Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 85/86 (1925)
Heft: 1

Artikel: Zur Festigkeitsberechnung von Hochdruck-Kesseltrommeln
Autor: Meissner, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-40146

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Zur Festigkeitsberechnung von Hochdruck-Kesseltrommeln. — Ueber den Aufbau und Charakter der Kosten von Eisenbahnbetrieben. — Die neue Synagoge an der Freigutstrasse in Zürich (mit Tafeln 1 und 2). — Zur Reorganisation der Eidgen. Materialprüfungsanstalt an der E. T. H. in Zürich. — Les Lacs, leur mode de formation, leurs eaux, leur destin. — Nekrologie: Friedrich Wehrli. — Miscellanea: Wasserlose Gasbehälter. Eine verkehrswissenschaftliche Woche in München. Starkstromunfälle in der Schweiz. Eidgenössische Technische Hochschule. Eine Staumauer von 220 m Höhe. — Konkurrenzen: Reconstruction de la Mosquée d'Amrou au Caire. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Gesellschaft Ehemaliger Studierender der E. T. H. S. T. S.

Band 86. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 1**

Zur Festigkeitsberechnung von Hochdruck-Kesseltrommeln.

Von Prof. Dr. E. MEISSNER, Zollikon bei Zürich.

In jüngster Zeit werden durch die Firma Krupp u. a. nahtlos geschmiedete Hochdruck-Kesseltrommeln aus Flusseisen und Nickelstahl ausgeführt, die beträchtlichen Innendrucken (bis 120 kg/cm) und Temperaturen bis über 400° C. ausgesetzt sind. Sie bestehen aus einem zylindrischen Teil, der an beiden Enden durch Halbkugelschalen abgeschlossen ist. Für ihre Berechnung fehlt es einstweilen an einer sichern Grundlage [1]). Der nachstehende Aufsatz sucht dazu einen Beitrag zu liefern. Er behandelt die elastische Aufgabe zunächst unter Annahme konstanter Wandstärke, konstanter Temperatur und undurchlochter Halbkugeln. Dabei zeigt es sich, dass zwar grundsätzlich die von mir entwickelte [2]) Theorie der elastischen Kugelschale herangezogen werden muss, dass sich aber eine durch sie kontrollierbare Näherungslösung verhältnismässig einfach angeben lässt, die auch für noch recht dicke Schalen genau genug ist.

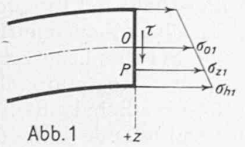

Abb. 1

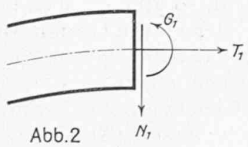

Abb. 2

1. *Die Annahmen der Schalentheorie über die Spannungsverteilung.*

Eine Schale von der Form einer Rotationsfläche mit rotationssymmetrischer Belastung sei gegeben. Ihre konstante Wandstärke sei $H = 2h$. In Abbildung 1 sei P ein Punkt im Abstand $OP = z$ von der Schalenmittelfläche (z positiv nach innen gemessen), σ_{z1} bezw. σ_{z2} seien die Normalspannungen auf ein Element, das normal zum Meridian bezw. Breitenkreis liegt, ε_{z1} und ε_{z2} seien die zugehörigen Dehnungen. Für die Normalspannung wird lineare Verteilung über die Schalendicke vorausgesetzt

$$\sigma_{z1} = \sigma_{01} + \lambda_1 z \qquad \sigma_{z2} = \sigma_{02} + \lambda_2 z \quad . \quad . \quad (1)$$

Es bestehen im Normalschnitt zum Meridian auch Schubspannungen τ in der z-Richtung.

Wir fassen zweckmässig die Spannungen, die auf ein Stück der Länge 1 längs eines Breitenkreises bezw. Meridians wirken, zu resultierenden Kräften und Momenten zusammen. Es ergeben sich die resultierenden Normalkräfte (Abb. 2)

$$T_1 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{z1} \cdot 1 \cdot dz = \sigma_{10} \cdot 2h \qquad T_2 = \sigma_{02} \cdot 2h$$

und die Biegungsmomente pro Längeneinheit

$$G_1 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{z1} \cdot z \cdot 1 \cdot dz = \lambda_1 \frac{2h^3}{3} \qquad G_2 = \lambda_2 \frac{2h^3}{3}$$

sowie eine resultierende Schubkraft N_1 im Normalschnitt zum Meridian; für den Normalschnitt zum Breitenkreis ist sie aus Symmetriegründen null. Umgekehrt ist die mittlere Normalspannung

$$\sigma_{01} = \frac{T_1}{2h}, \quad \sigma_{02} = \frac{T_2}{2h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die Biegungspannung der äussersten Faser

$$\sigma_{h1} = \frac{3G_1}{2h^2}, \quad \sigma_{h2} = \frac{3G_2}{2h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und somit die extremale Normalspannung

$$\frac{T_1}{2h} \pm \frac{3G_1}{2h^2} \quad \text{bezw.} \quad \frac{T_2}{2h} \pm \frac{3G_2}{2h^2} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) Ich verdanke den Hinweis auf das Problem dem Oberingenieur des Schweizer. Vereins von Dampfkesselbesitzern, Herrn *E. Höhn*.

[2]) Physikalische Zeitschrift, 14. Jahrgang, 1913, Seite 343 bis 349.

2. *Die Formeln für die Zylinderschale.*

Wir werden es im folgenden vor allem mit einer Zylinderschale zu tun haben. Sie habe den Halbmesser a. Es sei x die Koordinate gemessen längs einer Erzeugenden. Die Ableitungen nach x werden durch Akzente bezeichnet.

Seien $u(x)$, $w(x)$ die Verschiebungen eines Punktes $O(x)$ der Mittelfläche (Abbildung 1) in der Richtung der Erzeugenden und normal zur Fläche in der $+z$-Richtung bei der Deformation. Alsdann gibt das Hooke'sche Gesetz in Verbindung mit der Annahme, dass Flächennormalen gerade und normal bleiben [1]), die folgenden Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verschiebungen:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(u' - \nu\frac{w}{a}\right); & T_2 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{a} + \nu u'\right) \\ G_1 &= -Dw'' & G_2 &= -\nu D w'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

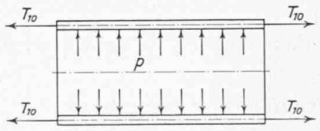

Abb. 3

Hierbei ist E der Zugmodul, ν die reziproke Poisson'sche Zahl, und D, die sogenannte Schalensteifigkeit, ist gegeben durch

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Beschränken wir uns auf den Fall, dass die Belastung aus einem konstanten Innendruck p besteht, so ergeben die Gleichgewichts-Bedingungen für ein Schalenelement

$$T_1 = \text{konst} = T_{10}; \quad N_1 = G_1' = -Dw'''; \quad \frac{T_2}{a} + N_1' - p = 0 \quad (7)$$

Man findet daraus

$$w'''' + 4\lambda^4 w = \frac{1}{D}\left(\frac{\nu T_{10}}{a} - p\right) \quad \text{mit } \lambda^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{4a^2h^2} \quad (8)$$

oder indem man $\xi = \lambda x$ einführt und Ableitungen nach ξ mit Punkten bezeichnet:

$$w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 4w = \frac{2a^2}{Eh}\left(\frac{\nu T_{10}}{a} - p\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

Diese Gleichung hat die spezielle Lösung

$$w_z = \frac{a^2}{2Eh}\left(\frac{\nu T_{10}}{a} - p\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und ihre allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} w = w_z &+ a_1 e^{\xi}\cos\xi + a_2 e^{\xi}\sin\xi + \\ &+ a_3 e^{-\xi}\cos\xi + a_4 e^{-\xi}\sin\xi \end{aligned} \quad . \quad . \quad (10)$$

oder anders geschrieben

$$\begin{aligned} w = w_z &+ b_1 \operatorname{ch}(\xi)\cos\xi + b_2 \operatorname{sh}(\xi)\sin\xi + \\ &+ b_3 \operatorname{ch}(\xi)\sin\xi + b_4 \operatorname{sh}(\xi)\cos\xi \end{aligned} \quad . \quad (10')$$

Die Lösung w_z gehört zu dem in Abbildung 3 skizzierten Belastungsfall: Innendruck p und Axialzug T_{10} an den sonst freien Rändern. Das Glied $-\frac{pa^2}{2Eh}$ gibt die Ausweitung des Zylinderhalbmessers durch den Druck und berechnet sich auch leicht aus der sogenannten Kesselformel. Das Glied $\frac{\nu a T_{10}}{2Eh}$ stellt die radiale Kontraktion dar, die sich wegen des Axialzuges T_{10} einstellt. Der Zylinder bleibt bei dieser Deformation Kreiszylinder. Nur der Radius geht von a nach $a - w_z$.

Im allgemeinen werden an den Zylinderrändern andere Bedingungen als diese herrschen. Zu w_z treten dann die in (10) gegebenen veränderlichen Glieder. Die Zylinder-Erzeugende geht über in eine Kurve, die nach (10) die Form einer gedämpften Schwingungskurve hat. Die Berg-

[1]) Die Theorie der elastischen Schalen ist entwickelt von *A. E. H. Love:* Elasticity (1906).

bezw. Talbreite einer Schwingung ist dabei, dem Wert $\xi = \pi$ entsprechend, gegeben durch

$$x = L = \frac{\pi}{\lambda} = a \sqrt{\frac{h}{a}}\, \pi \sqrt[4]{\frac{4}{3(1-\nu^2)}} \quad . \quad . \quad (11)$$

In den mir vorliegenden Fällen ausgeführter Trommeln variiert $\frac{h}{a}$ von $1/16$ bis $1/49$, $\sqrt{\frac{h}{a}}$ also von $1/4$ bis $1/7$. Nimmt man etwa $\nu = 0{,}3$, so folgt, dass L/a zwischen 0,5 und 0,85 liegt. Die Wellenlänge L ist also für normale Schalen nur ein Bruchteil des Zylinderhalbmessers, und zwar ein umso kleinerer, je dünner die Schale ist. Nach (10) klingt w vom Schalenrand nach Innen rasch ab. Eine Wellenlänge L vom Rand entfernt ist z. B. das Glied $e^{-\xi} \cos \xi$ vom Wert 1 schon auf den Wert $e^{-\pi} = -0{,}043$ gesunken. Analoges gilt für u.

Die am Rand angreifenden Kräfte haben also auf die Zylinderteile, die um mehr als den Halbmesser von ihm entfernt liegen, praktisch keinen Einfluss mehr. Ein schmales Gebiet längs des Randes nimmt die Randkräfte auf; es ist umso schmäler, je dünner die Schale ist.

Bei den erwähnten ausgeführten Trommeln ist die Zylinderlänge stets ein Vielfaches des Halbmessers. Man kann sich daher die Rechnungen abkürzen, indem man bei der Untersuchung der von den Randkräften herrührenden zusätzlichen Spannungen, den Zylinder nach der einen Seite unendlich lang annimmt, da er ja ohnehin weiter innen überhaupt nicht beansprucht wird. Verlegt man den Schalenrand nach $\xi = x = 0$, so hat man dann in (10) $a_1 = a_2 = 0$ zu setzen.

Ein besonderes Beispiel, das nachher gebraucht wird, soll näher ausgeführt werden.

3. *Die am Rand durch Radialkräfte beanspruchte Zylinderschale.*

Der Zylinderrand sei frei und werde durch nach aussen gerichtete, gleichförmig über den Umfang verteilte Schubkräfte N_{10} kg/cm beansprucht (Abbildung 4). Wir

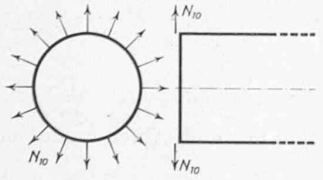

Abb. 4

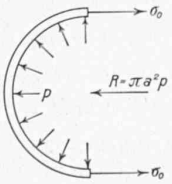

Abb. 6

können hier von Innendruck und Axialzug absehen, da wir diesen Fall durch Ueberlagern der Teillösungen nachträglich leicht behandeln können. Nach (10) ist

$$\left.\begin{aligned} w &= a_3 e^{-\xi} \cos \xi + a_4 e^{-\xi} \sin \xi \\ w' = \lambda w^{\cdot} &= \lambda e^{-\xi} [(-a_3 + a_4) \cos \xi - (a_3 + a_4) \sin \xi] \\ w'' = \lambda^2 w^{\cdot\cdot} &= 2 \lambda^2 e^{-\xi} [-a_4 \cos \xi + a_3 \sin \xi] \\ w''' = \lambda^3 w^{\cdot\cdot\cdot} &= 2 \lambda^3 e^{-\xi} [(a_3 + a_4) \cos \xi + (-a_3 + a_4) \sin \xi] \end{aligned}\right\} (12)$$

Für $\xi = 0$ ist

$$(G_1)_0 = -D(w'')_0 = 0 \qquad (N_1)_0 = N_{10} = -D(w''')_0$$

Das liefert

$$a_4 = 0 \qquad a_3 = -\frac{N_{10}}{2 D \lambda^3} \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} w = -\frac{N_{10}}{2 D \lambda^3} e^{-\xi} \cos \xi;\ w' = +\frac{N_{10}}{2 D \lambda^2} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \\ G_1 = \frac{N_{10}}{\lambda} e^{-\xi} \sin \xi;\ N_1 = N_{10} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) \end{aligned}\right\} (13)$$

Für die Biegungspannungen an der Innenseite der Schale ergibt sich wegen (3)

$$\sigma_{h1} = \frac{3 G_1}{2 h^2} = \frac{3 N_{10}}{2 \lambda h^2} e^{-\xi} \sin \xi \quad \text{bezw.} \quad \sigma_{h2} = \nu \sigma_{h1}$$

Sie erreichen, da, wo $N_1 = 0$ ist, also für $\xi = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{L}{4}$ ein Extremum, nämlich

$$\frac{3 N_{10}}{2 \sqrt{2} \lambda h^2} e^{-\frac{\pi}{4}} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\nu\, 3 N_{10}}{2 \sqrt{2} \lambda h^2} e^{-\frac{\pi}{4}} \quad . \quad . \quad (14)$$

In Abbildung 5 findet man diese Resultate graphisch dargestellt.

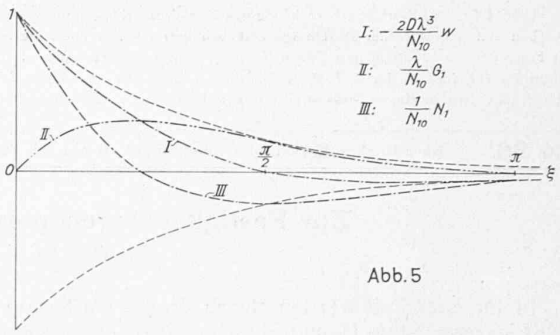

Abb. 5

Die Durchbiegung am Zylinderende wird

$$(w)_0 = -\frac{N_{10}}{2 D \lambda^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und die Neigung τ_0 der Meridiantangente ist dort gegeben durch

$$\operatorname{tg} \tau_0 = (w')_0 = \frac{N_{10}}{2 D \lambda^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

4. *Die Trommel.*

Wir betrachten jetzt das Gebilde, das entsteht, wenn wir die Zylinderschale durch eine Halbkugelschale abschliessen. Wie erwähnt, darf auch hier der Zylinder nach der einen Seite unendlich lang genommen werden. (Uebrigens ist diese Annahme nicht nötig, nur rechnungskürzend).

Wie für die Zylinderschale die einfache Lösung w_z besteht, so gibt es auch für die Kugelschale mit Innendruck eine elementare Grundlösung w_k, die allseitig symmetrische. Man hat dabei gleichförmig über die Schalendicke verteilte Zugspannungen σ_0, die sich analog zur Kesselformel aus den Gleichgewichts-Bedingungen für eine Schalenhälfte ermitteln lassen (Abbildung 6). Der resultierende Innendruck auf eine Halbkugel ist gleich $p a^2 \pi$, die Resultierende der Spannungen am Rand gleich $\sigma_0 \cdot 2 h \cdot 2 \pi a$. Durch Gleichsetzen folgt $\sigma_0 = \frac{p a}{4 h}$ und die Zugspannungsresultierende wird nach (2)

$$T_k = \frac{p a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ferner ist die spez. Dehnung in Richtung eines Grosskreises gleich $\frac{\sigma_0}{E} - \nu \frac{\sigma_0}{E}$ entsprechend dem in seiner Richtung wirkenden Zug und der vom Querzug herrührenden Kontraktion. Aber wenn w_k die wieder nach innen positiv gerechnete Normalverschiebung eines Punktes der Mittelfläche bedeutet, so ist diese Dehnung auch gleich

$$\frac{2 \pi (a - w_k) - 2 \pi a}{2 \pi a} = -\frac{w_k}{a}$$

Hieraus folgt

$$w_k = -\frac{a \sigma_0 (1 - \nu)}{E} = -\frac{p a^2}{E h} \frac{1 - \nu}{4} \quad . \quad . \quad (18)$$

Das negative Zeichen sagt aus, dass einem Innendruck eine Verschiebung nach aussen entspricht.

Nunmehr sollen Kugel- und Zylinderlösung zur Lösung für die Trommel zusammengesetzt werden.

An der Uebergangstelle müssen übereinstimmen

α) die Spannungsresultierenden T_1, N_1, G_1

β) die Radien der deformierten Schalen

γ) die Neigungen der deformierten Meridiantangenten.

Wir setzen α) entsprechend in der Zylinderlösung w_z für T_{10} den der Kugellösung entsprechenden Wert $\frac{pa}{2}$. Alsdann wird

$$w_z = -\frac{p a^2}{E h} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Jetzt zeigt der Vergleich mit (18), dass die Ausweitung des Zylinders bei dieser Lösung grösser ist, als die der Kugel im Verhältnis

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) : \frac{1 - \nu}{4} = \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \sim 2{,}4$$

Wären beide gleich, so läge die Lösung für die Trommel bereits vor, da die andern Bedingungen α), γ) erfüllt wären. Weil dies nicht der Fall ist, so werden die zwei Schalen

an ihrem gemeinsamen Rand nicht nur Zug-, sondern auch Schubkräfte N_{10} und Biegungsmomente G_{10} aufeinander übertragen, und N_{10} und G_{10} müssen solche Werte haben, dass unter ihrer Wirkung der Kugelrand noch weiter nach aussen, der deformierte Zylinderrand nachträglich wieder etwas nach innen gebogen wird, bis die Schalenränder zusammenkommen und mit stetiger Tangente ineinander übergehen.

Die Bestimmung dieser zusätzlichen Randkräfte macht die Schwierigkeit des Problems aus. Denn sie ist offenbar nur dann genau auszuführen, wenn die von N_{10} und G_{10} herrührende Deformation auch für die Halbkugelschale berechnet werden kann.

5. *Die Näherungslösung für die Trommel.*

Man kann diese Schwierigkeit umgehen, wenn es sich um nicht allzudicke Schalen handelt. Wir wissen, dass sich dann für den Zylinder die Wirkung von N_{10} und G_{10} auf einen schmalen Randsaum beschränkt. Es wird daher gar nicht darauf ankommen, welche Form und Steifigkeit die Schale ausserhalb dieses Randsaums besitzt. Man kann sich vorstellen, dass, statt zylindrisch zu verlaufen, sie sich ausserhalb des Randsaums halbkugelförmig zusammenschliesst, und man gelangt so zu der Auffassung, dass auch für die Halbkugelschale die Wirkung der Randkräfte auf ein schmales Randgebiet beschränkt sein wird. Dieses seinerseits kann wieder ersetzt gedacht werden durch eine Zylinderschale gleichen Halbmessers, deren Theorie man beherrscht, und die Kugelschale kann so eliminiert werden.

Indessen ist klar, dass diese Schlüsse ziemlich kühn sind. Für ganz dünne Schalen werden sie sicher nicht weit von der Wahrheit abweichen. Aber schon die angestellten Ueberschlagsrechnungen zeigen, dass die praktisch vorkommenden Schalendicken derart sind, dass diese Näherung nicht ohne Kontrolle verwendet werden darf. Sie wird weiter unten (unter 6) besprochen, und die genauen Resultate werden angegeben. Sie zeigen, dass die Näherung viel besser ist, als zu erwarten war und für gewöhnliche Fälle genügen dürfte. Unter den besprochenen Voraussetzungen ist jetzt folgende Aufgabe zu lösen:

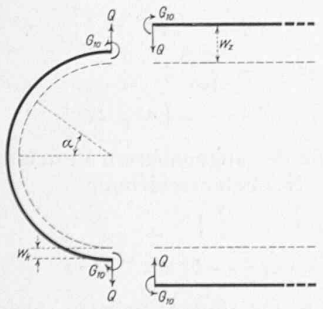

Abb. 7

Zwei zylindrische Schalen I und II sind gegeben. Die den Kugelrandsaum repräsentierende Schale I hat den Halbmesser $r = a - w_k$, die Schale II, die ursprüngliche Zylinderschale, hat den Radius $r = a - w_z$. Die Schubkraft $Q = -N_{10}$ [1]) und das Biegungsmoment G_{10} (Abbildung 7) sind so zu bestimmen, dass die Zylinderränder mit stetiger Tangente aneinander anschliessen. Der Sinn der Schubkraft und des Momentes ist noch unbekannt; jedenfalls aber ist er nach dem Gesetz der Wechselwirkung für die beiden Zylinder entgegengesetzt.

Wir fügen die Bemerkung hier ein, dass in allen Fällen, wo nicht gerade ihre Differenz in Frage kommt, die beiden Zylinderhalbmesser als gleich und gleich a angenommen werden dürfen, da ja w_k und w_z neben a verschwindend klein sind.

Der Unterschied der Radien beträgt

$$w_k - w_z = \frac{pa^2}{4Eh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Nun wird aber Zylinder I durch die Schubkräfte Q am Rand ebensoviel nach aussen deformiert, wie II nach innen, und die Schiefstellung der Meridiantangente ist die gleiche, da ja bei beiden der Unterschied nur in der *Richtung* von Q besteht. Dagegen würde ein Biegungsmoment G_{10} die Tangenten in verschiedenem Sinne drehen. Da der totale Verdrehungswinkel für I und II gleich sein soll, so folgt hieraus $G_{10} = 0$. *Die Schalenränder übertragen kein Biegungsmoment aufeinander.*

Nunmehr bleibt nur Q so zu bestimmen, dass jeder Schalenrand um

$$\tfrac{1}{2}(w_k - w_z) = \frac{pa^2}{8Eh}$$

durchgebogen wird. Man hat nach (15) mit $Q = -N_{10}$

$$\frac{pa^2}{8Eh} = \frac{Q}{2D\lambda^3} \text{ mithin } Q = \frac{pa^2 D\lambda^3}{4Eh} = \frac{p}{8\lambda} = \frac{pl}{8\pi} \quad (21)$$

Jetzt erhält man nach den Gleichungen (13), (19), (21) für die Deformation des Zylinders

$$w = -\frac{pa^2}{2Eh}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{p}{16D\lambda^4} e^{-\xi}\cos\xi$$
$$= -\frac{pa^2}{2Eh}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{4-2\nu} e^{-\xi}\cos\xi\right] \quad . \quad (22)$$

und nach (2), (3), (4) für die grössten Normalspannungen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{h1} &= \frac{pa}{4h} \pm \frac{3G_1}{2h^2} = \frac{pa}{4h}\left[1 \mp \frac{3}{2\sqrt{(1-\nu^2)\,3}} e^{-\xi}\sin\xi\right] \\
&\cong \frac{pa}{4h}\left[1 \pm 0{,}908\, e^{-\xi}\sin\xi\right] \\
\sigma_{h2} &= \frac{pa}{2h} \pm \frac{3\nu G_1}{2h^2} = \frac{pa}{2h}\left[1 \mp \frac{3\nu}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} e^{-\xi}\sin\xi\right] \\
&\cong \frac{pa}{2h}\left[1 \mp 0{,}136\, e^{-\xi}\sin\xi\right]
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Das obere Zeichen gilt für die innere, das untere für die Aussenseite der Zylinderschale.

Die grössten Spannungen treten da auf, wo die Schubkraft N_1 null wird, nämlich in $\xi = \frac{\pi}{4}$ d. h. $x = \frac{L}{4}$ und zwar an der Aussenseite. Mit $\nu = 0{,}3$ betragen sie

$$\sigma_{h1} = 0{,}323\,\frac{pa}{h} \qquad \sigma_{h2} = 0{,}522\,\frac{pa}{h}$$

Die nach der Kesselformel berechneten Ringspannungen $0{,}5\,\frac{pa}{h}$ *werden also nur um etwa 4 % überschritten, dagegen treten normal dazu Biegungspannungen* σ_{h1} *auf, die die meridionalen Zugspannungen* σ_{01} *um etwa 30 % überschreiten.* Der Umstand, dass trotzdem die Ringspannungen beträchtlich grösser sind, vermindert die Bedeutung dieses letzten Resultates. Die *Durchbiegung am Zylinderrand* beträgt nach (15), (21)

$$w_0 = \frac{pa^2}{8Eh}$$

Der Vergleich mit (19) zeigt, dass sie etwa *das 0,3-fache der Radialverschiebung in der Mitte beträgt.*

Eigentlich wären jetzt noch die Spannungen in der Kugelschale zu berechnen. Aber die durch den Innendruck erzeugte gleichmässige Spannung $\frac{pa}{4h}$ ist nur halb so gross, wie die entsprechende Ringspannung im Zylinder, und die zusätzlichen Spannungen sind in beiden Fällen ähnlich. Für die, die Festigkeit bestimmenden Spannungen wird also nur der Zylinder in Frage kommen. Die Kugelschale ist eben beträchtlich steifer.

6. *Zur genauen Theorie.*

Um die Näherungstheorie zu kontrollieren und um genauere Formeln für dicke Schalen zu erhalten, wurde die Theorie der Kugelschale [2]) zugezogen.

Die Berechnung scheint zunächst praktisch kaum durchführbar, da dort schlecht konvergierende hypergeometrische Reihen vorkommen. Indessen zeigt sich der glückliche Umstand, dass zur Bestimmung der am Rand übertragenen Schubkraft Q_0 und des (jetzt nicht mehr verschwindenden) Biegungsmomentes G_{10} nur die Werte der hypergeometrischen Funktion für das Argument 1 nötig sind. Diese aber kann man nach *Gauss* durch Gammafunktionen ausdrücken, und letztere lassen sich durch die sogenannte *Stirling*'sche Formel mühelos berechnen, da ihr Argument gross ist. So kommt man auf einem nicht ganz kurzen Weg zu einem einfachen, praktisch gut anwendbaren Resultat.

Wir skizzieren im folgenden den Rechnungsgang, um dem Kundigen die Möglichkeit der Ueberprüfung zu geben.

[1]) Wir ziehen vor, die Schubkraft ihrem wahren Sinn nach einzuführen.

[2]) Siehe Fussnote 2, Seite 1.

7. *Der Gang der Rechnung.*

Der von zwei Halbkugelschalen abgeschlossene Zylinder wird von endlicher Länge l vorausgesetzt; es zeigt sich später freilich, dass diese Länge praktisch keine Bedeutung hat, sobald sie wesentlich grösser ist, als der Halbmesser. Der Symmetrie des Problems entsprechend wird der Anfangspunkt $x = 0$ in die Mitte des Zylinders verlegt. Man hat jetzt für die Normalverschiebung

$$w = w_z + b_1 \operatorname{ch}(\xi) \cos(\xi) + b_2 \operatorname{sh}(\xi) \sin(\xi) \quad . \quad (24)$$

da die Lösung eine gerade Funktion von ξ sein muss.

Für die Kugelschale wird w als Funktion des Winkels α (Abbildung 7) aufgefasst. Es sei

$$k^2 = \frac{3(1-\nu^2)a^2}{h^2} - \nu^2 \sim \frac{3(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$

$$W = \sqrt{5 + 4ik} \qquad \alpha_1 = \frac{3+W}{4} \qquad \beta_1 = \frac{3-W}{4}$$

Man bilde die komplexe hypergeometrische Funktion

$$\sin\alpha\, F(\alpha_1, \beta_1, 2, \sin^2\alpha) =$$

$$= \sin\alpha \left\{ 1 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1\cdot 2}\sin^2\alpha + \frac{\alpha_1\beta_1(\alpha_1+1)(\beta_1+1)}{2!\,3!}\sin^4\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1\beta_1(\alpha_1+1)(\beta_1+1)(\alpha_1+2)(\beta_1+2)}{3!\,4!}\sin^6\alpha + \ldots \right\} = V_1 + iV_2$$

V_1 und V_2 sind reelle Funktionen von α. Die Verschiebung w wird jetzt

$$w = w_k + c_1\left(\frac{dV_1}{d\alpha} + w \operatorname{tg}\alpha\, V_1\right) + c_2\left(\frac{dV_2}{\alpha_2} + w \operatorname{tg}\alpha\, V_2\right)$$

wobei schon berücksichtigt ist, dass die Schalen undurchlocht sind.

Die vier Konstanten b_1, b_2, c_1, c_2 sind aus den Forderungen α), β), γ) des Anschnitts 4 zu bestimmen, die folgendermassen lauten:

$$\overline{T_1} - T_1 = 0 \quad \overline{G_1} - G_1 = 0 \quad \overline{N_1} + N_1 = 0 \quad \overline{w} - w = 0$$

$$\frac{1}{a}\frac{d\overline{w}}{d\alpha} + w' = 0$$

Es beziehen sich die überstrichenen Grössen auf die Randwerte der Kugelschale ($\alpha = \pi/2$), die unüberstrichenen auf die Randwerte der Zylinderschale. Sie liefern folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
& c_1 Q_1 + c_2 Q_2 - b_1 Cc - b_2 Ss = -\frac{pa^2}{4Eh} \\
& c_1(\nu Q_1 + kQ_2) + c_2(\nu Q_2 - kQ_1) + \\
& \qquad + b_1 \cdot 2\nu^2 a^2 Ss - b_2 \cdot 2\nu^2 a^2 Cc = 0 \\
& c_1(-P_1 + kP_2) - c_2(kP_1 + P_2) + \\
& \qquad + b_1 \nu a (Sc - Cs) + b_2 \nu a (Sc + Cs) = 0 \\
& c_1 P_1 + c_2 P_2 + b_1 \frac{2\nu^3}{3(1-\nu^2)}(Sc + Cs)\, a h^2 - \\
& \qquad - b_2 \frac{2\nu^3}{3(1-\nu^2)}(Sc - Cs)\, a h^2 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

wobei abkürzend gesetzt ist:

$$C = \operatorname{ch}\left(\frac{\nu l}{2}\right) \quad S = \operatorname{sh}\left(\nu\frac{l}{2}\right) \quad c = \cos\frac{\nu l}{2} \quad s = \sin\frac{\nu l}{2}$$

$$P_1 = V_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad P_2 = V_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad Q_1 = \left(\frac{dV_1}{d\alpha}\right)_{\frac{\pi}{2}} \quad Q_2 = \left(\frac{dV_2}{a\alpha}\right)_{\frac{\pi}{2}}$$

Nach *Gauss* ist

$$F(\alpha_1, \beta_1, 2, 1) = P_1 + iP_2 =$$

$$= \frac{\Gamma(2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(2-\alpha_1)\,\Gamma(2-\beta_1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2-\alpha_1)\,\Gamma(2-\beta_1)};$$

$$Q_1 + iQ_2 = \lim_{\alpha=\frac{\pi}{2}} 2\cos\alpha\, F' = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1)}$$

und die Berechnung dieser Ausdrücke geschieht so: Man setze

$$W = \sqrt{5 + 4ik} = p + iq$$

$$z_1 = \frac{p+1}{4} + \frac{iq}{4} \qquad z_2 = \frac{p-1}{4} + \frac{iq}{4}$$

und beachte im folgenden die für die Gammafunktion geltenden Relationen:

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \qquad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Es wird

$$P_1 + iP_2 = -\frac{\cos(\pi z_1)}{\sqrt{\pi}\, z_1}\,\frac{\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1)}$$

p und q sind für dünne Schalen grosse Zahlen, weil dann k gross ist. Deshalb kann die *Stirling*'sche Formel als asymptotische Entwicklung verwendet werden:

$$\lg\Gamma(z) \cong (z - 1/2)\lg z - z + \lg\sqrt{2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{12z} - \frac{1}{360\,z^3} + \frac{1}{1260\,z^5}$$

Praktisch wird dabei schon das letzte der angeschriebenen Glieder nicht mehr von Bedeutung sein.

Es empfiehlt sich, alle vorkommenden Grössen nach Potenzen der kleinen Grösse

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

zu entwickeln. Ich verzichte darauf, die umständlichen Ausdrücke für P_1, P_2 herzusetzen. Aus ihnen ermittelt man die Q direkt. Denn es ist

$$(P_1 + iP_2)(Q_1 + iQ_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(2-\alpha_1)\,\Gamma(2-\beta_1)}\,\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\beta_1)}$$

Aber

$$\Gamma(2-\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_1) = (1-\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_1) = \frac{(1-\alpha_1)\pi}{\sin\pi\alpha_1}$$

woraus

$$Q_1 + iQ_2 = -\frac{4}{(1+ik)\pi}\cos\left(\frac{\pi W}{2}\right)\frac{1}{P_1 + iP_2}$$

Auch die Auflösung der Gleichungen (25) lässt sich allgemein durchführen. Setzt man die so erhaltenen Reihenentwicklungen für b_1 und b_2 in (24) ein, verlegt man hierauf wie früher den Koordinaten-Anfangspunkt $\xi = 0$ nach dem Rand des Zylinders und ersetzt man, was völlig zulässig ist, die hyperbolischen Funktionen durch den einen Exponentialteil (was auf die Annahme eines unendlich langen Zylinders führt), so erhält man Formeln, die sich mit den früher erhaltenen, näherungsweise geltenden, ohne weiteres vergleichen lassen. Da die Theorie der Kugelschale hier nicht entwickelt worden ist, führen wir nur die Ergebnisse für die Zylinderschale an.

8. *Die Resultate der genauen Theorie.*

Man berechne

$$k = +\sqrt{\frac{3(1-\nu^2)a^2}{h^2} - \nu^2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{+\sqrt{2k}}$$

Ferner die schnell konvergierenden Reihen:

$$\Phi = 1 - \frac{\eta^2}{2} + \left(\frac{9}{16} - \frac{\nu}{4}\right)\eta^4 + \frac{283}{160}\eta^5 \ldots$$

$$\Psi = 1 - 1/2\,\eta^2 + 7/8\,\eta^4 + \frac{283}{160}\eta^5 \ldots$$

$$\delta_1 = -(1/4 + \nu)\,\eta^2 + (1/4 - \nu)\,\eta^4 - \frac{283}{320}\eta^5 \ldots$$

$$\delta_2 = 1 - 1/2\,\eta^2 - \left(1/16 + \frac{\nu}{2}\eta^4 \ldots\right)$$

Dann ergibt sich die an Stelle der angenäherten Beziehung (22) tretende Formel für die Normalverschiebung

$$w = -\frac{pa^2}{2Eh}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \times$$

$$\times \left[1 - \frac{\Psi}{(4-2\nu)\Phi}(\delta_2\cos\xi - \vartheta_1\sin\xi)\,e^{-\xi}\right]$$

Vernachlässigt man die für dünne Schalen kleine Grösse η, so erhält man genau die Formel (22) der Näherungstheorie. Da die erste Potenz von η in allen Reihen fehlt und für Schalen normaler Dicke η kleiner als 0,1 ist, so folgt, dass der *Fehler der Näherungsformel höchstens von der Grössenordnung eines Prozentes ist.*

Nach (5) wird das Biegungsmoment

$$G_1 = -D\,w''$$

$$= -\frac{Dpa^2\lambda^2}{Eh}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\frac{\Psi}{(4-2\nu)\Phi}(\vartheta_2\sin\xi + \delta_1\cos\xi)\,e^{-\xi}$$

Es wird am Rand nicht mehr genau gleich null, sondern nimmt dort den immerhin sehr kleinen Wert

$$G_{10} = \frac{(1/4 + \nu)}{24(1-\nu^2)}\,p\,h^2$$

an. Man ersieht auch hieraus, dass die Näherungsannahmen den Tatsachen sehr gut gerecht werden.

9. *Schlussbemerkungen.*

Für die praktische Festigkeitsberechnung der Trommel sind einige in unserer Theorie nicht beachtete Umstände zu berücksichtigen. Zunächst ist mindestens eine

der Halbkugelschalen durchlocht. Die Kugellösung ist dann allgemeiner, als die oben verwendete. Es treten zwei neue Integrationskonstanten auf, und weitere Bedingungen am Lochrand. Die Berechnung ist auch jetzt noch möglich, wenn sie auch umständlich wird. Ich verweise auf die Dissertation *Bolle* [1]), wo derartige Fälle behandelt sind.

Ferner sind bei Hochdrucktrommeln die Temperaturspannungen zu berücksichtigen. Für die Zylinderschale sind die zugehörigen Rechnungen durchgeführt [2]). Man kann die Theorie für beliebige rotationssymmetrische Schalen entwickeln, wenn man beliebige, aber rotationssymmetrische Verteilung der Temperaturen an der Innenseite und Aussenseite der Schale und linearen Temperaturabfall über die (kleine) Schalendicke voraussetzt.

Sehr viel schwieriger zu behandeln sind Abweichungen der abschliessenden Schalen von der Kugelform, und Veränderungen der Wandstärke. Man wird hier zu einer halb experimentellen Bestimmung Zuflucht nehmen, indem man etwa die Dehnungen an der Aussenseite der Schale misst. Die Festigkeitsaufgabe ist hierauf durch Quadraturen lösbar.

Ueber den Aufbau und Charakter der Kosten von Eisenbahnbetrieben.

Von Dipl. Ing. ALFRED WALTHER, Zürich.

Unter dem „Charakter der Kosten" versteht man deren Verhalten bei wechselndem Beschäftigungsgrad. In den „Grundzügen industrieller Kostenlehre" [3]) haben wir versucht, das Problem der *Abhängigkeit der Kosten vom Beschäftigungsgrad* näher zu umschreiben und die grundlegenden Begriffe zu ordnen. Absichtlich sind wir dabei jeder Spezialuntersuchung aus dem Wege gegangen, denn es lag uns daran, das verwickelte und noch recht wenig erforschte Gebiet der industriellen Kostenlehre einmal ganz allgemein darzustellen, um dadurch weitern Untersuchungen den Weg zu ebnen. Erfreulicherweise ist unser Versuch — wenigstens im Ausland — auf viel Verständnis gestossen. Man hat erkannt, dass die bisherige Behandlung des Kostenproblems, die über die richtige Verteilung der Produktionskosten auf die einzelnen Produkte eines Betriebes nicht hinauskommt, für wichtige Aufgaben, vor allem für die Preispolitik unzulänglich ist. „Aus der Erkenntnis dieser Unzulänglichkeit", schreibt Generaldirektor *Herbert Peiser* [4]), „entsteht eine neue Betrachtungsweise, die die Kosten der Erzeugung in ihrer Abhängigkeit von dem jeweiligen Beschäftigungsgrad zu erfassen sucht, ausgehend von der Ueberzeugung, dass nur durch Ergründung dieser Zusammenhänge eine für das einzelne Unternehmen und für die Allgemeinheit vorteilhafte Preis- und Geschäftspolitik möglich ist. Jede nähere Untersuchung zeigt, dass sich mit dieser Betrachtungsweise *neue, ungemein interessante Ausblicke eröffnen, die vielleicht geeignet sind, allmählich das ganze industrielle Kostenproblem in ihren Bann zu zwingen*". Wir stehen erst am Anfang dieser Entwicklung und es bedarf nun vor allem intensiver Spezialuntersuchungen auf den verschiedensten Gebieten der Industrie, um dem weitern Ausbau der noch in den Anfängen steckenden allgemeinen Theorie die nötige Nahrung zu geben.

Peiser hat in seiner vorerwähnten Arbeit [4]) Aufbau und Charakter der Kosten einer Dampfkraftanlage analysiert; in seiner letzten Veröffentlichung [5]) greift er das Problem der Abhängigkeit der Kosten vom Beschäftigungsgrad auf Grund des Ford'schen Buches von der volkswirtschaftlichen Seite an.

[1]) *L. Bolle*, Festigkeitsberechnung von Kugelscheiben. Dissertation Zürich 1916. Auch „S. B. Z.", Bd. 66, S. 105 u. 111 (28. Aug./4. Sept. 1915).

[2]) Vergl. etwa: *H. Lorenz*, „Techn. Physik", Bd. IV, München 1913 § 60, Seite 583.

[3]) „S. B. Z.", Bd. 81, April/Mai 1923. (Auch als Sonderabdruck erhältlich.) Red.

[4]) *H. Peiser*, Der Einfluss des Beschäftigungsgrades auf die industrielle Kostenentwicklung. Julius Springer, Berlin 1924.

[5]) *H. Peiser*, Fragen zur Produktionssteigerung im Lichte Ford'scher Ziffern. „Technik und Wirtschaft", 18. Jahrgang, Heft 2, Februar 1925.

Uns reizt es nun auch, die allgemeine Theorie an einem Spezialfall — und zwar dem Gebiet der *Eisenbahn-Selbstkosten* — zu erproben und, indem wir auf einige interessante Eigenschaften dieser Kosten aufmerksam machen, die Verwendbarkeit der Theorie zu zeigen.

I. Der Einfluss der Elektrifikation auf den Charakter der Zugförderungskosten der S. B. B.

Der Bericht der Generaldirektion der S. B. B. an den Verwaltungsrat vom 30. Juni 1924 über „Die Wirtschaftlichkeit des elektrischen Betriebes im Vergleich zum Dampfbetrieb" enthält ein ausserordentlich interessantes und aufschlussreiches Zahlenmaterial über die Abhängigkeit der Eisenbahnselbstkosten vom Beschäftigungsgrad. Es ist in dieser Zeitschrift bereits veröffentlicht und, allerdings von ganz anderem Gesichtspunkt aus, besprochen worden [1]). Wir können uns also auf jenen Artikel beziehen und uns eine nochmalige Wiedergabe und Erläuterung der zahlenmässigen Grundlagen unserer Untersuchung ersparen.

Die in dem vorerwähnten Bericht enthaltenen Zahlenangaben, die eigentlich nur zur Ermittlung des „Paritätspreises der Kohle" dienen, gestatten uns, mit wenigen ergänzenden Annahmen, das in mehrfacher Beziehung lehrreiche Bild der Zugförderungskosten graphisch darzustellen und so einen Ueberblick über Aufbau und Wachsen dieser Kosten bei Dampf- und elektrischem Betrieb zu gewinnen.

Betrachten wir zuerst die *„festen", vom Beschäftigungsgrad unabhängigen Kosten.* Hier spielt, bei elektrischem Betrieb, die Verzinsung und Erhaltung (Tilgung und Erneuerung) des Kapitals mit $g_E = 42{,}72$ Mill. pro Jahr eine sehr gewichtige Rolle, während der entsprechende Aufwand bei Dampfbetrieb, einschliesslich der geringen Mehrkosten des Bahnunterhalts, nur die Höhe von $g_D = 4{,}875$ Mill. erreicht. Bedienung und Unterhalt sämtlicher elektrischer Anlagen, kosten $a_E = 4{,}376$ Mill. Fr. Auch diese Kosten sind wohl zum grössten Teil unabhängig vom Grad der Beanspruchung des Verkehrsunternehmens. Ein Gegenposten findet sich hier beim Dampfbetrieb nicht.

Die Ausgaben für Führung, Bedienung und Unterhalt der Triebfahrzeuge c_E und c_D, wie auch die übrigen noch zu erwähnenden Kosten sind *abhängig vom Grad der Beschäftigung,* der im Bericht der Generaldirektion in Brutto-Tonnenkilometern und Zugskilometern ausgedrückt ist. Ueber den Verlauf der Kostenlinie bei wachsender Beschäftigung gibt der Bericht leider keine direkte Auskunft, da er sich auf einen ganz bestimmten Beschäftigungsgrad von 9,2 Milliarden Bruttotonnenkilometer (Verkehr 1913) konzentriert. Wir sind daher auf eigene Schätzung angewiesen und irren wohl nicht in der Voraussetzung, dass auch diese Kosten nicht von 0 aus ansteigen, sondern sich aus einem festen und einem proportional steigenden Teil zusammensetzen, denn auch bei kleinster Beschäftigung entstehen erhebliche Kosten, schon deshalb, weil ja ein grosser Teil der Züge, unbekümmert ob besetzt oder nicht, immer geführt werden muss. Nehmen wir einmal ganz roh an, dass ungefähr 70 % der fraglichen Kosten immer vorhanden seien und nur 30 % von der Tonnen-Kilometerzahl direkt abhänge, so erhalten wir bei elektrischem Betrieb zwei Werte, die unsere Kostenlinie bestimmen: 15,5 Mill. bei Beschäftigungsgrad 0 und 22,594 Mill. bei Beschäftigungsgrad 9,2 (9,2 Milliarden Brutto-tkm), und bei Dampfbetrieb entsprechend 21 Mill. und 28,983 Mill.

Beim elektrischen Betrieb sind dann noch die Kosten für Fremdstrom unter Abzug der Einnahmen aus dem Verkauf bahneigener Energie $b_E =$ total 1,27 Mill. zu erwähnen. Wir nehmen hier einen von 0 proportional steigenden Verlauf an, obschon dies nicht ganz stimmen wird. Der Einfluss dieser Kosten ist aber so gering, dass wir diese kleine Willkür in Kauf nehmen können.

Die Ausgaben für Speisewasser und Kohlentransport beim Dampfbetrieb, d_D, betragen 5,35 Mill. Sie sind direkt abhängig von der verbrauchten Kohlenmenge. Die Kohlenmenge selbst ist, nach dem Bericht der Generaldirektion,

[1]) Durch Prof. Dr. *W. Kummer* in Band 84, 25. Oktober 1924.