Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 85/86 (1925)

Heft: 11

Artikel: Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisenden Behältern

Autor: Pasternak, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40189

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern. — Wettbewerb für die Ausgestaltung des Marktplatzes in Heerbrugg. — Schweizerischer Verein von Dampfkessel-Besitzern. — Einzelachsantriebe mit Vertikalmotoren für elektrische Schnellzug-Lokomotiven. — Miscellanea: Eidgenössische Technische Hochschule. Ueber Untersuchungen an dicken Kesselblechen. Französischer Binnenschiffahrts-Kongress. Verwendung der Flugzeuge zu kartographischen Aufnahmen. St. Gallisch-Appenzellische Kraftwerke. — Nekrologie: Robert Curjel. — Konkurrenzen: Kantonales Verwaltungsgebäude in Schwyz. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizer. Ing.- u. Arch.-Verein. Groupe genevois de la G. E. P. S. T. S.

Der heutigen Nummer ist das Inhalts-Verzeichnis von Band 85 beigelegt.

Band 86. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 11

Formeln zur raschen Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern.

Von Ing. P. PASTERNAK, Privat-Dozent an der E. T. H., Zürich.

Ein einfaches, für praktische Zwecke genügend genaues Verfahren zur Abschätzung der Biegebeanspruchungen in *Kugel-, Kegel- und zylindrischen Schalen*, infolge ihrer monolithischen Verbindung, ist seit langem ein Bedürfnis, und zwar nicht nur der Maschinen-, sondern auch der Bau-Praxis. Man denke an die genieteten oder geschweissten Behälter und Kessel unter hohem Ueberdruck und an die neuzeitlichen Kuppel- und Behälterbauten in Eisenbeton, z. B. an die 40 m weitgespannte, nur 6 cm starke Kuppel der Zeisswerke in Jena, oder an das schöne Wasserschloss der obern Stufe des Wäggitalwerkes, das in seiner Entlastungskammer mit rund 21 m Durchmesser ein Musterbeispiel monolithischer Verbindung von Zylinder- und Kegelschalen und kreisrunder Platten darstellt, und auch die Anregung gibt zur Untersuchung von Kegel- und Kugelschalen in *elastischer* Bettung.

Bei solchen Bauobjekten darf auch der Bauingenieur die Biegebeanspruchungen in den Anschlüssen nicht mehr vernachlässigen, da sie die Grundspannungen in erheblichem Masse überschreiten können. Die Momentenverteilung in der Längsrichtung kreiszylindrischer Behälterwände wird zwar von den Bauingenieuren schon lange berechnet, aber eben nur unter der vereinfachten Annahme *vollkommener* Einspannung in der Behältersohle. Es ergeben sich dabei sehr einfache, weiter unten abgeleitete Formeln, die man unter der, meistens zulässigen, Annahme der unendlich langen Zylinderschale gewinnt.

Ebenso leicht lassen sich nach der baustatischen Methode der Elastizitätsgleichungen die spezifischen Randkräfte in *umfanggelagerten* Behältern mit kreisrunden, ebenen Böden (oder Decken) bestimmen. — Die Berechnung zylindrischer Behälter mit Kuppelböden und -Decken von Kugel- und Kegelform, oder mit ebener Sohle auf elastischer Bettung hingegen entging bis jetzt einer einfachen baustatischen Behandlung, weil für die *Einflusszahlen der elastischen Randbewegung von Kugel- und Kegelschalen und kreisrunder Platten auf elastischer Bettung* keine einfachen geschlossenen Formeln vorhanden waren.

In einer (vor Ostern 1925 geschriebenen) grössern Abhandlung füllt der Verfasser diese Lücke aus, soweit es sich um dünne Schalen nicht allzu kleinen Stichverhältnisses handelt. In der selben Abhandlung wird übrigens gezeigt, dass in den seltenen Fällen sehr dicker Schalen (Steinkuppeln u. dergl.) die Einflusszahlen sich elementar mit Hilfe symmetrischer fünfgliedriger Differenzengleichungen mit, bis auf eine Schalenkonstante, ein für allemal ausgewerteter Vorzahlen ermitteln lassen [1]).

Mit Rücksicht auf den allgemein technischen Charakter der „S. B. Z." verzichte ich hier auf die Wiedergabe der mathematischen Ableitungen der genannten Abhandlung, glaube aber der Praxis zu dienen, wenn ich die auf die dünnen Schalen sich beziehenden Ergebnisse in der beigedruckten Tafel doch zur unmittelbaren Benützung zusammenstelle und zeige, wie einfach sich mit ihrer Hilfe die statisch unbestimmten, spezifischen Zwängungs-Randkräfte nach der *ein für allemal festliegenden baustatischen Methode* bestimmen lassen.

[1]) Diese Abhandlung erscheint in der *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* unter dem Titel: „Die praktische Berechnung biegefester Kugel- und Kegelschalen, kreisrunder Fundamentplatten auf elastischer Bettung und kreiszylindrischer Wandungen in gegenseitiger monolither Verbindung".

Wird nämlich die monolithische Verbindung zwischen der zylindrischen Längs- und der ebenen oder gewölbten Abschlusswand gelöst und durch eine gelenkige Verbindung ersetzt, die eine freie gegenseitige Verschiebung in Richtung der Zylindernormalen und eine freie gegenseitige Drehung der aneinanderstossenden Ränder erlaubt, so ergeben sich für die zwei, die monolithische Verbindung ersetzenden spezifischen Randkräfte M (Biegemoment) und H (Schub) zwei Elastizitätsgleichungen, die, wie bei jedem zweifach statisch unbestimmten System, die allgemeine Form zeigen

Nr. der Gleichung	M	H	Belastungsglieder
1	b_{11}	b_{12}	b_{10}
2	·	b_{22}	b_{20}

Die abgekürzte, besonders bei einer grossen Zahl von Ueberzähligen recht bequeme Schreibweise der Elastizitäts-Gleichungen ist leicht zu erfassen: Die Punkte deuten die aus dem Maxwell-Mohrschen Reziprozitätsgesetz folgende Gleichheit der Matrixvorzahlen b_{ik} und b_{ki} an; die Ueberzähligen und sämtliche Vorzahlen werden nur einmal geschrieben und alle Summen- und Gleichheitszeichen weggelassen. Die Auflösung erfolgt am raschesten nach dem abgekürzten Gauss'schen Algorithmus [1]).

Ist der Behälter durch zwei Querwände (z. B. durch Boden- und Deckelplatte) abgeschlossen, so können, für praktische Berechnungszwecke, die Elastizitätsgleichungen für die beiden Anschlusskreise meistens als voneinander unabhängig angenommen werden; dazu ist nur notwendig, dass die Länge l des Zylinders mindestens gleich wird der Wellenlänge πs der Funktionen

$$e^{-\frac{x}{s}} \cos \frac{x}{s}, \quad e^{-\frac{x}{s}} \sin \frac{x}{s}$$

mit deren Hilfe sich bekanntlich die Schnittkräfte und die Deformationsgrössen der langen Zylinderwand ausdrücken.

$$s = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-\nu^2)\,3}} \sqrt{h\,r}$$

ist dabei, wie bekannt, die *Charakteristik* (bezw. charakteristische Länge) des Zylinders.

Sowohl die Matrixvorzahlen als auch die Belastungsglieder der Elastizitätsgleichungen sind bei elastischer Einspannung *gegenseitige* Verschiebungsgrössen. Sie ergeben sich unmittelbar als Summen der entsprechenden Tabellenwerte a_{11}, a_{12}, a_{22} bezw. a_{10}, a_{20}. *(Merkregel:* Die Vorzeichen der a_{11} und a_{22} und somit auch der b_{11} und b_{22} sind *immer* positiv, jene der a_{12} und der b_{12} ergeben sich aus der Anschauung; die b_{11}, b_{12}, b_{22} sind unabhängig vom Belastungsfall.)

Beispiele zur Aufstellung der Elastizitätsgleichungen mit Hilfe der Tafel.

Erstes Beispiel: Man ermittle die statisch unbestimmten Zusatzkräfte M und H, die im Niet- oder Schweissring eines zylindrischen, von Kugelschalen beliebigen Stichverhältnisses abgeschlossenen Kessels infolge des konstanten innern Ueberdruckes p auftreten. (Anwendungsbeispiel Abbildung 5.)

[1]) Die grundlegende Bedeutung dieses elementaren Verfahrens für die analytischen und graphischen Methoden der technischen Baustatik wird in meiner Promotionsarbeit (Referent Prof. Dr. A. Rohn, Korreferent Prof. F. Baeschlin) nachgewiesen.

A. Elastizitäts-Gleichungen zum ersten Beispiel.

Nr. der Gl.	M	H	Belastungsglieder
1	$4\left[\frac{1}{w_1 h_1 r_1 s_1^3} + \frac{r_2^2}{h_2 s_2^3}\right]$	$2\left[\frac{\sin\alpha}{w_1 h_1 s_1^2} - \frac{r_2^2}{h_2 s_2^2}\right]$	$-\frac{p r_1 \cos\alpha}{2}\,\frac{2 r_2^2}{h_2 s_2^2}$
2	·	$\frac{r_1}{h_1 s_1}\left[\sin\alpha\,\frac{w_2}{w_1} - \nu\cos\alpha\right] + \frac{\mu^2_2}{h_2 s_2}$	$-\left[\frac{p r_2^2}{h_2}\left(1-\frac{\nu}{2}\right) - \frac{1-\nu}{2 h_1}\,p r_1^2 \sin\alpha - \frac{p r_1 \cos\alpha}{2}\,\frac{r_2^2}{h_2 s_2}\right]$

Im Hauptsystem, das bekanntlich mit grosser Genauigkeit als statisch bestimmt behandelt werden darf [1]), wird die Kugelschale mit der konstanten Meridian- und Tangentialzugspannung $\frac{p r_1}{2 h_1}$ beansprucht. Der Zylinder erleidet im Hauptsystem ausser der konstanten Ringzugspannung $\frac{p r_2}{h_2}$ noch Zusatzspannungen, herrührend von den Auflager-Reaktionen $\frac{p r_1 \sin\alpha}{2} = \frac{p r_2}{2}$ und Biegespannungen infolge des Schubes $H_0 = \frac{p r_1}{2}\cos\alpha$. Mit Hilfe der in der Tafel gegebenen Verschiebungsgrössen können nun, bei einiger Aufmerksamkeit auf die richtigen Vorzeichen, die beiden folgenden Bestimmungsgleichungen für M und H angeschrieben werden (vergl. oben, A):

Ausser beim ersten Glied von b_{20}, wo $r_1 \sin\alpha = r_2$ berücksichtigt wurde, sind die Matrixvorzahlen und die Belastungsglieder nicht weiter zusammengezogen worden, um ihre unmittelbare Entstehungsweise als Summen (Differenzen) der Tafelwerte erkennen zu lassen.

Man beachte, dass die Charakteristik s_2 der zylindrischen Schale eine *Länge*, die der Kugelschale dagegen eine *reine* Zahl ist

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{h}{r_1}}$$

Natürlich ist s_2 die mit r_2 ausmultiplizierte Kugelschalen-Charakteristik; doch benütz man bei der zylindrischen Schale bequemer die Längen-Charakteristik.

Die sehr einfache Auflösung der Gleichungen erfolgt hier, wie in jedem andern allgemeinen Fall, am besten *nach* Einsetzung der numerischen Werte für die Vorzahlen und Belastungsglieder. Im Sonderfall der tangential an den Zylinder anschliessenden Halbkugelschale und gleichen Wandstärken ($h_1 = h_2$) tritt eine bedeutende Vereinfachung ein: *Mit $\alpha = 90°$ ($w_1 = 1$, $w_2 = 2$) gehen die Einflusszahlen der Kugelschale in jene der Zylinderschale über und die Vorzahl $b_{12} = b_{31}$ verschwindet, ebenso das Belastungsglied in der ersten Gleichung* (gegenseitige Drehung im Hauptsystem).

Aus der ersten Gleichung folgt dann

$$M = 0$$

und aus der zweiten Gleichung

$$H = \frac{p r^2}{2 h} : \frac{4 r^2}{h s} = \frac{p s}{8}\ ^{2)}$$

wo s die charakteristische Länge des Zylinders bedeutet.

Zweites Beispiel: Man bestimme die spezifischen Zusatzkräfte im Anschlusskreis der ebenen Bodenplatte eines aufgehängten kreisrunden Flüssigkeitsbehälters (Wandstärke der zylindrischen Wand h_1, der Platte h_2, Radius des Behälters r, Flüssigkeitstiefe l, ihr spezifisches Gewicht γ). Auch hier können die Elastizitätsgleichungen für die Zusatzkräfte M und H mit Hilfe der Tafelwerte unmittelbar angeschrieben werden, wenn man noch beachtet, dass die Wand, infolge der Aufhängung, auch in der Längsrichtung auf Zug beansprucht wird ($\sigma_2 = \gamma l r : 2h$, Gleichungen B). Beide Gleichungen sind durch r gekürzt; das leicht zu berücksichtigende Eigengewicht des Behälters ist vernachlässigt.

Da die von der kreisrunden Platte in die Gleichung tretenden Verschiebungsgrössen die streng richtigen sind, mag es von Interesse sein, auch die genauern Formeln für die Einflusszahlen der zylindrischen Wand anzugeben.

[1]) Bei konstantem Oberflächendruck ist die statische Bestimmtheit für die Kugelschale sogar streng richtig.

[2]) Vergl. Prof. Dr. E. Meissner „Zur Festigkeitsberechnung von Hochdruck-Kesseltrommeln". „S. B. Z.", Bd. 86, S. 1 (4. Juli 1925), wo der Sonderfall vollständig durchgerechnet ist.

B. Elastizitäts-Gleichungen zum zweiten Beispiel.

Nr. der Gl	M	H	Belastungsglieder
1	$4\left(\frac{r}{h_1 s^3} + \frac{3(1-\nu)}{h_2^3}\right)$	$-\frac{2 r}{h_1 s}$	$\gamma r\left[\frac{1}{h_1} - 1{,}5(1-\nu)\,l\left(\frac{r}{h_2}\right)\right]$
2	·	$\frac{2 r}{h_1 s} + \frac{1-\nu}{h_2}$	$\frac{\gamma l r}{h_1}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$

Sie gestatten eine genauere Berechnung der zylindrischen Behälter mit starken Wänden und geringer Tiefe. Ich habe sie berechnet unter Berücksichtigung der vollständigen Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{s^4}{4} G_1^{IV} + G_1 = 0\ ^{1)}$$

Man findet mit

$$\lambda = \frac{l}{s},\ \mathrm{Sin}\,2\lambda = \frac{e^{2\lambda} - e^{-2\lambda}}{2},\ \mathrm{Cos}\,2\lambda = \frac{e^{2\lambda} + e^{-2\lambda}}{2}$$

$$a_{11} = \frac{4 r^2}{h s^3}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\lambda + \sin 2\lambda}{\mathrm{Cos}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2} = \varrho_1\,\frac{4 r^2}{h s^3}$$

$$a_{12} = \frac{2 r^2}{h s^2}\,\frac{\mathrm{Cos}\,2\lambda - \cos 2\lambda}{\mathrm{Cos}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2} = \varrho_2\,\frac{2 r^2}{h s^2}$$

$$a_{22} = \frac{2 r^2}{h s}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\lambda - \sin 2\lambda}{\mathrm{Cos}\,2\lambda + \cos 2\lambda - 2} = \varrho_3\,\frac{2 r^2}{h s}$$

Die ϱ-Werte hat der Verfasser schon vor Jahren tabelliert; sie finden sich in Tabellen, die demnächst veröffentlicht werden sollen. Diese Tabellen vereinfachen bedeutend die Berechnung von Fundamentbalken und -Platten auf elastischer Bettung, ebenso die von zylindrischen Schalen. Den Tabellen sind folgende Werte entnommen

$\lambda = 2 : \varrho_1 = 1{,}07620,\ \varrho_2 = 1{,}13414,\ \varrho_3 = 1{,}13760$

$\lambda = 3 : \varrho_1 = 1{,}00378,\ \varrho_2 = 1{,}00040,\ \varrho_3 = 1{,}00657$

Von $\lambda = 3$ an unterscheiden sich also die ϱ-Werte praktisch nicht mehr von 1 und *die Einflusszahlen gehen in der Tat in die des unendlich langen Zylinders über.*

Drittes Beispiel. Elastizitätsgleichungen eines kreisrunden Tiefbehälters mit ebener Sohle und kugelförmiger Kuppeldecke (Abbildung 6).

a) Elastizitätsgleichungen für den untern Anschluss. Da der Baugrund als elastisch nachgiebig (Bettungsziffer E_0) angenommen wird, tritt, ausser dem Flüssigkeits- und Erddruck noch als dritter Belastungsfall die spezifische Vertikal-Randbelastung P_0 [2]) der Sohlenplatte auf. Ihre *gleichmässige* Setzung infolge des vertikalen Flüssigkeitsdruckes hat keinen Einfluss auf die gesuchten Zusatz-Randkräfte. Beide Gleichungen (siehe C, nebenan) sind durch r^2 gekürzt; man löst sie gleichzeitig für alle drei Belastungsfälle auf.

Bei grossen Tiefbehältern wird oft die (dann nicht oder nur schwach bewehrte) Sohlenplatte durch eine gedichtete Fuge von der Wand getrennt und die Wand zu einem Fussring von gedrungenem Querschnitt erweitert, dessen Breite von der zulässigen Bodenpressung abhängt. Der Fussring gewährleistet eine Einspannung der Wand, die meistens (bei grösserer Bettungsziffer) nicht vernachlässigt werden darf. Die in der Tafel angegebenen Einflusszahlen und Belastungsglieder des beliebig geformten Fussringes sind berechnet nach der zulässigen Annahme seiner völligen Starrheit in *radialer* Richtung. Die zur obigen analoge Aufstellung der zugehörigen Elastizitäts-

[1]) Diese Differentialgleichung für das Biegemoment ist bei konstanter Wandstärke glauchlautend mit derjenigen für die Radialverschiebung. Da uns vor allem das Kräftespiel interessiert, bildet sie den natürlicheren und bequemeren Ausgangspunkt für die Berechnung.

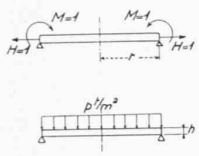
[2]) P_0 errechnet sich aus dem Eigengewicht der zylindrischen Wand und der Decke und dem Gewicht der Erdüberschüttung.

Hilfstafel zur Berechnung kreisrunder Behälter.

a_{11}, a_{12}, a_{22} = Einflusszahlen der elast. Randbewegung.
a_{10}, a_{20} = Elast. Randbewegung inf. Nutzlasten.

$\nu = 0{,}3$ für Flusseisen.
$\nu = 0{,}125$ für Beton.

I. Kreisr. umfanggelagerte Platte.

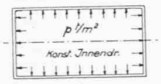


$a_{11} = \frac{12(1-\nu)r}{h^3}$

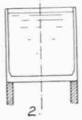
$a_{12} = 0$

$a_{22} = \frac{(1-\nu)r}{h}$

$a_{10} = 1{,}5(1-\nu)p\left(\frac{r}{h}\right)^3$

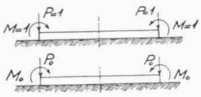


1.



2.

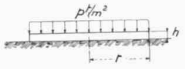
II. Kreisr. Platte auf elast. Bettung.



$a_{11} = \frac{4E}{s^3 E_0}\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda}}$

$a_{12} = \frac{2E}{s^2 E_0}\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda}}$ $\qquad \lambda = \frac{r}{s} > \sqrt{1}$

$a_{22} = \frac{2E}{s E_0}\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda}}$



$$\begin{cases} a_{10} = M_0 a_{11} - P_0 a_{12} \\ a_{20} = P_0 a_{22} - M_0 a_{12} \end{cases}$$

$a_{10} = 0\,,\ a_{20} = \frac{p}{E_0}$

s = charakterist. Länge $= \sqrt[4]{\frac{4JE}{E_0}}$

E_0 = Bettungsziffer t/m³

E = Elast. modul t/m²

3.

III. Behälter-Fussring auf elast. Bettung.

$E_0 = \infty$ (starre Einspg.) $\qquad E_0 = 0$ (freidrehb. gel.)

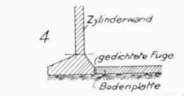
$a_{11} = \frac{1}{\frac{J}{F^2} + \frac{J E_0}{E}}$ $\qquad a_{11} = 0 \qquad a_{11} = \frac{F^2}{J}$

$a_{12} = \eta \cdot a_{11} \qquad a_{12} = 0 \qquad a_{12} = \eta\frac{F}{J}$

$a_{22} = \eta^2 a_{11} + \frac{F^2}{F} \qquad a_{22} = \frac{F^2}{F} \qquad a_{22} = \eta^2\frac{F^2}{J} + \frac{F^2}{F}$

$a_{10} = P_0 e\, a_{11}$

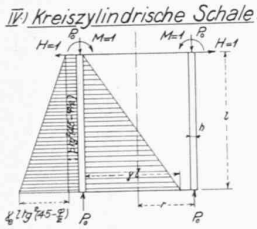
$a_{20} = P_0 e \eta\, a_{11}$



E_0 = Bettungsziffer t/m³
F = Inhalt des Ringquerschnittes
J = Trägh.moment des Ringqu. in bezug auf den Schwerpunkt.

Bemerkung: Ringspgen. inf. H als gleichf. verteilt angenommen. Reibung vernachlässigt.

IV) Kreiszylindrische Schale.



$\lambda > 3$

$a_{11} = \frac{4r^2}{hs^3}$, $\quad a_{12} = \frac{2r^2}{hs^2}$, $\quad a_{22} = \frac{2r^2}{hs}$

$\lambda < 3$

$a_{11} = \frac{4r^2}{hs^3}\frac{\sin 2\lambda + \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$

$a_{12} = \frac{2r^2}{hs^2}\frac{\cos 2\lambda - \cos 2\lambda}{\cos 2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$

$a_{22} = \frac{2r^2}{hs}\frac{\sin 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \cos 2\lambda - 2}$

Flüssigkeitsdruck

$a_{10} = \gamma\frac{r^2}{h}$

$a_{20} = \gamma\frac{r^3}{h}l$

Erddruck m. Auflast p t/m²

$a_{10} = \gamma_e \operatorname{tg}^2(45 - \varphi/2)\frac{r^2}{h}$

$a_{20} = \gamma_e \operatorname{tg}^2(45 - \varphi/2)\frac{r^2}{h}\left[l + \frac{p}{\gamma_e}\right]$

s = charakteristische Länge $= \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}\sqrt{hr}$

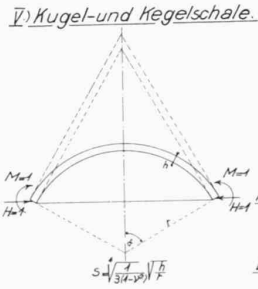
λ = Charakteristik $= \frac{l}{s}$

Vertikalbelastg.

$a_{10} = 0$

$a_{20} = \frac{\nu P r}{h}$

V) Kugel- und Kegelschale.



$a_{11} = \frac{1}{hrs^3\omega_1}$ $\qquad \omega_1 = 1 - \frac{s}{2}(4-2\nu)\operatorname{ctg}\alpha$

$a_{12} = \frac{2r}{hs^2}\frac{\sin\alpha}{\omega_1}$ $\qquad \omega_2 = 2 - s(4-\nu)\operatorname{ctg}\alpha$

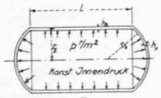
$a_{22} = \frac{2r}{hs}\left[\frac{\sin\alpha\,\omega_2}{2\omega_1} - \frac{\nu\cos\alpha}{2}\right]$ $\qquad s = \sqrt[4]{\frac{3}{(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{h}{r}}$

$s = \sqrt[4]{\frac{1}{3(1-\nu^2)}}\sqrt{\frac{h}{r}}$

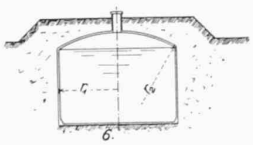
	Kugel:	Kegel:
Konst. Flüssigk.druck:	$a_{10} = 0$	$\frac{3}{2}\frac{pr}{h}\operatorname{ctg}\alpha$
	$a_{20} = \frac{(1-\nu)pr^3\sin\alpha}{2h}$	$pr^2(1-\frac{\nu}{2})\sin\alpha$
Eigengewicht	$a_{10} = \frac{(2+\nu)rq\sin\alpha}{h}$	$\frac{qr}{h\sin\alpha}\left[(1+\frac{\nu}{2})\cos 2\alpha + \frac{1-\nu}{2}\right]$
	$a_{20} = \frac{qr^2}{h}\left[\cos\alpha - \frac{1+\nu}{1+\cos\alpha}\right]\sin\alpha$	$\frac{qr^2}{2h}\left[\sin 2\alpha - \nu\operatorname{tg}\alpha\right]$
Gleichf. vert. Belastg. (q t/m² Horizont.proj.)	$a_{10} = \frac{qr}{h}\sin\alpha\cos\alpha(3+\nu)$	$\frac{qr}{h\operatorname{tg}\alpha}\left[(1+\frac{\nu}{2})\cos 2\alpha + \frac{1-\nu}{2}\right]$
	$a_{20} = \frac{qr^2}{2h}\sin\alpha(\cos 2\alpha - \nu)$	$\frac{qr^2}{2h}\left[\cos 2\alpha + (1-\nu)\right]\sin\alpha$
Gleichm. Temp.änd. um t°	$a_{10} = 0$	0
	$a_{20} = \pm E\alpha_t t(r\sin\alpha)$ $\sim \pm 20t(r\sin\alpha)$	$\pm E\alpha_t t r\sin\alpha$

r = Radius der tang. anschliessend. Kugelsch.

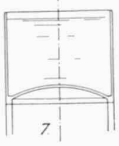
Zürich, im Juli 1925



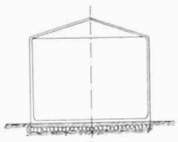
5.



6.



7



8.

Figuren 1–8 Anwendungsbeispiele.

C. Erste Elastizitäts-Gleichungen zum dritten Beispiel.

Nr. der Gl	M	H	Belastungsglieder infolge: vertikaler Belastungen	Flüssigkeitsdruck	Erddruck mit Auflast p t/m²
1	$4\left[\frac{1}{h_1 s_1^3} + \frac{E}{E_0}\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda_2}}\frac{1}{\mu^2 s_2^3}\right]$	$-\frac{2}{h_1 s_1^2}$	$\frac{2E}{E_0}\frac{1}{1-\frac{1}{2\lambda_2}}\frac{P_0}{r^2 s_2^2}$	$\frac{\gamma}{h_1}$	$-\frac{\gamma_e \operatorname{tg}^2(45-\varphi/2)}{h_1}$
2	·	$\frac{2}{h_1 s_1} + \frac{1-\nu}{r h_2}$	$\frac{-\nu P_0}{r h_1}$	$-\frac{\gamma}{h_1} l$	$+\frac{\gamma_e \operatorname{tg}^2(45-\varphi/2)}{h_1}\left[l + \frac{p}{\gamma_e}\right]$

D. Vereinfachte Gleichungen zum dritten Beispiel.

Nr. der Gl	M	H	Belastungsglieder infolge: P_0	Flüssigkeitsdruck	Erddruck mit Auflast
1	$\frac{4}{s^3}$	$-\frac{2}{s^2}$	0	γ	$-\gamma_e \operatorname{tg}^2(45-\varphi/2)$
2	·	$\frac{2}{s}$	$-\frac{\nu P_0}{r}$	$-\gamma l$	$+\gamma_e \operatorname{tg}^2\left(45-\varphi/2\right)\left(l + \frac{p}{\gamma_e}\right)$
und ihre Lösungen					
		$H =$	$\nu P_0 \frac{s}{r}$	$\frac{\gamma s^2}{2}\left(2\lambda - 1\right)$	$-\frac{\gamma_e \operatorname{tg}^2(45-\varphi/2)\, s^2}{2}\left(2\lambda - 1\right)$
		$M =$	$\frac{\nu}{2} P_0 \frac{s^2}{r}$	$\frac{\gamma s^3}{2}\left(\lambda + 1\right)$	$-\gamma_e \operatorname{tg}^2\left(45-\varphi/2\right)\left(1 + \frac{p}{\gamma_e l}\right)\left(\lambda + 1\right)\frac{s^3}{2}$

Gleichungen erübrigt sich. Dagegen sei noch der einleitend erwähnte Sonderfall der starren Einspannung kurz behandelt, da er, wie der Sonderfall des ersten Beispiels, ebenfalls auf einfache, geschlossene Formeln für M und H führt, und bei sehr hartem Baugrund in Frage kommt. Die stark vereinfachten Elastizitätsgleichungen für diesen Fall sind obenstehend unter D zusammengestellt.

b) Elastizitätsgleichungen für den obern Anschluss. Die Matrix der Gleichungen (d. h. das Verzeichnis der Beizahlen der Ueberzähligen M und H) ist genau die selbe wie im ersten Beispiel; wir können uns also mit der Auswertung der Belastungsglieder auf Grund der Tafelwerte begnügen.

Vertikalbelastung: Bei Decken in Kugel- und Kegelform darf bei nicht allzugrossem Pfeilverhältnis diese Belastung, herrührend vom Eigengewicht und der Erdaufschüttung, durch eine mittlere gleichförmig auf die Horizontalprojektion verteilte Belastung q ersetzt werden (bei Kuppelböden trennt man besser den Einfluss des Eigengewichtes von dem des Flüssigkeitsdruckes, den man mit dem Mittelwert als konstant annehmen darf). Die genauern Formeln sind unschwer abzuleiten, doch wenig übersichtlich. Mit der gemachten Annahme und den Tafelwerten findet man:

$$a_{10} = -\frac{q r_1}{h_1}\left(3 + \nu\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{q r_2}{2\operatorname{tg}\alpha}\frac{2 r_2^2}{h_2 s_2^2}$$
$$= -q r_2\left[\frac{3+\nu}{h_1}\cos\alpha + \frac{r_2^2}{h_2 s_2^2}\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right]$$

$$a_{20} = -\frac{q r_1^2}{2 h_1}\sin\alpha\left(\cos 2\alpha - \nu\right) + \frac{q r_2}{2\operatorname{tg}\alpha}\frac{2 r_2^2}{h_2 s} + \frac{\nu q r_2^2}{2 h_2}$$
$$= -\frac{q r_2^2}{2}\left[\frac{(\cos 2\alpha - \nu)}{h_1 \sin\alpha} - \frac{1}{h_2}\left(\frac{2 r_2}{s_2 \operatorname{tg}\alpha} + \nu\right)\right]$$

Flüssigkeits- und Erddruck auf die zylindrische Wand:

Vom Flüssigkeitsdruck

$$a_{10} = + \frac{\gamma r_2^2}{h_2}, \quad a_{20} = 0$$

Vom Erddruck

$$a_{10} = \gamma_e \operatorname{tg}^2 \left(45 - \varphi/2\right) \frac{r_2^2}{h_2}$$

$$a_{20} = - p \operatorname{tg}^2 \left(45 - \varphi/2\right) \frac{r_2^2}{h_2}$$

Der Index 1 bezieht sich auf die Kugel- und der Index 2 auf die zylindrische Schale.

Meistens ist die gewölbte Decke im Scheitel für den Anschluss des Einsteigschachtes bezw. des Entlüftungskamins durchbohrt.

Bei den üblichen geringen Durchmessern solcher Oeffnungen tritt nur eine *lokale* Spannungsänderung ein, die die elastische Bewegung der Randpartien verschwindend wenig zu beeinflussen vermag. Kleine Scheitelöffnungen ändern also die gegebene Berechnung der Auflager-Zusatzkräfte nicht. Die Berechnung der durchlochten Scheitelzone erfolgt genügend genau nach der Rankineschen Näherungstheorie [1]).

Damit ist die Berechnung der Ergänzungskräfte M und H in den Anschlusskreisen zur Genüge erläutert und es seien noch einige Worte über die Ermittlung der spezifischen Schnittkräfte und der Deformationen der zylindrischen Wand infolge M und $H + H_0$ gesagt.

Die in diesen Grössen auftretenden Funktionswerte

$$\eta_1 = e^{-\varphi} (\cos \varphi + \sin \varphi)$$
$$\eta_2 = e^{-\varphi} (\cos \varphi - \sin \varphi)$$
$$\eta_3 = e^{-\varphi} \cos \varphi$$
$$\eta_4 = e^{-\varphi} \sin \varphi$$

sind für variable φ (im Falle des Zylinders $\varphi = x/s$) ein für allemal tabelliert, erstmals von Zimmermann, 1888, in seiner Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Man findet einen Abdruck dieser bequemen Tabelle auch in dem bekannten Lehrbuch von Müller-Breslau, zweiter Band, zweite Hälfte. Sie erweist sich als nützliches Hilfsmittel zur raschen Berechnung nicht nur langer Balken und grösserer kreisrunder Platten auf elastischer Bettung, sondern auch dünner Zylinder- und Kugelschalen. Mit ihrer Hilfe kann man z. B., nach Berechnung von H_0, M, H, für die Biegemomente (G_1) und Querkräfte (N) in der zylindrischen Wand die einfachen Formeln anschreiben und ausrechnen.

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= M \eta_1 - (H + H_0) \eta_4 \\ s N &= - 2 \eta_4 M + (H + H_0) \eta_2 \end{aligned}\right\} \text{[2])}$$

Auf die entsprechenden für die Kugelschale und die kreisrunde Platte auf elastischer Bettung gültigen Gleichungen kann in dieser kurzen Zusammenfassung nicht eingetreten werden; es sei diesbezüglich auf die erwähnte ausführlichere Abhandlung verwiesen.

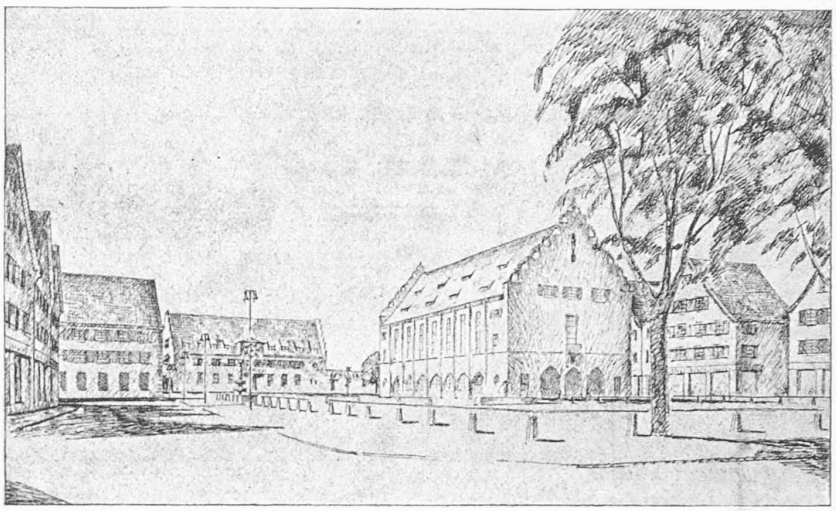
Zürich, Ende Juli 1925.

[1]) D. h. unter Vernachlässigung der Biege- und Schubspannungen. Unter derselben Annahme sind übrigens die angegebenen Belastungsglieder a_{10}, a_{20} für die Kugel- und Kegelschale berechnet. Die Zulässigkeit dieser Annahme für die behandelten Belastungsfälle weist die weiter oben erwähnte Abhandlung nach.

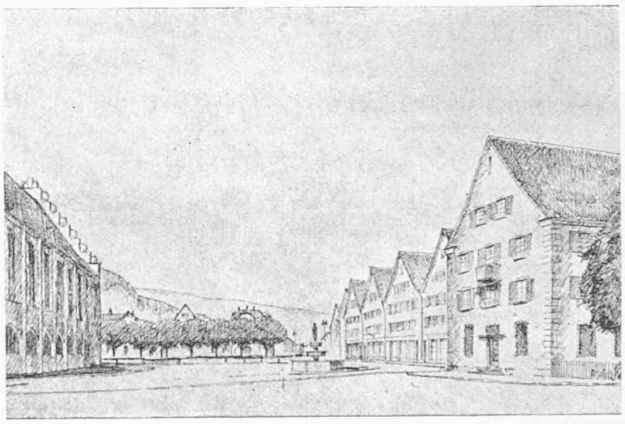
[2]) Diese Gleichungen folgen unmittelbar aus

$$G_1 = C_1 e^{-\varphi} \cos \varphi + C_2 e^{-\varphi} \sin \varphi \text{ und } N = \frac{d G_1}{dx}$$

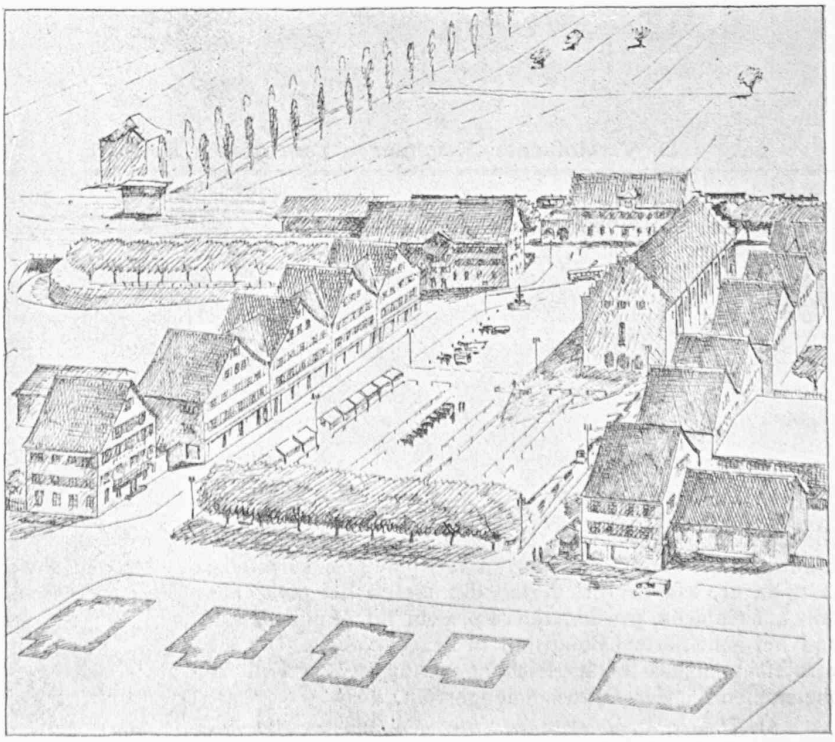
unter Berücksichtigung der Randbedingungen.



1. Rang (3000 Fr.): Entwurf Nr. 5. — Verfasser: Architekten v. Ziegler & Balmer, St. Gallen. Blick vom Viehmarkt aus auf Bahnhof (im Hintergrund) und Saalbau.



Der Marktplatz aus Südost. — Links der Saalbau.



1. Rang: Entwurf Nr. 5. — Verfasser: Architekten v. Ziegler & Balmer, St. Gallen. Fliegerbild des neuen Marktplatzes aus Nordwest.