

<b>Zeitschrift:</b>	Schweizerische Bauzeitung
<b>Herausgeber:</b>	Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
<b>Band:</b>	87/88 (1926)
<b>Heft:</b>	13
<b>Artikel:</b>	Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung
<b>Autor:</b>	Michael, W.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-40867">https://doi.org/10.5169/seals-40867</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung. — Das Kraftwerk Amsteg der S. B. B.; II. Hochbaulicher Teil. — Mechanostatische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme. — Miscellanea: Automatische Entsandungs-Anlage der Kraftwerkes Liro-

inferiore. Eine neue Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Duisburg-Hochfeld. Unterdruckmessungen an Staumauern. Das Luftverkehrsnetz 1926. — Nekrologie: Anton von Rieppel. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Basler Ingenieur und Architekten-Verein, Sektion Bern des S. I. A. Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. S. T. S.

## Tangenten- und Krümmungskreis-Konstruktionen bei ebenen Kurven auf Grund ihrer vektoriellen Gleichung.<sup>1)</sup>

Von Dr. W. MICHAEL, techn. Experte, Bern.

In der Elektrotechnik wird bekanntlich die Gleichung der sogenannten „Ortskurven“ oft in der vektoriellen Form  $V = F(v)$  . . . . . (1) gegeben<sup>2)</sup>, worin  $V$  den die Kurve beschreibenden Vektor bedeutet, der eine komplexe Funktion  $F$  des reellen Parameters  $v$  ist.  $v$  kann alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  annehmen. Eine solche Gleichung kann für jede algebraische oder transzendente Kurve aufgestellt werden. Diese Art der Darstellung einer Kurve hat bis jetzt bei den Mathematikern noch wenig Beachtung gefunden, obwohl sie auch als Sonderfall einer konformen Abbildung aufgefasst werden kann. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Gleichung (1) das Problem der Tangente und der Krümmung einer Kurve behandeln kann. Einige Beispiele, die zu einfachen Lösungen führen, sollen die Brauchbarkeit der Methode illustrieren.

1. In Abbildung 1 sei  $C$  eine Kurve, die durch (1) gegeben ist. Wir betrachten zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mit den zugehörigen Vektoren  $V_1$  und  $V_2$ . Die Sekante  $P_1 P_2 = \Delta V$  ist gleich der Differenz der Vektoren, denn, wie die Abbildung 1 zeigt, ist:

$$\Delta V = V_2 + (-V_1) = V_2 - V_1.$$

Lassen wir  $P_2$  immer näher gegen  $P_1$  rücken, so geht die Sekante  $\Delta V$  in das Bogenelement  $dV$  über, dessen Richtung mit derjenigen der Tangente in  $P_1$  übereinstimmt. Wir finden nun  $dV$  durch Differentiation der Gleichung (1):

$$dV = \frac{d(F(v))}{dv} dv \equiv V' dv . . . . . (2)$$

Den Differentialvektor  $dV$  können wir nicht konstruieren; uns interessiert jedoch nur seine Richtung. Diese ist gegeben durch den Vektor  $V' = dV/dv$ , der im allgemeinen einen endlichen Betrag hat und parallel zu  $dV$  ist, weil  $dv$  eine reelle Größe ist, die daher auf die Richtung keinen Einfluss hat. Wir haben somit den Satz:

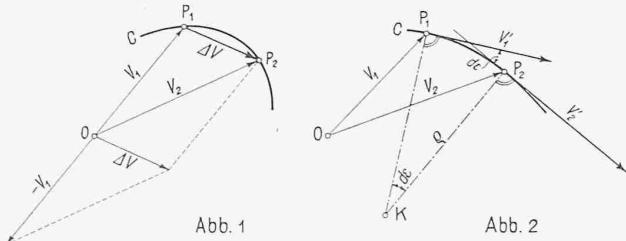


Abbildung 1

Abbildung 2

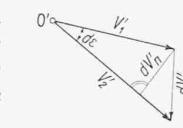


Abbildung 3

gezogen. Diese schneiden sich im Grenzfalle im Krümmungsmittelpunkt  $K$ , und die Strecke  $P_1 K = \varrho$  ist gleich dem Krümmungsradius;  $d\varrho$  ist der Kontingenzwinkel. Wir bezeichnen ferner mit  $|dV|$  den absoluten Wert oder den Betrag von  $dV$ , analog die Beträge der anderen Vektoren. Aus Abb. 2 folgt:

$$\varrho = \frac{|dV|}{d\varrho} . . . . . (3)$$

Um  $d\varrho$  zu bestimmen, denken wir uns in Abbildung 3 die Vektoren  $V_1'$  und  $V_2'$  von einem Ursprung  $O'$  aus aufgezeichnet; sie bilden wiederum den Winkel  $d\varrho$  miteinander. Wir denken uns ferner ihr Differential gezeichnet:

$$dV' = V_2' - V_1'$$

den wir aus der Gleichung:

$$\frac{dV'}{dv} = V'' = \frac{d^2(F(v))}{dv^2}$$

berechnen können. Die Projektion von  $dV'$  auf die Normale zu  $V_2'$  sei mit  $dV_n'$  bezeichnet. Sie ist auch gleich der Projektion von  $V''$  auf die Normale zu  $V_2'$ , die wir mit  $V_n''$  bezeichnen, multipliziert mit  $dv$ , das heisst also:

$$dV_n' = V_n'' dv . . . . . (4)$$

Im Grenzfalle geht  $V_2'$  in  $V_1'$  über und wir können setzen:  $V_2' = V_1' = V'$ . Aus Abbildung 3 folgt nun ferner:

$$d\varrho = \frac{|dV_n'|}{|V'|}$$

und somit auch:

$$\varrho = \frac{|dV|}{|dV_n'|} |V'| . . . . . (5)$$

Setzt man aus (2) den Wert für  $|dV|$  und aus (4) den für  $|dV_n'|$  ein, so findet man schliesslich:

$$\varrho = \frac{|V'|^2}{|V_n''|} . . . . . (6)$$

Die Brauchbarkeit dieser Formel beruht darauf, dass man sowohl  $V'$  als  $V''$  aus der Gl. (1) leicht bestimmen kann; man hat dazu nur (1) zweimal zu differenzieren.  $V_n''$  ist dann geometrisch ohne weiteres bestimmbar.

Aus Gl. (6) lässt sich ablesen:

Der Betrag des Tangentenvektors  $V'$  ist gleich der mittleren Proportionalen aus dem Krümmungsradius  $\varrho$  und der Strecke  $|V_n''|$  . . . . . (II)

Dieser Satz führt zu folgender Regel für die Konstruktion von  $\varrho$  in einem Punkte  $P$  der Kurve  $C$  (Abb. 4):

Man bestimmt aus Gleichung (1)  $V'$  und  $V''$ ; zieht die Normale in  $P$  zu  $V'$  und zeichnet  $V_n'$ ; macht die Strecke  $PQ$  auf der Normale in  $P$  gleich  $-V_n'$ ; verbindet  $Q$  mit  $R$  und errichtet die Senkrechte in  $R$  zu  $QR$ ; sie schneidet die Normale im Punkte  $K$ , dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Die Sätze (I) und (II) führen sofort auf zwei bekannte kinematische Sätze, wenn man den Parameter  $v$  als Zeit auffasst. Die Gleichung (1) ist dann der analytische Ausdruck für eine bestimmte Bewegung eines Punktes in der Ebene.  $V'$  ist die Geschwindigkeit,  $V''$  die totale,  $V_n''$  die normale Beschleunigung des Punktes.

Bekanntlich stützt sich die Toricelli-Roberval'sche Methode der Tangentenbestimmung auf der nunmehr auch aus Satz (I) folgenden Tatsache, dass die Geschwindigkeit mit der Tangente gleichgerichtet ist. Die genannte Methode findet gewissermassen im Satz (I) ihre natürliche, das heisst rein geometrische Begründung, während die aus Satz (II) abgeleitete Regel (III) gleichsam als ihre „Erweiterung“ angesehen werden könnte.

Abbildung 4

Die erste Ableitung des Kurvenvektors nach dem Parameter liefert einen neuen Vektor, der die Richtung der Tangente hat. (Tangentenvektor). . . . . (I)

Damit ist die Aufgabe der vektoriellen Bestimmung der Tangente in einem Punkte einer Kurve allgemein gelöst.

2. Betrachten wir in Abbildung 2 zwei Punkte der Kurve  $C$ ,  $P_1$  und  $P_2$ , die sehr nahe gedacht sein sollen. Wir denken uns ferner die „Tangentenvektoren“  $V_1'$  und  $V_2'$  in  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt, ferner die Normalen in letzteren

<sup>1)</sup> Wenn wir diesem, in der Mathemat. Vereinigung Bern gehaltenen, an der Grenze unseres Arbeitsgebietes liegenden Vortrag Aufnahme gewähren, so geschieht es, weil er gleichsam eine Weiterentwicklung der Arbeit unseres zu früh verstorbenen Kollegen Otto Bloch über Bestimmung der Ortskurven darstellt, einer Arbeit, deren Erscheinen in der «S. B. Z.» im November 1916 berechtigtes Aufsehen der Fachkreise erregt hatte. Red.

<sup>2)</sup> Vergleiche zum Beispiel: Dr. O. Bloch, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Verlag von Rascher & Cie, in Zürich, 1917.

## Anwendungen.

Es ist klar, dass man bei der Anwendung der Methode auf eine bestimmte Kurve nicht von deren „allgemeinen“ vektoriellen Gleichung, sondern von einer möglichst einfachen ausgehen wird. Ist eine solche Gleichung für die Kurve nicht schon anderweitig abgeleitet, so besteht der erste Schritt bei der Lösung unserer Aufgabe in der Aufstellung einer möglichst einfachen vektoriellen Gleichung der Kurve.

a) *Hyperbel*: Die vektorielle Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, kann wie bekannt<sup>1)</sup> in der Form geschrieben werden:

$$V = Av + \frac{B}{v} \quad \dots \quad (7)$$

worin  $A$  und  $B$  zwei gegebene Vektoren sind, die, wie man leicht sieht, die Lage der Asymptoten bestimmen. In Abbildung 5 ist die Kurve konstruiert worden, indem für  $v = 1, 2, 3, \dots$  die entsprechenden Punkte bestimmt wurden. Zur Bestimmung von Tangente und Krümmungsradius müssen wir die Gleichung (7) zweimal ableiten und finden:

$$V' = A - \frac{B}{v^2} = \frac{1}{v} \left( Av - \frac{B}{v} \right) \quad \dots \quad (8)$$

$$V'' = \frac{2B}{v^3} \quad \dots \quad (9)$$

Aus Gleichung (8) folgt: der Tangentenvektor  $V'$  hat die Richtung desjenigen Vektors, der die *Differenz* der zu einem Punkte der Hyperbel gehörenden Vektorkomponenten  $Av$  und  $B/v$  bildet; wir zeichnen das entsprechende Parallelogramm; in Abbildung 5 ist dies z. B. für den Punkt  $v = 1$  durchgeführt; ferner wollen wir die Vektor-Summe  $(Av + B/v)$  die *erste*, die Vektor-Differenz  $(Av - B/v)$  die *zweite Diagonale* des Parallelogramms nennen. Man kann dann den Satz aussprechen:

*Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel ist parallel der zweiten Diagonalen des zu dem Punkte gehörenden Asymptoten-Parallelogramms.*

Dieser Satz führt auf die bekannte Konstruktion der Tangente und bietet somit nichts wesentlich Neues. Nun bestimmen wir  $\varrho$ . Nach Gleichung (6) ist:

$$\varrho = \frac{|V'|^2}{|V''|} = \frac{\frac{1}{v^2} \left| Av - \frac{B}{v} \right|^2}{\frac{1}{v^3} \left| \left( \frac{2B}{v} \right)_n \right|^2} = \frac{\left| Av - \frac{B}{v} \right|^2}{\left| \left( \frac{2B}{v} \right)_n \right|^2}$$

Wir interpretieren die Gleichung geometrisch und finden: Im Zähler steht das Quadrat des Betrages eines Vektors, der gleich der zweiten Diagonale des aus  $Av$  und  $B/v$  gebildeten Parallelogramms ist, im Nenner steht die Projektion des mit 2 multiplizierten Vektors  $B/v$  auf die Normale. Wir denken uns die Konstruktion für den Punkt 1 ausgeführt und ersehen aus Abbildung 5 ohne weiteres:

Die Strecke  $|Av - B/v|$  ist gleich dem Stück der Tangente zwischen Berührungs punkt und Schnittpunkt mit einer Asymptote, für Punkt 1 also gleich  $1r$ .

Die Strecke  $|2B/v|$  ist gleich dem Stück der Asymptote vom Mittelpunkt O bis zum Schnittpunkt r der Tangente. Fällen wir die Senkrechte von O auf die Normale; diese werde in q getroffen, so ist die Strecke von q bis zum Berührungs punkt 1 gleich der Projektion  $(2B/v)_n$ .

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes gestaltet sich somit äusserst einfach nach folgender Regel:

*Man zieht die Tangente bis zum Schnitt q mit einer Asymptote, errichtet im Berührungs punkt (1) die Normale, fällt auf sie vom Mittelpunkt O aus das Lot Or, verbindet r mit q und errichtet die Senkrechte in q zu qr. Sie schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkt K.<sup>2)</sup>*

<sup>1)</sup> Vergl. z. B. die Dissertation des Verfassers: Zur Geometrie der Ortskurven der graphischen Wechselstromtheorie, Zürich 1919.

<sup>2)</sup> Es ist hier zu bemerken, dass diese Konstruktion nicht eine unmittelbare Anwendung der Regel (III) darstellt, denn wegen der vorgenommenen Kürzung in der Formel für  $\varrho$  werden nicht die Vektoren  $V'$  und  $-V''/v^2$  selber aufgetragen, sondern die reduzierten Vektoren  $V'/v$  und  $-V''/v^3$ ; um dieser Abweichung Rechnung zu tragen, haben wir in Abb. 5 die Buchstaben r und q statt R und Q wie in Abb. 4 eingeführt.

Eine unmittelbare Anwendung der Regel (III) findet statt, wenn man von einer anderen, weniger bekannten Gleichung für die Hyperbel ausgeht. Darauf soll bei der Ellipse noch hingewiesen werden.

b) *Ellipse*. Die einfachste Form, auf die die vektorielle Gleichung einer Ellipse gebracht werden kann, lautet:

$$V = r_1 e^{iq} + r_2 e^{-iq} \quad \dots \quad (10)$$

worin  $r_1$  und  $r_2$  Konstanten,  $q$  der Parameter (an Stelle von  $v$ ) und  $i = \sqrt{-1}$ , die imaginäre Einheit, bedeuten. (10) ist die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung und den Axen in den Koordinatenachsen.<sup>1)</sup>

Man kann  $V$  in Formel (10) auffassen als die Resultierende zweier Vektoren, die gleichmässig, aber in entgegengesetztem Sinne zu einander rotieren. In Abbildung 6 sind die Kreise angedeutet, die die Endpunkte der Vektoren  $r_1 e^{iq}$  und  $r_2 e^{-iq}$  beschreiben; die erzeugte Ellipse ist stark ausgezogen. Zu einem Punkte P ist das entsprechende Parallelogramm gezeichnet.

Wir bilden nun aus (10) die erste und zweite Ableitung und erhalten:

$$V' = i(r_1 e^{iq} - r_2 e^{-iq}) \quad \dots \quad (11)$$

$$V'' = -(r_1 e^{iq} + r_2 e^{-iq}) = -V \quad (12)$$

Wir bemerken, dass in der Klammer auf der rechten Seite von (11) wie bei der Hyperbel die Differenz der Vektorkomponenten von  $V$  steht, das heisst, die zweite Diagonale im Parallelogramm OXPY. Der Faktor  $i$  bedeutet, dass der Tangentenvektor  $V'$  auf der zweiten Diagonale des Parallelogramms senkrecht steht (bei der Hyperbel hatte man Parallelität). Wir konstruieren  $V'$ , indem wir durch P eine Senkrechte zu XY ziehen und PR gleich XY machen. Um  $q$  zu finden, haben wir  $|V''|$  zu bestimmen und Regel (III) anzuwenden. Da  $|V''| = |V|$  ist, bekommen wir  $|V''|$ , indem wir das Lot OS auf die Verlängerung von PR fällen. Wir ziehen die Parallelen SQ zu OP; dann ist  $OS = PQ = |V''|$ . Schliesslich haben wir noch Q mit R zu verbinden und die Senkrechte in R auf QR zu ziehen. Ihr Schnittpunkt K mit der Normalen ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Die Bestimmung von K ist hier ebenso einfach wie bei der Hyperbel, wenn man von der durch (10) gegebenen vektoriellen Konstruktion der Ellipse ausgeht. Man kann jedoch die Konstruktion des Krümmungskreises auch unabhängig von der beschriebenen vektoriellen Erzeugung ausführen, unter Benützung konjugierter Durchmesser, wenn man folgende Relationen aus Abbildung 6 ableitet.<sup>2)</sup>

Wendet man den Cosinussatz auf die Diagonal-Dreiecke  $OMX$  und  $OMY$  an, so findet man:

$$\frac{1}{4} (OP^2 + XY^2 - 2 \overline{OP} \overline{XY} \cos \delta) = r_2^2 \quad (a)$$

$$\frac{1}{4} (OP^2 + XY^2 + 2 \overline{OP} \overline{XY} \cos \delta) = r_1^2 \quad (b)$$

$$(a) + (b): \frac{1}{2} (\overline{OP}^2 + \overline{XY}^2) = r_1^2 + r_2^2 \quad (a')$$

$$(a) - (b): \overline{OP} \overline{XY} \cos \delta = r_1^2 - r_2^2 \quad (b')$$

Die Gleichung (a') drückt eine besondere Eigenschaft aus, die zwischen den zwei Diagonalen des Parallelogramms des Ellipsenpunktes besteht.

Trägt man die zweite Diagonale XY in P senkrecht zur ersten Diagonale OP auf, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse konstant ist für alle Punkte der Ellipse. Man kann leicht ersehen, dass diese Hypotenuse der Radius des (nicht gezeichneten) Kreises ist, der durch die Ecken des der Ellipse umschriebenen Rechteckes geht.

Die Gleichung (b') können wir folgendermassen interpretieren: es ist  $\overline{OP} \cos \delta = OS = PQ$ ; ferner ist  $XY = PR$

und  $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = ab$  wo  $a$  die grosse,  $b$  die kleine Halbaxe der Ellipse bedeuten. Es folgt somit:

$$\overline{OP} \overline{XY} \cos \delta = PR PQ = ab \quad \dots \quad (y)$$

Diese Produkte sind nichts anderes als die doppelten Inhalte der Dreiecke  $OPR$  beziehungsweise  $POR$ .

Wir haben somit den Satz:

*Das aus dem Ellipsenvektor und dem Tangentenvektor gebildete Dreieck hat den konstanten Inhalt  $1/2 ab$ .*

<sup>1)</sup> Siehe meine Dissertation.

<sup>2)</sup> Auf diese Möglichkeit machte mich zuerst Ing. M. Besso aufmerksam.

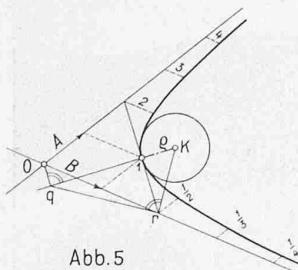


Abb. 5

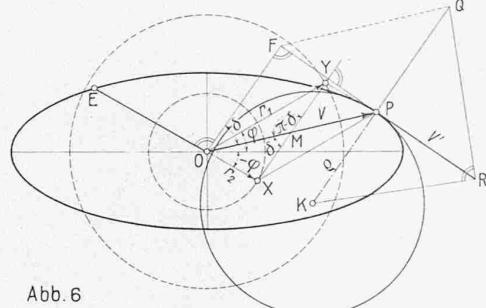


Abb. 6

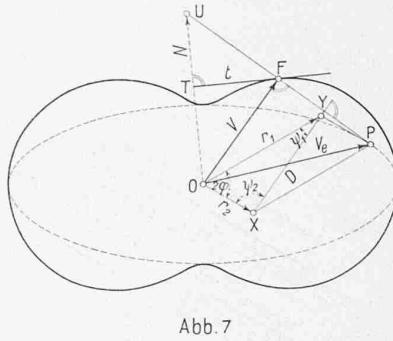


Abb. 7

Nun hat bekanntlich auch das aus zwei konjugierten Halbmessern der Ellipse gebildete Dreieck den konstanten Inhalt  $\frac{1}{2}ab$ . Betrachten wir daher den zu  $OP$  konjugierten Halbmesser  $OE$ . Dieser ist zur Tangente parallel. Somit gilt:

$$OE \perp OS, \quad \angle EOP = \delta + \frac{\pi}{2} = \angle OPR,$$

$$OP \cdot OE \sin\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) = OP \cdot OE \cos \delta = ab \quad (\delta)$$

Vergleicht man  $(\delta)$  mit  $(\gamma)$  so kommt:

$$OE = XY.$$

Das heisst: Der Betrag der zweiten Diagonale im Parallelogramm des Punktes  $P$  ist gleich dem Betrag des zum Halbmesser  $OP$  konjugierten Halbmessers. Dieser steht auf der zweiten Diagonale senkrecht.

[Nach Dr. J. Sauter kann man diesen Zusammenhang durch eine „vektorielle Ueberlegung“ viel einfacher beweisen: Wenn man nämlich in  $(10)$  an Stelle von  $\varphi$  den Wert  $\varphi + \pi/2$  setzt, so erhält man den Ellipsenvektor:

$V_{\varphi+\pi/2} = r_1 e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} + r_2 e^{-(\varphi+\frac{\pi}{2})} = i\{r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi}\} = V'$  das heisst  $V'$  ist gleich einem Halbmesser der Ellipse, und weil parallel der Tangente im Endpunkte des Halbmessers  $V_{\varphi}$ , ist  $V'$  der zu  $V_{\varphi}$  konjugierte Halbmesser.]

Die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $K$  zu  $P$  kann jetzt folgendermassen angegeben werden:

Man trage auf der Tangente eine Strecke  $PR$  gleich dem konjugierten Halbmesser  $ab$ , ferner auf der Normalen eine Strecke  $PQ$  gleich dem Abstand der Tangente vom Mittelpunkt. Man errichte die Senkrechte in  $R$  zu  $QR$ . Ihr Schnittpunkt zu der Normalen ist der Krümmungsmittelpunkt  $K$ .

Wir bemerken noch, dass der aus Gleichung  $(a')$  gefundene aber nicht gezeichnete Kreis zur Bestimmung des Betrages des konjugierten Halbmessers in vorteilhafter Weise benutzt werden kann. Hierdurch ist die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes, wie bei der Hyperbel, auf Elemente zurückgeföhrt, die unabhängig von der speziellen Konstruktion der Kurve sind.

Die gefundenen Konstruktionen für Tangente und Krümmungskreis bei Hyperbel und Ellipse lassen bereits eine Dualitätsverwandtschaft erkennen, die noch klarer zu Tage tritt, wenn man die Gleichung  $(7)$  der Hyperbel anders schreibt. Führen wir nämlich die Substitution ein:

$$v = e^{\varphi}$$

beziehungweise  $\frac{1}{v} = e^{-\varphi}$ ,

so erhalten wir die neue Hyperbelgleichung:

$$V = A e^{\varphi} + B e^{-\varphi} \quad (7')$$

für die Ellipse können wir statt  $(10)$  schreiben:

$$V = A e^{i\varphi} + B e^{-i\varphi} \quad (10')$$

$(10')$  geht aus  $(7')$  hervor, wenn man  $\varphi$  durch  $i\varphi$  ersetzt. Aus  $(7')$  folgt:

$$V' = A e^{\varphi} - B e^{-\varphi},$$

$$V'' = A e^{\varphi} + B e^{-\varphi} = V.$$

Hieraus ergibt sich die in Abbildung 5 veranschaulichte Konstruktion in unmittelbarem Anschluss an die Abbildung 4 beziehungsweise an Regel (III). An Stelle

<sup>1)</sup> Siehe meine Dissertation.

von  $r$  und  $q$  dürfen wir jetzt, ebenso wie bei der Ellipse,  $Q$  und  $R$  setzen. Gleichung  $(7')$  steht der Gleichung  $(10')$  dual gegenüber und erweist sich als die einfachste für die Lösung unserer Aufgabe.

Die Parabel kann analog behandelt werden. Es ergeben sich hierbei ebenso einfache Konstruktionen wie bei den anderen Kegelschnitten. Der Leser kann sich davon selber leicht überzeugen.

c) Zum Schlusse möge noch eine Anwendung auf eine Kurve höherer Ordnung stattfinden. Wir wählen hierfür, im Anschluss an das Vorige, die *Fusspunktcurve der Ellipse* mit dem Zentrum der Ellipse als Pol.

Wir müssen zunächst die Kurve vektoriell darstellen.

Wir gehen von der Gleichung der Ellipse aus, wobei wir jetzt aber  $V_e$  statt  $V$  schreiben:

$$V_e = r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{-i\varphi}.$$

Man erhält nun einen Punkt  $F$  der Fusspunktcurve, indem man in Abbildung 7 vom Zentrum  $o$  auf die Ellipsen-Tangente in  $P$  das Lot fällt. Die Kurve ist bekanntlich vierter Ordnung. Wir denken uns das zu  $V_e$  gehörige Parallelogramm gezeichnet und bezeichnen die zweite Diagonale  $XY$  mit  $D$ .

Es ist dann der Vektor  $V = OF$  parallel zu  $D$ . Es erweist sich als zweckmässig, für den Vektor einen *Richtungsvektor* einzuführen, den wir definieren als einen Vektor vom *Betrage*  $d$  und von der selben *Richtung wie*  $D$ .

Wir wählen für den Richtungsvektor ein neues Symbol, nämlich das Vektorsymbol zwischen zwei horizontalen Strichen:  $\overline{D}$ .<sup>1)</sup> Für den absoluten Betrag von  $D$  wollen wir  $d$  schreiben. Definitionsgemäss soll also sein:

$$d = |\overline{D}|$$

$$D = D/d.$$

Wir berechnen nun an Hand der Abbildung 7 den Richtungsvektor  $\overline{D}$ ; ferner den Betrag von  $V$ . Es ist dann:  $V = |V| \overline{D} \equiv |V| \frac{D}{d}$ .

Aus Abbildungen 6 und 7 folgt:

$$\text{a) } D = r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi};$$

$$\text{ferner ist: } \text{b) } d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos 2\varphi$$

$$\text{c) } |V| = r_1 \cos \psi_1 - r_2 \cos \psi_2$$

$$r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d \cos \psi_1 = r_2^2$$

$$r_2^2 + d^2 - 2 r_2 d \cos \psi_2 = r_1^2$$

$$\text{hieraus: } \cos \psi_1 = \frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2 r_1 d}; \quad \cos \psi_2 = \frac{r_2^2 + d^2 - r_1^2}{2 r_2 d}$$

$$\text{somit: } |V| = \frac{1}{d} (r_1^2 - r_2^2)$$

$$V = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d^2} (r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi}) \quad (13)$$

Das ist die gesuchte vektorielle Gleichung unserer Fusspunktcurve; darin ist  $d^2$  die in Gleichung (b) gegebene Funktion von  $\varphi$ . Wir differentiieren nun Gleichung (13) nach  $\varphi$ :

$$V' = (r_1^2 - r_2^2) \frac{i d^2 (r_1 e^{i\varphi} + r_2 e^{-i\varphi}) - 2 d d' (r_1 e^{i\varphi} - r_2 e^{-i\varphi})}{d^4}.$$

In den Klammern des Zählers stehen die Vektoren  $V_e$  und  $D$ , ferner folgt durch Differentiation der Gleichung (b):

$$2 d d' = 4 r_1 r_2 \sin 2\varphi.$$

<sup>1)</sup> Im Gegensatz zu den vertikalen Strichen für die Bezeichnung des absoluten Betrages des Vektors.

