# Eigenschwingungen mit periodisch veränderlicher Elastizität

Autor(en): **Meissner, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **85/86 (1925)**

Heft 20

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40124

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

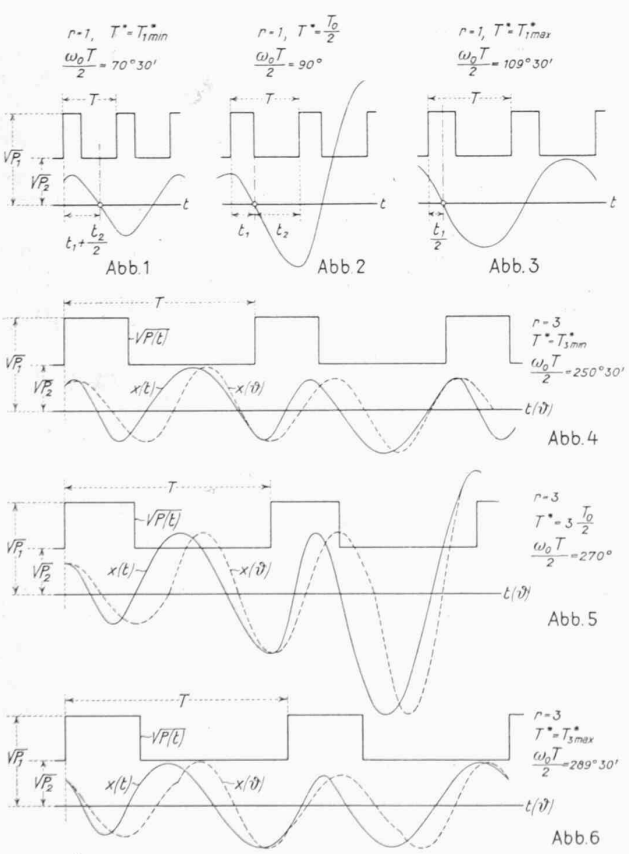
INHALT: Eigenschwingungen mit periodisch veränderlicher Elastizität. — Die Strassburger Resolution vom 29. April 1925. — Bahnhof-Wettbewerb Genf-Cornavin. — Ueber die Farbe in der Architektur. — Miscellanea: Winddruck im Hochgebirge. Ueber die technisch-wissenschaftlichen Forschungsarbeiten in den Vereinigten Staaten von Amerika. Der Aluminium-Fonds Neuhausen. Widerstandsfähigkeit des Beton gegenüber Milchsäure. Eidgen. Technische Hochschule. Hochspannungsleitung Beznau-Allschwil der N. O. K. V. Internationaler Strassenkongress in Mailand. — Nekrologie: Franz Scheiblauer. — Preisausschreiben zur Erlangung eines Spannungs- und eines Schwingungsmessers. — Literatur: Farbige Häuser. Fahrwiderstände von Schleppkähnen etc. Technische Blätter. Beiträge zum Bauen. Der Kaufmann. Literar. Neuigkeiten.

Band 85. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 20

# Eigenschwingungen mit periodisch veränderlicher Elastizität.

## I.

In Heft 24 von Band 84[1]) wendet sich Professor Dr. E. Meissner gegen eine von mir entwickelte Näherungs-Theorie[2]) für die Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. Was er scharf ablehnt, ist die „Auffassung, wonach die Instabilität eine Resonanz-Erscheinung sei, die irgend etwas mit der Ganzzahligkeit von Periodenverhältnissen zu tun habe". Dagegen glaubt er „behaupten zu dürfen", dass meine Näherungsformeln „genügende Genauigkeit geben, wenn die elastische Kraft nicht über den Wert Null hinaus schwankt und diesen Wert nie längere Zeit annimmt". (Eine noch etwas grössere Einschränkung habe ich selbst gemacht. Vergl. den in Fussnote 2 mit II bezeichneten Artikel, S. 55.)




Meine Näherungsformeln aber lauten bei Prof. Meissner wie folgt: Periode der elastischen Kraft $P(t)$ an den Stabilitätsgrenzen

$$T^* = \frac{T_0}{2}\, r \left(1 \pm \frac{\gamma_{2r}}{4}\right) \qquad r = 1, 2, 3 \ldots$$

Dabei ist $\gamma_{2r}$ der $r$-te Oberton der periodischen Funktion $\ln P(\vartheta) = \ln P(\vartheta + T)$, $T_0$ die mit dem Mittelwert von $\sqrt{P(t)}$ berechnete „mittlere Eigenschwingungsdauer des Systemes" und

$$\vartheta = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^t \sqrt{P(t)\, dt}$$

die Abszisse, auf die die $P(t)$-Kurve umzuzeichnen ist. Wenn man also die genügende Genauigkeit der obigen Näherungsformel für $P(t) > 0$ anerkennt, so bedeutet dies, dass man den Schwingungsvorgang für $P(t) > 0$ genügend genau wie folgt beschreiben kann:

1. Wenn die Periode $T^*/r$ des $r$-ten Obertons der Elastizität mit der halben mittleren Eigenschwingungsdauer $T_0/2$ des Systems übereinstimmt, befinden wir uns in einem Schüttelgebiet.

2. Die Breite $T^*_{max} - T^*_{min}$ dieses Schüttelgebietes ist der Amplitude $\gamma_{2r}$ eben dieses Obertones proportional.

Angesichts dieser beiden Kennzeichen hielt ich mich für berechtigt, von einer Art Resonanz-Erscheinung zwischen Grund- oder Oberwellen der Schwingung $\ln P(\vartheta)$ und der Schwingung $\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2$ zu sprechen und glaube trotz Prof. Meissner nicht, dass diese Bezeichnung dem technischen Sprachempfinden zuwiderläuft. In jedem Falle ist diese Erkenntnis, man mag sie nun ausdrücken wie man will, für die Technik neu und wertvoll.

Ich habe ferner an mir und andern die Erfahrung gemacht, dass das Auftreten von Schüttelzonen an Stelle von Resonanzpunkten dem Verständnis Schwierigkeiten bereitet. Es ist nicht ohne weiteres ersichtlich, wieso ein schwingungsfähiges System bei gegebenem Gesetz $P(t) = P(t+T)$ mit der Schwingung der elastischen Kraft nicht nur für einen Wert von $T^*$ im Takt bleiben kann, sondern für eine ganze Reihe nahegelegener Werte, für ein ganzes Schüttelgebiet. Ich habe deshalb in II S. 46 für ein einfaches Beispiel die negativ gedämpfte Schwingungskomponente allein untersucht und ihre zeitliche Lage gegen die Schwingung der elastischen Kraft berechnet. Das Ergebnis zeigen die (bisher nicht veröffentlichten) Abbildungen 1 bis 6 für zwei Schüttelgebiete $T^* \sim \frac{T_0}{2}$ und $T^* \sim 3\,\frac{T_0}{2}$. In beiden Fällen ist die volle Periode der Systemschwingung $2T$. Diese enthält jedoch im zweiten Falle $3 = r$ volle Wellen einer Schwingung, von der jede einzelne Welle dem entspricht, was man bei Systemen mit konstanter elastischer Kraft als volle Welle einer „Eigenschwingung" bezeichnet. Um die von Meissner gerügte Zweideutigkeit zu vermeiden, will ich für diese kürzern Wellen von variabler Wellenlänge den Ausdruck „charakteristische Schwingung" gebrauchen. Dann kann man sagen: Die Frequenz der charakteristischen Schwingung ist $\frac{r}{2T^*}$, liegt also in der Nähe von $\frac{1}{T_0}$. Das ist die Bedeutung der von Prof. Meissner unverstandenen Aussage II 57 bezw. III 93. Die Wellenlänge dieser charakteristischen Schwingung ist im $\vartheta$-Diagramm sehr viel weniger veränderlich als im $t$-Diagramm, daher die grosse Bedeutung des $\vartheta$-Diagrammes für die Ableitung einer Näherungstheorie, die Prof. Meissner ebenfalls entgangen zu sein scheint.

Die Abbildungen zeigen ferner, dass zu jeder Periode $T^*$ eine ganz besondere Lage („Phase") der charakteristischen Schwingung gegen die Elastizitätschwankung gehört. Ist zunächst nur die negativ gedämpfte Schwingungskomponente vorhanden, und ändert man plötzlich die Periode $T^*$ innerhalb eines Schüttelgebietes, so tritt vorübergehend auch die positiv gedämpfte Schwingungskomponente auf. Nachdem sie genügend abgeklungen ist, ist abermals nur die negativ gedämpfte Komponente sichtbar, die aber jetzt eine andere Lage gegen die Elastizitätsschwankung einnimmt als vor der Aenderung von $T^*$, und auch eine

[1]) 13. Dezember 1924 «Zur Schwingungslehre», Abschnitt 4.

[2]) «Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität.» Arch. f. El., 12. Bd., S. 38 (1923) (in der Folge mit II bezeichnet). Unter gleichem Titel in «Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik» (Festschrift für Aug. Föppl) Berlin 1924 (in der Folge mit III bezeichnet).

andere Grösse der negativen Dämpfung besitzt. Man kann auch umgekehrt sagen, dass innerhalb der Schüttelgebiete zu jeder Phase der charakteristischen Schwingung eine bestimmte Periode $T^*$ der Elastizitätsschwankung (bezw. eine mittlere Periode $\frac{2T^*}{r}$ der charakteristischen Schwingung) und ein bestimmter Dämpfungsexponent gehört (der in Abbildungen 1 bis 3 für die eine Hälfte der gesamten denkbaren Phasenverschiebung $T^*$ negativ, für die andere Hälfte positiv ist). Die begrenzte Veränderlichkeit der Eigenschwingungsdauern $T^*$ bezw. $\frac{T^*}{2r}$ findet also ihre Erklärung in der begrenzten Veränderungsmöglichkeit der gegenseitigen Phase von Elastizitätsschwankung und Systemschwingung. Wenn Prof. Meissner diese Erklärung mit den Worten verwirft: „Man sieht, zu welchen Mitteln der Verfasser seine Zuflucht nehmen muss", so sehe ich nur zwei Möglichkeiten; entweder hält er die mitgeteilten Resultate für falsch, oder für überflüssig. Im ersten Falle hätte er den Fehler nennen sollen. Im zweiten Falle beurteilt er die Denkungsweise der Ingenieure unrichtig. Wir besitzen nämlich nicht allein Bedürfnis nach abstrakter mathematischer Strenge, sondern ein vielleicht noch grösseres Bedürfnis nach Anschaulichkeit.

Ich komme nun zu den „Schlüssen, die in keiner Weise stichhalten, durch die der Vorgang gewaltsam zur Resonanz-Erscheinung gestempelt wird". Da ist zunächst zu sagen, dass sich gemäss II Seite 48 Fussnote 1[1]) die angegriffenen Ueberlegungen nur auf die innerhalb einer Schüttelzone negativ gedämpfte Schwingungskomponente beziehen, während die positiv gedämpfte Komponente als nicht vorhanden angesehen wird. Da diese bei geeigneten Anfangsbedingungen überhaupt nicht auftritt, oder, wenn sie ursprünglich vorhanden war, mit der Zeit vernachlässigbar klein wird, liegt diese Einschränkung besonders nahe. Sie ist ausserdem auf die Berechnung der Schüttelgebiete ohne Einfluss, da deren Grenzen nicht von den Anfangsbedingungen abhängen. Mit dieser Einschränkung und für $P(t) > 0$ wird Prof. Meissner gerne zugeben, dass man sich in einem Schüttelgebiete befindet, solange der Ausdruck $(E)_0^T = \frac{\omega_0^2}{P(0)} \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 \frac{d \ln P}{d\vartheta} d\vartheta$ positiv ist.

Nun hat die charakteristische Schwingung bei nicht zu stark veränderlicher Elastizität im $\vartheta$-Diagramm eine nur wenig veränderliche Wellenlänge. Es ist ferner möglich, die Periode $T^*$ so zu wählen, dass eine ganze Zahl ($r$) Wellen der charakteristischen Schwingung auf eine doppelte Periode $2T^*$ treffen. Die charakteristische Schwingung von $\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2$ hat dann eine wenig veränderliche Wellenlänge vom Mittelwert $T^*/r$. Wenn nun auch noch die Kurve $\ln P(\vartheta)$ einen Oberton von der Ordnungszahl $r$ besitzt, so ist leicht einzusehen, dass $(E)_0^T$ im allgemeinen von Null verschieden ist, ausser für eine ungedämpfte Systemschwingung von ganz bestimmter Phase gegen die Elastizitätsschwankung. Das Vorhandensein eines $r$-ten Obertons der $\ln P(\vartheta)$-Funktion bedingt also das Auftreten einer Schüttelzone von der Ordnungszahl $r$.

Das ist in kurzem der Gedankengang der zu der bereits diskutierten Gleichung für die Grenzen der Schüttelgebiete bei $P(t) > 0$ führt. Da bei ihrer Ableitung von der Systemschwingung $x(\vartheta) = x(\vartheta + 2T)$ nur die am stärksten ausgeprägte Harmonische berücksichtigt wird, kann die Formel nur näherungsweise richtig sein. Allein auch Prof. Meissner gibt zu, dass sie „überraschend gute numerische Resultate" liefert, „selbst wenn die Schwankungen der Elastizität nicht mehr ganz klein sind", und das ist ein Beweis dafür, dass die mitgeteilten Ueberlegungen gerade das Wesentliche des Schwingungsvorganges richtig erfassen. Ich darf erwarten, dass man hierin mehr erblicken wird als bloss „Luftsprünge, mit denen über Klippen hinweggesetzt wird".

Västeras, den 29. Januar 1925. Dr. L. Dreyfus.

[1]) In Arbeit III, die in der Hauptsache ein verkürzter Abdruck von II ist, ist diese Fussnote leider vergessen worden, wodurch die Angriffe Prof. Meissners teilweise verständlich werden.

II.

Den Ausführungen des Herrn Dreyfus habe ich folgendes beizufügen: Mir scheint, Herr Dreyfus verschiebe den Schwerpunkt der Diskussion. Ich habe nicht die Näherungsmethode, sondern die Art ihrer Begründung angegriffen. Meine Kritik muss ich im ganzen Umfang aufrecht erhalten, und ich kann beifügen, dass seine Darstellung in der Föppl-Festschrift S. 90, Zeile 8 v. u. und ff., den wesentlichen Punkt ganz übersieht und das zu Beweisende voraussetzt.

Wenn Herr Dreyfus in der vorliegenden Erwiderung sein Energiekriterium $J_{0T} > 0$ dadurch zu halten sucht, dass er im Integral zum vornherein die spezielle Lösung des instabilen Falles einsetzt, die ins Unendliche anwächst, so begeht er eine Trivialität. Die Bedingung $J_{0T} > 0$ ist *nicht* charakteristisch für eine Instabilitätszone, sie kann dort erfüllt sein oder auch nicht, sie kann aber auch im Stabilitätsgebiet statthaben. Denn es ist klar, dass dort die Energiestreuung während einer Zeit $T$ bald positiv, bald negativ sein muss, da doch die Bewegung weder erlischt, noch ins Unendliche anwächst.

Herr Dreyfus wendet in seiner Erwiderung ein eigentümliches Verfahren an. Er stellt verschiedene Behauptungen auf, illustriert an einem Beispiel und führt seinen Gegenbeweis mit der Redewendung: „Die Abbildungen zeigen ferner . . ." Dabei passiert ihm auch noch das Missgeschick, dass er stets mein Beispiel sprungweise unstetiger Elastizität benützt, für das seine Differential-Gleichung in der Veränderlichen $\vartheta$ sinnlos wird, da ja $\frac{d \lg c}{d\vartheta}$ gar nicht existiert. Spezielle Beispiele können nun natürlich nichts aussagen über den allgemeinen Fall, sie können sogar irreführen. In der Tat, die „Erkenntnis", die Herr Dreyfus oben unter 1) formuliert, trifft zufälligerweise zu für das erwähnte Beispiel.[1]) *Sie ist aber schon falsch,* wenn man die Elastizität dreimal springen lässt, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt. Es sei in $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

$$\omega = 2 \text{ für } 0 \leq t < T/12, \quad \omega = 1 \text{ für } T/12 \leq t < 7\,T/12,$$
$$\omega = 1/8 \text{ für } 7\,T/12 \leq t < T.$$

Nach Dreyfus wird der Mittelpunkt der ersten Labilitätszone gegeben durch $\frac{T_0}{2} = T_1 = \frac{\pi \cdot 32}{23}$. Berechnet man dagegen nach der genauen Formel S. 97 meines Aufsatzes III den Wert von $J_3$ für diese $T$, so findet man $J = -0{,}9445$. *Der nach Dreyfus berechnete Mittelpunkt der Labilitätszone liegt also überhaupt nicht mehr in derselben, sondern fällt schon ins Stabilitätsgebiet.* Der wahre Mittelpunkt liegt nicht bei $T = \pi \frac{32}{23}$, sondern bei $T = \pi \cdot \frac{25.6}{23}$. Um einen Einwand zum vornherein zu entkräftigen, will ich noch beifügen, dass sich auch noch derartige Beispiele mit geringerer Elastizitätsschwankung konstruieren lassen.

Was nun Herr Dreyfus weiter über den Schwingungsverlauf anführt, kann so lange nicht zu seiner Verteidigung dienen, als jede Spur eines Beweises für seine zahlreichen Behauptungen fehlt. Wenn ich nun unten, um die Diskussion ins Positive zu wenden, diese Beweise selber gebe, so ändert das an meiner grundsätzlichen Ablehnung seiner Resonanzauffassung nichts. Denn wenn auch während einer Periode $T$ im instabilen Fall *genau* eine ganze Anzahl von Wellenbergen und Tälern („charakteristische Schwingungen" nach Dreyfus) in den Fundamentalintegralen $N_1$ und $N_2$ auftreten, so unterscheiden sie sich durch Breite, Form und Höhe, und es ist durchaus nicht einzusehen, warum eine Summation der Wirkung, die die Resonanz kennzeichnet, eintreten sollte. Uebrigens wird dieser Analogieschluss durch die Erscheinung selbst widerlegt: *Es resoniert*

[1]) Man hat zu setzen $T_r = r \frac{T_0}{2} = \frac{r\pi(\tau_1 + \tau_2)}{\nu_1 \tau_1 + \nu_1 \tau_2}$, und damit den Ausdruck zu bilden

$J_2 = \cos\left(\frac{T_0 \nu_1 \tau_1}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{T \nu_2 \tau_2}{2\pi}\right) - \nu_{12} \sin\left(\frac{T \nu_1 \tau_1}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{T \nu_2 \tau_2}{2\pi}\right)$. Es wird dann

$J_2 = (-1)^r \left\{ \cos^2\left(\frac{T \nu_1 \tau_1}{2\pi}\right) + \nu_{12} \sin^2\left(\frac{T \nu_1 \tau_1}{2\pi}\right) \right\}$ und da $\nu_{12} \geq 1$ ist $[J] \geq 1$.

*ja nur das eine der Integrale N,* warum denn nicht das zweite, für das doch genau dieselben Bedingungen gelten?

Herr Dreyfus hat sich in seinen Rechnungen durch ein Beispiel leiten lassen und das ist der Grund, warum er in der Richtung geblieben ist. Die Genauigkeit seiner Formeln, über die ich mich vermutungsweise geäussert hatte, muss ich nach dem oben erwähnten Gegenbeispiel jetzt freilich etwas ungünstiger beurteilen.

Zu den Bemerkungen über die Psychologie des Ingenieurs und das für ihn nötige Mass von wahrer Anschaulichkeit und von Strenge nehme ich nicht Stellung, da hierzu wohl hier nicht der Ort ist.

Das Folgende möchte ich zur Förderung der Sache beitragen: Ich gehe aus von der Differentialgleichung (3*) von III:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + T^2 q(\tau) \cdot y = 0 \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (1)$$

deren allgemeine Lösung mit Hilfe der dort verwendeten normierten Integrale $\eta_1$, $\eta_2$ lautet

$$y = \alpha\, \eta_1 + \beta\, \eta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die inhomogene Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + T^2 q(\tau) \cdot y = f(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hat dann die Lösung

$$y = -\eta_1(\tau) \int_0^\tau f\, \eta_2\, d\tau + \eta_2 \int_0^\tau f\, \eta_1\, d\tau + h_1\, \eta_1 + h_2\, \eta_2 \quad (4)$$

Ferner berufe ich mich auf die von *Sturm*[1]) herrührenden Sätze:

$\alpha$) Die Integrale von (1) oszillieren.

$\beta$) Die Nullstellen zweier Integrale von (1) trennen sich.

$\gamma$) Mit wachsendem $T$ wandern die Nullstellen der Integrale $\eta_1$ $\eta_2$ gegen den Nullpunkt zu.

Diese Sätze lassen sich elementar beweisen.[2])

1) Jetzt werde das Integral $\eta_2$ in seiner Abhängigkeit von $T$ betrachtet, wobei die Relationen

$$\eta_2(0) = 0 \quad \eta'_2(0) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

zu beachten sind. Das Intervall $0 < t < 2\pi$ heisse $\Delta$. Für $T = 0$ hat $\eta_2$ keine Nullstelle in $\Delta$. Wenn $T$ wächst, so rückt nach $\gamma$) sagen wir für $T = \Theta_1$ eine erste Nullstelle von $\eta_2$ nach $2\pi$. Dann haben alle übrigen Lösungen von (1) wegen $\beta$) eine und nur eine Nullstelle in $\Delta$. Für $T < \Theta_1$ haben sie entweder eine oder keine. Wächst $T$ weiter, so rückt für $T = \Theta_2$ eine zweite Nullstelle nach $2\pi$, während die erste ins Innere von $\Delta$ wandert. Für dieses $T$ hat also $\eta_2$ einen Wellenberg und ein Tal in $\Delta$. Alle andern Lösungen haben jetzt genau zwei Nullstellen in $\Delta$. Für $\Theta_1 < T < \Theta_2$ dagegen haben sie entweder eine oder zwei Nullstellen (nach $\beta$). Und so weiter. Allgemein erhält man eine unendliche Folge von Werten

$$O = \Theta_0 < \Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

von der Art, dass für $\Theta_{i-1} < T < \Theta_i$ *die Zahl der Nullstellen* jedes von $\eta_2$ wesentlich verschiedenen[3]) Integrals *gleich ist (i — 1) oder i,* und dass *für* $T = \Theta_i$ diese Zahl *genau gleich i ist.*

2) *Die Werte* $T = \Theta_i$ *fallen ins Labilitätsgebiet.* Denn für sie ist (mit den Bezeichnungen meiner frühern Aufsätze) $c = 0$ also wegen $(a \cdot d - b \cdot c) = 1$ auch $d = 1 : a$ und somit

$$J = \frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

Dieser Ausdruck ist grösser als $+1$, wenn $a$ positiv, kleiner als $-1$, wenn $a$ negativ ist. Wir wollen dem entsprechend im ersten Fall von einem *positiven* ($L^+$), im letztern von einem *negativen Labilitätsgebiet* ($L^-$) sprechen.

3) In jeder Labilitätszone gibt es nach (III) zwei Fundamentalintegrale $N_1$ und $N_2$ so, dass

$$N_1(\tau + 2\pi) = \sigma\, N_1(\tau) \qquad N_2(\tau + 2\pi) = \frac{1}{\sigma} N_2(\tau)$$

Dabei hat $\sigma$ das selbe Zeichen wie $J$. Nun ist für $\sigma > 0$ die Zahl der Nullstellen der $N$ in $\Delta$ notwendig gerade, ungerade für $\sigma < 0$. Die Fundamentalintegrale haben in einer positiven Zone eine gerade, in einer negativen Zone eine ungerade Zahl von Nullstellen in $\Delta$.

4) *In eine Labilitätszone fällt nie mehr als ein Wert* $\Theta_i$. Denn von zwei auf einander folgenden Werten liegt stets der eine in $L^+$ und der andere in $L^-$.

5) *Zwischen zwei negativen Labilitätszonen liegt stets eine positive und umgekehrt.* Dieser Hauptsatz kommt darauf heraus, zu zeigen, dass die Kulminationen der Kurve $J(T)$ niemals ins Stabilitätsgebiet hineinfallen. Man hat also den Ausdruck $\frac{\partial J}{\partial T}$ zu berechnen.

Die Ableitung von (1) nach $T$ gibt zunächst

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\frac{\partial y}{\partial T} + T^2 q \frac{\partial y}{\partial T} = -2\,T q \cdot y \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

was nach (4) die Lösung hat

$$\frac{\partial y}{\partial T} = +2T\eta_1 \int_0^\tau q\, y\, \eta_2\, d\tau - 2T\eta_2 \int_0^\tau q\, y\, \eta_1\, d\tau + h_1\, \eta_1 + h_2\, \eta_2 \quad (8)$$

Setzt man hierin $y = \eta_1$ und bemerkt man, dass wegen (5) $h_1 = h_2 = 0$ ist, so wird

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T} = 2\,T\,\eta_1 \int_0^\tau q\, \eta_1\, \eta_2\, d\tau - 2\,T\,\eta_2 \int_0^\tau q\, \eta_1^2\, d\tau$$

und für $\tau = 2\pi$

$$\frac{\partial a}{\partial T} = 2T \int_0^{2\pi} q\, [a\, \eta_1\, \eta_2 - c\, \eta_1^2]\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Ableitung von (8) nach $\tau$ gibt

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{dy}{d\tau}\right) = 2T\frac{d\eta_1}{d\tau}\int_0^\tau q\, y\, \eta_2\, d\tau - 2T\frac{d\eta_2}{d\tau}\int_0^\tau q\, y\, \eta_1\, d\tau + h_1\, \eta_1^1 + h_2\, \eta_2^1$$

und für $y = \eta_2$ und $\tau = 2\pi$ ($h_1 = h_2 = 0$)

$$\frac{\partial d}{\partial T} = 2T \int_0^{2\pi} q\, [b\, \eta_2^2 - d\, \eta_1\, \eta_2]\, d\tau$$

woraus durch Addition zu (9)

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{a+d}{2}\right) = \frac{\partial J}{\partial T} = T \int_0^{2\pi} q\, [(a - d)\, \eta_1\, \eta_2 - c\, \eta_1^2 + b\, \eta_2^2]\, d\tau \quad (10)$$

Nun ist für ein Instabilitätsgebiet

$$N_1 = c\, \eta_1 + (\sigma - a)\, \eta_2 \qquad N_2 = c\, \eta_1 + \left(\frac{1}{\sigma} - a\right)\eta_2$$

während im stabilen Gebiet an Stelle dieser Lösungen die in III mit $\varphi_1$ $\varphi_2$ bezeichneten reellen Integrale

$$\varphi_1 = c\, \eta_1 + (\cos\varphi - a)\, \eta_2 \quad \varphi_2 = \sin\varphi \cdot \eta_2 \quad \left(\cos\varphi = \frac{a+d}{2}\right)$$

treten. Man rechnet leicht nach, dass sich (10) in die Form bringen lässt:

für eine Stabilitätszone:

$$\frac{\partial J}{\partial T} = -\frac{T}{c}\int_0^{2\pi} q\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

für eine Labilitätszone:

$$\frac{\partial J}{\partial T} = -\frac{T}{c}\int_0^{2\pi} q \cdot N_1\, N_2\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Im stabilen Gebiet ist $c$ ungleich 0 und nach (11) hat somit $\frac{\partial T}{\partial J}$ stets das selbe Zeichen. Wenn also die Kurve $J(T)$ in den Streifen $|J| \leq 1$ eintritt, so durchsetzt sie ihn und tritt auf der andern Seite heraus. Kommt sie aus einem positiven Labilitätsgebiet $L^+$, so geht sie zu einem negativen $L^-$ und umgekehrt. Damit ist der anfangs aufgestellte Satz bewiesen.[1])

Wir haben bisher ein eigentliches Schneiden des Streifens durch die Kurve $J(T)$ vorausgesetzt. Der Fall des Berührens von innen ist auch als Grenzfall möglich und erledigt sich leicht direkt. Er führt zu dem Ausnahme-

[1]) Man vergl. etwa *Bôcher:* Leçons sur les méthodes de Sturm. Paris 1917. Coll. Borel.

[2]) Z. B. *Riemann-Weber:* Partielle Differential-Gleichungen der Physik. 2. Band. Braunschweig.

[3]) d. h. nicht nur um einen konstanten Faktor verschiedenen.

[1]) Ein Teil dieser Resultate findet sich schon bei Bôcher, loc. cit.

fall $a = d = 1$, $b = c = 0$, wo alle Integrale rein periodisch sind. Die zugehörige Labilitätszone reduziert sich auf einen Punkt.

6) Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich, dass für Fundamental-Lösungen $N_1$ und $N_2$ *in der i-ten Labilitätszone die Zahl der Wellenberge und Täler insgesamt gleich i ist.*

7) Ueber die Lage und Grösse der Labilitätszonen ergeben sich aus dem Vorhergehenden einige Beziehungen, wenn man noch folgenden bekannten [2]) Satz zu Hilfe nimmt: Ist in Gleichung (1)

$$K_1 \leq +\sqrt{q} \leq K_2$$

so gilt für den Abstand $\delta$ irgend zweier aufeinander folgender Nullstellen einer Lösung von (1)

$$\frac{\pi}{TK_2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{TK_1}$$

Sind nun $T_{i1}$ und $T_{i2}$ die Randpunkte der $i$-ten Labilitätszone, und beachtet man, dass dort halb- oder ganzperiodische Lösungen mit $i$ Nullstellen bestehen, so folgt hieraus

$$\frac{i\pi}{T_{i1}K_2} \leq 2\pi \leq \frac{i\pi}{T_{i1}K_1} \qquad \frac{i\pi}{T_{i+1}K_2} \leq 2\pi \leq \frac{i\pi}{T_{i+1}K_1}$$

oder

$$\frac{i\pi}{2K_2} \leq T_{i1} \leq T_{i2} \leq \frac{i\pi}{2K_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Diese Ungleichungen beschränken die mögliche Lage und Länge der Zonen. Die Gleichheitszeichen gelten für verschwindende Elastizitätsschwankung. In diesen Relationen spielt die mittlere Elastizität keine Rolle.

8) Zum Schluss soll noch gezeigt werden, dass für unendlich kleine Elastizitätsschwankungen die mittlere Elastizität die Lage der Zonen bestimmt.

Wir setzen in (1) $q = (\lambda_0 + \delta\omega)^2$ wo $\lambda_0$ konstant, $\delta\omega$ unendlich klein ist. Der Index o bezeichne die Grössen, die man für $\delta\omega = 0$ erhält, ein vorausgesetztes $\delta$ ihren Zuwachs, wenn man $\delta\omega$ ungleich o nimmt. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{10} = \cos T\lambda_0 \tau; \quad \eta_{20} = \frac{\sin T\lambda_0 \tau}{T\lambda_0}; \quad a_0 = d_0 = \cos T\lambda_0 2\pi; \\ &b_0 = -T\lambda_0 \sin T\lambda_0 2\pi; \quad c_0 = \frac{\sin T\lambda_0 2\pi}{T\lambda_0} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Setzt man $y = y_0 + \delta y_0$ in (1) ein und vernachlässigt Glieder höherer Ordnung, so wird

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\delta y_0 + T^2\lambda_0^2 \delta y_0 = -2T^2\lambda_0^2 \cdot \delta\omega \cdot y_0$$

Dies hat nach (4) die Lösung

$$\left.\begin{aligned} \delta y_0 = &+ \eta_{10} \int_0^\tau 2T^2\lambda_0^2 \delta\omega\, y_0\, \eta_{20}\, d\tau \\ &- \eta_{20} \int_0^\tau 2\tau^2 \lambda_0^2 \delta\omega\, y_0\, \eta_1\, d\tau + h_1\, \eta_{10} + h_2\, \eta_{20} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Man erhält für $y_0 = \eta_{10}$ und $\tau = 2\pi$

$$\delta a_0 = 2T^2\lambda_0^2 \int_0^{2\pi} \delta\omega \left\{ a_0\, \eta_{10}\, \eta_{20} - c_0\, \eta_{10}^2 \right\} d\tau$$

Differenziert man (15) nach $\tau$ und setzt $y_0 = \eta_2$ und $\tau = 2\pi$ so ergibt sich ähnlich wie früher

$$\delta d_0 = 2T^2\lambda_0^2 \int_0^{2\pi} \delta\omega \left\{ b_0\, \eta_{20}^2 - d_0\, \eta_{10}\, \eta_{20} \right\} d\tau$$

woraus

$$\delta\left(\frac{a_0 + d_0}{2}\right) = \delta J_0 = 2T^2\lambda_0^2 \int_0^{2\pi} \delta\omega \left\{ (a_0 - d_0)\, \eta_{10}\, \eta_{20} + b_0\, \eta_{20}^2 - c_0\, \eta_{10}^2 \right\} d\tau$$

Aber die Benützung der Werte (14) gibt hierfür

$$\delta J_0 = -2T_0\lambda_0 \sin(T\lambda_0 2\pi) \int_0^{2\pi} \delta\omega \cdot d\tau$$

Nun ist die mittlere Elastizität nach Dreyfus

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda_0 + \delta\omega)\, d\tau = \lambda_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta\omega\, d\tau$$

Wenn wir also fordern, dass sie für alle Wert $q$ stets die selbe ($\lambda_0$) sein soll, so wird das Integral an zweiter Stelle null und damit auch die erste Variation der Kurve $J(T)$. Die Aenderungen der Stabilitätsgebiete sind also innerhalb dieser Grössenordnung null.

Für die Berechnung der höhern Variationen kommt es dann freilich auf den Verlauf von $\delta\omega$ im einzelnen an.

Zum Schlusse seien noch einige früher nicht erwähnte Beispiele zum betrachteten Schwingungsvorgang angeführt:

Die Vertikalschwingungen eines Fahrzeugs, das mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit über einen elastisch gebetteten Schienenstrang konstanter Schienenlänge wegfährt;

Die kleinen Schwingungen eines Pendels, dessen horizontale Drehaxe in einer Horizontalebene Drehschwingungen ausführt;

Die kleinen Schwingungen eines Pendels mit geneigter Axe, wenn die Neigung kleine periodische Aenderungen erleidet (die auch über die Vertikallage hinausführen dürfen).

Endlich ist zu bemerken, dass gewisse Probleme der elektrischen Uhrregulierung auf verwandte Erscheinungen führen.

*

*Anmerkung:* In meinem Aufsatz: Zur Schwingungslehre, „Schweizer Bauzeitung" Bd. 84, Nr. 24, S. 285 ist in Formel (24) ein sinnstörender Fehler stehen geblieben. Statt $\omega$ muss stehen cos.

Zollikon, den 11. März 1925. E. Meissner.

## Die Strassburger Resolution vom 29. April 1925.

Bekanntlich hatte die Rhein-Zentralkommission in ihrer diesjährigen Aprilsession sich auszusprechen vor allem über das von der Schweiz zur Genehmigung unterbreitete Ausführungsprojekt für die Regulierung der Rheinstrecke Kembs-Strassburg. Sodann lag ihr zur Genehmigung vor ein generelles, französisches Projekt für die Fortsetzung des Seitenkanals von Kembs bis Strassburg, d. h. für die sieben weitern Stufen des Rhein-Seitenkanals.

Beide Projekte waren von einer Subkommission, die anfangs März in Strassburg getagt hatte, vorberaten worden. Als Grundlage für die Genehmigung des schweizerischen Regulierungsprojektes war die Resolution vom 10. Mai 1922 [1]) massgebend, für den Seitenkanal die Artikel 358 und 359 [2]) des Versailler Vertrages. Obschon nun eine klare Trennung der beiden Projekte und deren Genehmigung je durch eine besondere Resolution vorzuziehen gewesen wäre, da die Voraussetzungen und Grundlagen beider voneinander wesentlich verschieden sind, ist es aus natürlichen Gründen und mit Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse verständlich, wenn der Wille der Mehrheit der Zentralkommission dahin ging, beide Projekte und deren Genehmigung in eine einzige Resolution zusammenzufassen. So sagt denn auch der Ingress der Resolution, dass die Zentralkommission dem Regulierungsprojekt seine Genehmigung erteile, *und* dass das Seitenkanal-Projekt die im Artikel 358 aufgestellten Bedingungen erfülle, und zwar ausgehend einerseits von der Resolution vom 10. Mai 1922 für die Regulierung, anderseits von den Artikeln 358 und 359 des Versailler Vertrages für die sieben Kanalstufen; beide Genehmigungen sind an besondere Bedingungen gebunden.

Für die REGULIERUNG gelten folgende Bedingungen:

1. Die Regulierungsarbeiten im Rhein zwischen Istein und Strassburg sollen abschnittweise von Strassburg rheinaufwärts ausgeführt werden, dürfen aber gleichzeitig auf zwei verschiedenen Strecken in Angriff genommen werden: die eine unmittelbar anschliessend an die Regulierungsstrecke Strassburg-Sondernheim und die andere von einem Punkte aus, der sich am unteren Ende der Erosionstrecke, in der Gegend von Hartheim befindet [3]); immerhin können von der oberen Strecke aus die Arbeiten sowohl stromaufwärts gegen Istein hin, als auch stromabwärts gegen Strassburg hin gleichzeitig ausgeführt werden.

[1]) Wortlaut „S. B. Z." vom 3. Juni 1922.

[2]) Wortlaut „S. B. Z." vom 28. Mai 1921.

[3]) Bad. Km 45, vgl. Abb. 5 auf Seite 180 (4. April d. J.). Red.