Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 85/86 (1925)

Heft: 9

Inhaltsverzeichnis

Band 86. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 9**

Beitrag zur Theorie der Torsionsfestigkeit zylindrischer Hohlwellen mit variabler Wandstärke.

Von Dipl.-Ing. W. JANICKI, Zürich-Baden, gew. Assistent für technische Mechanik an der E. T. H.

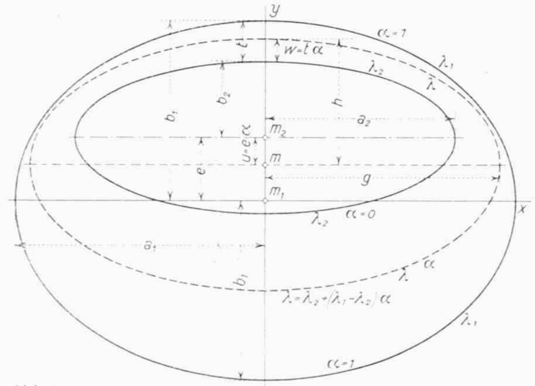

Abb. 1

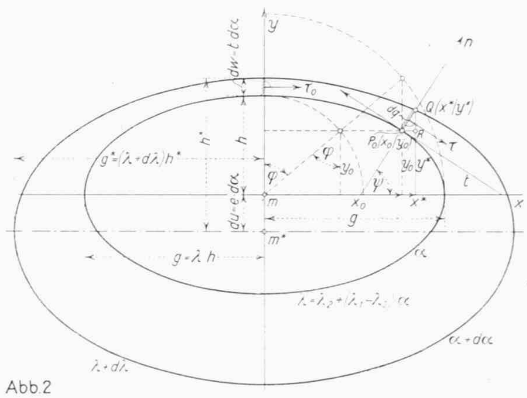

Abb. 2

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in *erster Annäherung* mit der Aufgabe der Torsionsbeanspruchung einer zylindrischen Hohlwelle von einseitig ellipsenringförmigem Querschnitt (Mittelpunkte der beiden Grenzellipsen exzentrisch gelegen, Abbildung 1), nach dem Verfahren des hydrodynamischen Analogons von Thomson und Tait[1]) unter Benützung des Stokeschen Satzes in der Fassung, wie sie von Bredt[2]) zum ersten Male aufgestellt worden ist. Es handelt sich demnach um das Problem, eine zwischen den beiden Grenzkurven des Querschnittes verlaufende zweidimensionale Flüssigkeitströmung zu ermitteln, deren Wirbelstärke (Zirkulation) in *jedem* Flächenelement *annähernd* konstant ist, was sich bei Uebertragung auf das Torsionsproblem durch die Bedingung

$$\int \tau\, ds = 2\, G\, \vartheta\, S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ausdrückt. Dabei bedeutet $\int \tau\, ds$ das Linienintegral der Schubspannung τ längs einer beliebig herausgegriffenen, vollständig in sich selbst geschlossenen Kurve, die im Innern des ins Auge gefassten Querschnittes verläuft, in dem die Schubspannung τ wirkt, S den Flächeninhalt des von der Kurve begrenzten Teiles des Querschnittes, G den Schubmodul des Materials und ϑ den Torsionswinkel, bezogen auf die Längeneinheit der verdrehten Welle.

Unsere Entwicklungen stützen sich auf vier Annahmen:

1. Alle Strömungslinien seien *angenähert* Ellipsen, was für die beiden Grenzkurven genau zutrifft (siehe Abbildung 1, Zwischenellipse α).

2. Das Axenverhältnis $\lambda = g : h$ einer beliebigen Zwischenellipse verändere sich derart *linear*, in Abhängigkeit eines willkürlichen Parameters α, dass sich für die beiden Umfangsellipsen, wie erforderlich, die Werte $\lambda_1 = a_1 : b_1$ und $\lambda_2 = a_2 : b_2$ ergeben, was sich durch den Ansatz ausdrückt:

$$\lambda = \lambda_2 + \mu\alpha \qquad [\mu = \lambda_1 - \lambda_2;\; 0 \leq \alpha \leq 1] \quad . \; . \quad (2)$$

3. Die Exzentrizität u der Zwischenellipse α variiere beim Uebergang von einer Stromlinie zur benachbarten *proportional* mit dem ursprünglichen Mittelpunktsabstand e, genüge also der Beziehung

$$u = e\,\alpha \qquad [0 \leq \alpha \leq 1] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

4. Um die Gestalt der Zwischenellipse *eindeutig* festzulegen, sei vorausgesetzt, dass die jeweilige Exzentrizität u und die Breite w an der engsten Stelle (siehe Abbildung 1)

[1]) *Thomson* und *Tait:* Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim, Braunschweig 1874, I. Band, 2. Teil, Seite 228.

[2]) *R. Bredt:* Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität, „Z. V. D. I.", Jahrgang 1896, Seite 785.

in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen, das durch den Wert dieses Verhältnisses für die Ausgangsgrössen $t\,[= b_1 - b_2 - e]$ und e (Abbildung 1) bestimmt ist; es sei also der Ansatz gemacht:

$$w : u = t : e, \text{ also}$$

$$w = \frac{u}{e}\, t = t\,\alpha \qquad [0 \leq \alpha \leq 1]\,^{3)} \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Mit diesen Annahmen folgt aus der Abbildung 1 für die Halbaxen g und h der Zwischenellipse (α)

$$\left.\begin{aligned} h &= b_2 + u + w = b_2 + (e + t)\,\alpha \\ g &= \lambda h \qquad\quad\;\; = \lambda\,[b_2 + (e + t)\,\alpha] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (5)$$

und für jene der unendlich benachbarten Zwischenellipse $(\alpha + d\alpha)$ (siehe Abbildung 2):

$$\left.\begin{aligned} h^* &= h + du + dw = h + (e + t)\, d\alpha \\ g^* &= \lambda^* h^* = h^* (\lambda + d\lambda) = [h + (e + t)\, d\alpha]\,(\lambda + \mu\, d\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Um nun die Kontinuitätsgleichung der wirbelfreien, viskositätslosen, inkompressiblen Flüssigkeit aufstellen zu können, derer wir für die Durchführung des hydro-dynamischen Analogons unseres Torsionsproblems bedürfen, müssen wir die Weite dq des in Abbildung 2 dargestellten Stromfadens an einer beliebigen Stelle (φ) bestimmen. Nach den bekannten Methoden der analytischen Geometrie findet man dafür unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zweiter und höherer Ordnung den Ausdruck:

$$dq = \frac{[e\,(1 - \cos\varphi) + t]\,\lambda + \mu\, h \sin^2\varphi}{\sin\varphi \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}\, d\alpha \quad . \; . \quad (7)$$

Die an der Stelle $\varphi = 0$, also im engsten Querschnitt des Stromfadens übertragene *mittlere* Schubspannung sei mit τ_0, die an einer beliebigen Stelle φ auftretende mit τ bezeichnet. Dann lautet die Kontinuitätsgleichung:

$$\tau_0\, dw = \tau\, dq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

und hieraus ergibt sich das Linienintegral J der Schubspannung τ längs der Stromlinie (α):

[3]) Es sei noch hervorgehoben, dass unter Verzicht auf die Uebereinstimmung der drei Proportionalitätsfaktoren α in den Formeln (2), (3), (4) und die lineare Abhängigkeit der Grössen λ, u, w von diesen Parametern sich allgemeinere Ansätze für die Veränderlichkeit dieser drei Grössen in Funktion dreier willkürlicher Parameter aufstellen lassen, die dann zu einer beliebig weit getriebenen Steigerung der Genauigkeit des hier verwendeten Näherungsverfahrens benützt werden können. Eine andere Möglichkeit zur Aufstellung brauchbarer Näherungsformeln liefert das bekannte Ritzsche Verfahren. Wenn man die Rechenarbeit nicht scheut, kann man für die sogenannte Airysche Spannungsfunktion F einen möglichst einfachen Ansatz mit einigen verfügbaren Freiwerten aufstellen, der nur den Grenzbedingungen an beiden Rändern zu genügen hat, hierauf die Formänderungsarbeit berechnen und dann die disponiblen Konstanten aus der Bedingung bestimmen, dass die Deformationsarbeit ein Minimum sein muss