Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 85/86 (1925)

Heft: 14

Artikel: Analytische Bestimmung des Schwankungsverhältnisses im Kraftbedarf elektrischer Bahnen und ähnlicher Zentralanlagen

Autor: Kummer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40198

Band 86. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 14

Analytische Bestimmung des Schwankungsverhältnisses im Kraftbedarf elektrischer Bahnen und ähnlicher Zentralanlagen.

Von Prof. Dr. W. KUMMER, Ingenieur, Zürich.

In einer Arbeit „Neuere Studien über die Schwankungen des Kraftbedarfs elektrischer Bahnen", die wir auf Seite 199 und 214 von Band 67 (im April 1916) dieser Zeitschrift veröffentlichten, haben wir gezeigt, wie sich die Eigenart der Schwankung im Kraftbedarf elektrischer Bahnen aus Projektierungsarbeiten entnehmen lässt; die Diskussion der Eigenart dieser Schwankungen führte dann auf die Aufstellung einer Kurve des Schwankungsverhältnisses des Kraftbedarfs in Abhängigkeit vom Jahresverkehr elektrischer Bahnen (Abbildung 3 auf Seite 215 von Band 67), die demnach mittels eines reinen Probierverfahrens gewonnen worden war. Handelt es sich darum, diese Kurve analytisch zu bestimmen, so muss offenbar die Theorie des Zufalls, bezw. die Wahrscheinlichkeitslehre, zu Hilfe genommen werden. Zu diesem Schritt hat man heute umsoweniger Bedenken zu hegen, als seit einigen Jahren die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Probleme des Telephonwesens zu praktisch wertvollen analytischen Berechnungsmethoden geführt hat. Natürlich können diese Berechnungsmethoden nicht ohne weiteres auch auf unsern Fall übertragen werden, da hier andere Begriffe und Ueberlegungen in Betracht kommen.

Bekanntlich ist die Theorie des Zufalls nur dann anwendbar, wenn man von einem rechnerisch zu erfassenden Ereignisse zum Voraus nicht entscheiden kann, ob es eintreten werde oder nicht, wenn also sein Eintreten nur als möglich, in keiner Weise aber als notwendig erscheint. Für die Ermittlung des Kraftbedarfs elektrischer Bahnen und ähnlicher Zentralanlagen spielt nun die in irgend einem Zeitpunkt spontan eintretende Häufung von Einzelleistungen zu einer kumulierten Maximalleistung die Rolle des der Theorie des Zufalls zu unterwerfenden Ereignisses. Wenn in der Einheitszeit (*ein Tag* bezw. *ein Jahr*) auf einem Bahnnetz N Züge verkehren, wobei jeder Zug als eine fortwährend variierende Effektgrösse aufgefasst wird, und wenn wir die Einheitszeit in lauter Teile vom Zeitmass t teilen, so kann t nicht nur die durchschnittliche Fahrzeit eines Zuges, sondern zugleich auch die Wahrscheinlichkeit dafür darstellen, dass ein bestimmter Zugseffekt gerade auf ein Zeitteilchen entfällt; im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dann t die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Einzelereignisses, während $1 - t$ die Wahrscheinlichkeit seines Nichteintretens darstellt. Eine x-fache Kumulation dieses Einzelereignisses verzeichnet nun:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . x \ldots . (N-x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots . N}$$

mögliche Fälle, denen

$$t^x (1 - t)^{N-x}$$

günstige Fälle gegenüber stehen. Die Wahrscheinlichkeit w_x der Kumulation von x Einzelereignissen, bezw. einzelnen Zugseffekten, beträgt somit:

$$w_x = \frac{t^x (1 - t)^{N-x}}{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . x \ldots . (N-x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . N}}$$

$$= \frac{N!}{x!\,(N-x)!}\, t^x (1 - t)^{N-x}$$

oder, in kürzerer Form geschrieben:

$$w_x = \binom{N}{x} t^x (1 - t)^{N-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

womit die bekannte Gleichung von *J. Bernoulli* hergeleitet ist. Die Wahrscheinlichkeit w_x erscheint als eine Zeit, und zwar als diejenige Zeit, während der gerade x Einzelereignisse (Zugseffekte) kumuliert sind. Der maximale Wert w_x', den w_x annehmen kann, erfolgt für ein x' gleich dem Produkt Nt. Wir schreiben:

$$x' = Nt = y.$$

Andererseits gibt es auch einen Wert w_x'', der gleich derjenigen äusserst kurzen Zeit τ ist, bei der gerade noch x'' Einzelereignisse (Zugseffekte) sich gemäss den mechanischen und elektrischen Verlusten, die auftreten, kumulieren können. Da die x' Einzelereignisse (Zugseffekte), die sich mit der maximalen Wahrscheinlichkeit w_x' kumulieren, dem tatsächlichen Leistungsdurchschnitt, die x'' Einzelereignisse (Zugseffekte) aber dem tatsächlichen Leistungsmaximum entsprechen, so stellt der Quotient:

$$K = \frac{x''}{x'} = \frac{x''}{y} = \frac{x''}{Nt}$$

das gesuchte Schwankungsverhältnis dar. Diesen, mit Hülfe der Formel von Bernoulli festzustellenden Wert von K verwenden wir für die Schwankung im *täglichen Betrieb*, wobei N und t sich auf die Zeiteinheit *„ein Tag"* beziehen, und wobei w_x und τ in derselben Zeiteinheit gemessen erscheinen.

Wenn man aber N und t auf die Zeiteinheit *„ein Jahr"* bezieht, wobei der Zahlenwert:

$$y = Nt$$

zwar ungeändert bleibt, strebt für

$$\lim N = \infty, \ \lim \frac{1}{t} = \infty$$

die Gleichung (1) einer Form:

$$w_x = \frac{e^{-y} y^x}{x!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zu, die der bekannten Gleichung von *S. D. Poisson* entspricht. Auch in diesem Fall erlangt w' seinen maximalen Wert bei:

$$x' = Nt = y$$

und weist w'' wiederum die gleiche, äusserst kurze Zeit τ aus (die nun aber mit der Einheit „ein Jahr", also nicht mehr mit der Einheit „ein Tag", gemessen wird), bei der gerade noch x'' Einzelereignisse (Zugseffekte) zur Kumulation gelangen; analog stellt der Quotient:

$$K = \frac{x''}{x'} = \frac{x''}{y} = \frac{x''}{Nt}$$

wieder das gesuchte Schwankungsverhältnis dar, nun aber für den *Jahresbetrieb*, statt für den Tagesbetrieb.

Die Grösse y, die sowohl für den Tagesbetrieb, als auch für den Jahresbetrieb als der Nenner des Schwankungsverhältnisses auftritt, und die als Mass des Leistungs-Durchschnitts eingeführt erscheint, stellt zugleich auch das Mass des im Tage, bezw. im Jahre bewältigten Verkehrs dar; sie dient uns deshalb als *Verkehrsmasstab*. Indem man sich ein bestimmtes Bahnnetz mit einem von Jahr zu Jahr wachsenden oder überhaupt veränderlichen Verkehr belegt denkt, gelangt man zur Frage nach der Abhängigkeit der zwei Schwankungsverhältnisse K vom Verkehrsmasstab y, bezw., soweit als es sich um K im Jahresbetrieb handelt, zur Frage nach der analytischen Bestimmung derjenigen Kurve, die wir in unserer Abhandlung von 1916 auf Grund des Probierverfahrens ermittelt hatten. Für ein gegebenes y und für ein sachgemäss gewähltes $w_x'' = \tau$ können die Kurven:

$$K = f(y)$$

mittels Gleichung (1) für den Tagesbetrieb, und mittels Gleichung (2) für den Jahresbetrieb, sofort implizite dargestellt werden; die explizite Auswertung kann aber wegen der verwickelten Funktionen in (1) und (2) nicht allgemein mit der wünschenswerten Einfachheit analytisch dargestellt werden, weshalb wir in der Folge eine Darstellung auf Grund zahlenmässiger Auswertung durch Kurven veranschaulichen werden. Zur Bildung dieser Kurven muss nichtsdestoweniger die numerische Auswertung der Gleichungen (1) und (2) vorgenommen werden, wozu nun, eben wegen der verwickelten Funktionen in (1) und (2), nicht die direkte Auswertung dieser Gleichungen, sondern die sukzessive Berechnung aufeinanderfolgender Werte w_x nach dem Schema:

$$w_{x+1} = w_x \cdot \varphi(x)$$

in Betracht fällt, die übrigens mit dem Rechenschieber möglich ist.

Im Falle der Untersuchung des Tagesbetriebs kann an Stelle der Auswertung von Gleichung (1) das Berechnungschema

$$w_{x+1} = w_x \frac{N-x}{x+1} \frac{t}{1-t}$$

verwendet werden, wobei mit:

$$w_0 = (1-t)^N, \text{ gemäss } x = 0$$

zu beginnen ist, und wobei alle Werte bis und mit:

$$w_x'' = \tau$$

zu ermitteln sind.

Im Falle der Untersuchung des Jahresbetriebs kommt an Stelle von Gleichung (2) der Ansatz:

$$w_{x+1} = w_x \frac{y}{x+1}$$

in Betracht, wobei gleich mit dem Werte

$$w_x' = w_y$$

begonnen werden kann, für den ein äusserst genauer Näherungswert:

$$w_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}$$

besteht; die Rechnung ist dann wieder mit:

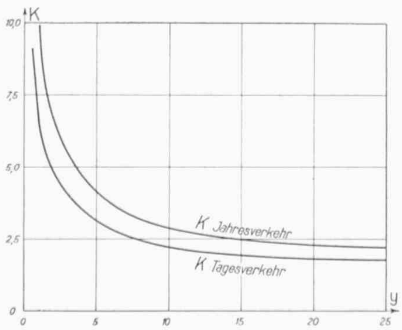
$$w_x'' = \tau$$

ans Ende gelangt.

Bevor wir nun die Ergebnisse solcher Berechnungen zur Bildung von Kurven

$$K = f(y)$$

verwenden, möge noch darauf hingewiesen werden, dass die richtige Annahme der Zeit τ, während welcher gerade x'' Zugseffekte zur Kumulation gelangen, für den Wert des Verfahrens entscheidend ist. Auf Grund zahlreicher Beobachtungen von direkt zeigenden und auch von registrierenden Leistungsmessern in Bahnkraftwerken und sonstigen elektrischen Zentralen haben wir erkannt, dass zur Bildung und für die Dauer der Leitungsmaxima mehrere Sekunden in Frage kommen. Wir benützen deshalb nachstehend stets den Wert:



$$\tau = 0{,}73 \cdot 10^{-4} \text{ Tage} = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ Jahre.}$$

Da also für den Tagesbetrieb w_x bis zum Werte $0{,}73 \cdot 10^{-4}$, für den Jahresbetrieb dagegen bis zum Werte $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ zu berechnen ist, und da weiter, für gleiche Werte

$$y = Nt,$$

die Werte w_x gleicher Indices nach (1) und nach (2) nur wenig differieren, so ergeben sich notwendigerweise im Jahresbetrieb stets höhere Schwankungsverhältnisse K, als im Tagesbetrieb.

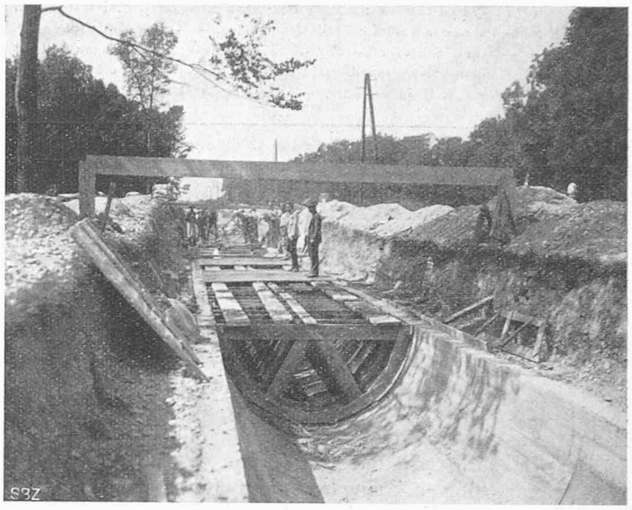


Abb. 4. Sohle des Rohrstrangs.

Zur Aufstellung unserer Kurven:

$$K = f(y)$$

denken wir uns nun das selbe Bahnnetz zu Grunde gelegt, an dem wir bei der Abfassung unserer Abhandlung von 1916 das Probierverfahren zur Anwendung gebracht hatten. Dabei kann nun mit einem Mittelwert:

$$t = 0{,}04 \text{ Tage}$$

gerechnet werden, und es kommen Werte N von 0 bis 625 in Betracht, die Werte y von 0 bis 25 im Gefolge haben; die Einzelwerte t und N sind übrigens nur für den Tagesbetrieb von Belang, während für den Jahresbetrieb angenommene Werte y universell verwendet werden können; man muss allerdings wissen, welche Zahlenwerte die Grösse y praktisch annehmen kann. Für das zu Grunde gelegte Bahnnetz entspricht der Einheit $y = 1$ gerade ein Jahresverkehr an Gesamtzuggewicht von 100 Millionen tkm, derart, dass der grösste zu berücksichtigende Verkehr, bei $y = 25$, der Verkehrszahl 2500 Millionen tkm entspricht. Bei Durchführung der Rechnung erhalten wir nun die in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Kurven von K, für den Tages- und für den Jahresbetrieb. Berücksichtigt man, dass hier die Werte K die Schwankungswerte in der Zentrale bedeuten, während wir 1916 nur die meist um 10 % höhern Schwankungswerte k am Radumfang vollständig ermittelten und für den Jahresverkehr auch kurvenmässig abbildeten, so erkennt man die gute Uebereinstimmung des vorliegenden analytischen Verfahrens mit dem frühern Probierverfahren zur Bestimmung des Schwankungsverhältnisses des Kraftbedarfs der elektrischen Zugförderung.

Es liegt auf der Hand, dass das hier entwickelte analytische Verfahren zur Bestimmung der Verhältnisse K auf alle Zentralanlagen ausgedehnt werden kann, in denen die Kenntnis der Schwankungen im Kraftbedarf von praktischer Bedeutung ist. Bei einzelnen Zentralanlagen, insbesondere bei den gewöhnlichen elektrischen Anlagen zur Licht- und Kraftverteilung, ist die Zahl N der in der Zeit 1 zur Funktion während je einer mittleren Zeit t kommenden Leistungsverbraucher nicht identisch mit der Zahl Z der zum Netze gehörenden Abonnenten. In diesem Falle kann man an der Gleichung (1) eine Modifikation vornehmen, wobei die Grösse

$$z = \frac{Nt}{Z} = \frac{y}{Z}$$

einzuführen und für Gleichung (1) zu schreiben ist:

$$w_x = \binom{Z}{x} z^x (1-z)^{Z-x}.$$

Die Weiterbehandlung ergibt sich dann analog wie oben und führt auf das Schwankungsverhältnis im Tagesverkehr oder auf das Schwankungsverhältnis im Jahresverkehr, je nach Formelbildung und Wahl der Zeiteinheit.