätsmodul keine Rolle, solange äussere Kräfte in Frage kommen, also keine Widerlager-Verschiebungen oder Temperaturänderungen zu berücksichtigen sind.

Die Genauigkeit der experimentellen Lösung zur rein rechnerischen schwankt zwischen 1 und 8%, wobei aber zu bemerken ist, dass der erforderliche Zeitaufwand des Experimentes gegenüber der Rechnung ein äusserst geringer ist. (Schluss folgt).

Zur Frage der einheitlichen Güterzugbremse.

Von fachmännischer Seite werden wir darauf aufmerksam gemacht, unsere auf Seite 120 dieses Bandes (27. Februar 1926) unter obigem Titel erschienene Mitteilung könnte in nicht unterrichteten Kreisen den irrtümlichen Eindruck erwecken, die französischen Eisenbahnfachleute hätten sich schon mehr oder weniger damit abgefunden, auch in ihrem Lande und in den alliierten Staaten die Kunze-Knorr-Bremse als die zukünftige europäische Güterzugbremse anzuerkennen. Dies sei aber durchaus nicht der Fall. Vielmehr hätten am 17. November letzten Jahres Frankreich und alle ihm verbündeten Staaten auf Grund der Bestimmungen des „Versailler-Vertrages“ dem Deutschen Reiche offiziell mitgeteilt, dass sie sich gemeinsam zur Annahme der Westinghouse-Bremse als Güterzugbremse entschieden hätten. Die Ansicht von Ingenieur Tolmer (der offenbar mit seinem Spiegelbild „Remlot“, dem uns nicht bekannten Verfasser des von uns zitierten Artikels, identisch ist) stelle nicht die Ansicht der massgebenden französischen Kreise dar; das im Schlusssatz unserer Mitteilung erwähnte „Comité pour le freinage des trains“ sei keine offizielle Stelle.

Hierzu müssen wir nun allerdings bemerken, dass die französischen Eisenbahn-Verwaltungen in ihrem Bericht an die Technische Kommission der Union Internationale des Chemins de Fer (anläss-