Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 83/84 (1924)
Heft: 23

Artikel: Zur Schwingungslehre
Autor: Meissner, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-82915

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Zur Schwingungslehre. — Die Wohnkolonien der Baugenossenschaft des eidgen. Personals in Zürich (mit Tafeln 9 und 10). — Zum sog. „Goetheanum" in Dornach. — Die Unterfangung des mittlern Pfeilers der Rhein-Brücke für die Basler Verbindungsbahn. — Miscellanea: Elektrische Probelokomotiven für die norwegische Staatsbahn. Eidgenössische Baudirektion. Eidgenössische Technische Hochschule. Verwendung von Röntgenstrahlen im Hochbau. Neue Bahnlinie in Spanien. — Konkurrenzen: Weiterführung der Theodor Kocher-Gasse und architektonische Gestaltung des Kasinoplatzes in Bern. — Literatur. — S. T. S.

Band 84. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 23.**

Zur Schwingungslehre.

Von Prof. Dr. E. Meissner, Zürich.

Die nachfolgenden Zeilen enthalten: Eine graphische Theorie der erzwungenen Schwingungen und der Resonanz, eine neue graphische Methode zur Fourier-Analyse einer beliebigen Funktion, eine graphische Theorie der Stossvorgänge bei schwingenden Systemen und endlich einen Abschnitt über schwingende Systeme mit pulsierender Elastizität. Mit Ausnahme des letzten behandeln sie einen Stoff, den ich diesen Sommer als Anwendungsbeispiel für meine graphische Integrationsmethode an der E. T. H. vorgetragen habe und der, wie ich glaube, allgemein bekannt zu werden verdient.

1. *Erzwungene Schwingungen und Resonanz.*

Es sei ein System gegeben, das unter dem Einfluss einer elastischen Kraft harmonische Schwingungen (Eigenschwingungen) ausführen kann. Ihre Periode werde mit T_e bezeichnet. Für die Ablenkung p aus der Gleichgewichtslage ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_e^2} \cdot p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit der Lösung:

$$p = P \cos\left(\frac{2\pi}{T_e} \cdot t - \varepsilon\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wirkt ausserdem auf das System eine störende Kraft $K(t)$ ein, die zeitlich periodisch verläuft mit T als Periode, so geht (1) in die Gleichung für erzwungene Schwingungen über:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_e^2} \cdot p = K(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Bewegung besteht hier aus einem periodischen Anteil, der im Takte T der störenden Kraft schwingt, der eigentlichen erzwungenen Schwingung, und einer darüber gelagerten beliebigen Eigenschwingung.

Bei der gewöhnlichen Behandlung dieses Vorgangs, wie sie z. B. in der Elektrotechnik üblich ist, wird die Störung nach *Fourier*-Art in eine Reihe harmonischer Wellen aufgelöst:

$$K(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{g=1}^{\infty} A_g \cos\left(g \cdot \frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_g\right) \quad . \quad . \quad (4)$$

Dann findet man, den einzelnen Wellen entsprechend, die Lösung:

$$p = \frac{A_0 T_e^2}{8\pi^2} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{A_g}{\frac{4\pi^2}{T_e^2}\left(1 - g^2 \frac{T_e^2}{T^2}\right)} \cos\left(g \frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_g\right) \quad (4')$$

Sie versagt nur im Fall, wo die Eigenschwingung in *Resonanz* mit einer Oberwelle tritt, was Rationalität der Perioden voraussetzt ($T : T_e$ = ganze Zahl). Alsdann enthält die Lösung ein mit wachsender Zeit unbegrenzt anwachsendes Glied.

Die hiermit geschilderte Methode hat einige Uebelstände. Einmal erscheint die Fourier-Entwicklung als ein der Sache fremdes Element, und der Grund, warum die Ganzzahligkeit des Verhältnisses $T : T_e$ zum Ausnahmefall der Resonanz führt, tritt nicht natürlich in Erscheinung. Ferner ist es, selbst wenn man sich auf die ersten Glieder der Reihe beschränken darf, fast unmöglich, ein übersichtliches Bild über den Verlauf des Vorgangs zu erhalten. Besonders unübersichtlich wird alles, wenn ausserdem beliebige Anfangsbedingungen vorgeschrieben sind, sodass noch eine in anderem Takt schwingende Eigenschwingung die erzwungene Schwingung überlagert.

Man kann alle diese Uebelstände vermeiden, wenn man sich einer früher hier entwickelten Methode bedient, um Funktionen darzustellen und Differentialgleichungen zu integrieren, die auf Verwendung von Liniendiagrammen als Funktionsbildern beruht.[1]) Um sie anzuwenden, führen wir zunächst einen neuen Zeitmasstab so ein, dass die Periode der Eigenschwingung den Wert 2π erhält, d. h.

$$u = \frac{2\pi}{T_e} \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es geht $K(t)$ in eine Funktion $K(u)$ über, die die Periode

$$U = 2\pi \cdot \frac{T}{T_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

besitzt und (3) verwandelt sich zu

$$\frac{d^2p}{du^2} + p = \frac{T_e^2}{4\pi^2} K(u) = R(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mit $$R(u + U) = R(u)$$

Ist nun $p(u)$ eine beliebige Funktion, so verstehen wir unter ihrem Liniendiagramm C_u die Kurve, die in der x-y-Ebene von den Geraden

$$g_u = x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u) - p(u) = 0$$

eingehüllt wird. Das Lot OQ_u vom Anfangspunkt auf g_u hat die Länge $p(u)$ und bildet mit der x-Axe den Winkel u (Abbildung 1). Es lässt sich zeigen[1]), dass $Q_u P_u = \frac{dp}{du}$ ist, also die erste Ableitung von p darstellt, und dass die Kurve C_u im Pukte P_u den durch

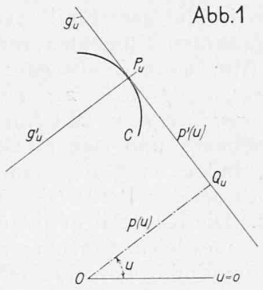


Abb. 1

$$\varrho(u) = p(u) + \frac{d^2p}{du^2} \quad . \quad (8)$$

gegebenen Krümmungsradius besitzt.[2])

Die Gleichung (1) für die Eigenschwingung sagt in dieser Darstellung demnach nichts anderes aus, als dass das Linien-Diagramm des Integrals (2) überall den Krümmungsradius Null hat.

Das Liniendiagramm der Eigenschwingung ist ein Punkt P. Sind a und b seine Koordinaten, so hat man in Uebereinstimmung mit (2)

$$p(u) = a \cdot \cos(u) + b \cdot \sin(u) \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Es bedeutet OP die Amplitude, der Winkel von OP mit der x-Axe die Phase ε der harmonischen Schwingung.

Für das Liniendiagramm der erzwungenen Schwingung erhalten wir nach (7)

$$\varrho(u) = R(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

d. h. *es ist für jede Richtung u der Normalen der Krümmungsradius vorgeschrieben.* Die Gleichung (7) integrieren heisst einfach, eine Kurve gemäss dieser Forderung zeichnen.

Zur praktischen Durchführung dieser Aufgabe wird die Funktion $R(u)$ durch eine stückweise konstante Funktion gemäss Abbildung 2 ersetzt Nimmt man die Intervalle dieser „Treppenkurve" klein genug, so kann das mit beliebiger Annäherung geschehen. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_u$ die Intervalle, sodass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_u = U$$

und $R_1, R_2 \ldots R_u$ die zugehörigen Funktionswerte, so ist jetzt eine Folge von Kreisbogen $P_0 P_1 \ldots P_n$ so zu zeichnen, dass $P_{i-1} P_i$ den Radius R_i und den Zentriwinkel α_i hat, und dass alle diese Bogen stetig und mit

[1]) «S. B. Z.», Bd. 62, S. 199 u. 221 (Oktober 1913).

[2]) Man kann von dieser Darstellung sofort zur Darstellung von $p(u)$ in Polarkoordinaten übergehen, indem man statt C_u die von den Punkten Q_u gebildete «Fusspunktkurve» konstruiert.

stetiger Tangente aneinander anschliessen. Wenn die Anfangsbedingungen

$$p(0) = a \qquad p'(0) = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8')$$

vorgeschrieben sind, so sind a, b die Koordinaten des ersten Punktes P_0 und die Tangente ist dort normal zur Axe $u = 0$. Die Tangente im Endpunkte P_n bildet mit ihr den Winkel U der Periode von R. Den weitern Verlauf der Integralfunktion $p(u)$ erhält man, indem man dem letzten Bogen $P_{n-1} P_n$ wieder den ersten $P_0 P_1$ anreiht und wie anfänglich weiterfährt. Die Kurve, die so erhalten wird, stellt sich also dar als eine Folge von unter sich kongruenten Bogenstücken $P_0 P_n$. Sie kann sich in Ausnahmefällen schliessen, wird sich jedoch im allgemeinen unbegrenzt oft um einen mittlern Punkt herumwinden. Die Bedeutung dieses Punktes wird klar, wenn jetzt die Frage nach der eigentlichen erzwungenen Schwingung, also nach dem periodischen Integral aufgeworfen wird. Da einer Abänderung der Anfangsbedingungen (dem Hinzufügen einer beliebigen Eigenschwingung zum Integral) einfach eine Verlegung des Anfangspunktes des Koordinatensystems entspricht, so ist dieser nun so zu wählen, dass die Bedingungen für Periodizität der Lösung:

$$p(U) = p(0) \qquad p'(U) = p'(0) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

erfüllt werden. Dieser Punkt O^* ergibt sich eindeutig, solange U kein ganzzahliges Vielfaches von π ist, als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der zwei Tangenten in P_0 und P_n mit der Winkelhalbierenden der beiden Normalen in denselben Punkten, wobei wegen des zu beachtenden Vorzeichens von p bezw. p' immer nur eine von den zwei vorhandenen Winkelhalbierenden in Frage kommt. Ist U ein ungerades Vielfaches von π, so ist der gesuchte Punkt O^* der Mittelpunkt des von den erwähnten Tangenten und Normalen gebildeten Rechtecks. *Nur wenn U ein ganzzahliges Vielfaches der Eigenschwingungsperiode 2π ist, versagt die Konstruktion; O^* liegt unendlich fern.* Mit Ausnahme dieses Falles liegt O^* im Endlichen und man erhält jetzt das Schaubild des Integrals, indem man den konstruierten Kurvenbogen $P_0 P_n$ einfach um den Punkt O^* um die Winkel U, $2U$, $3U$ usw. dreht. Die Kurve liegt dann in ihrem ganzen Verlaufe im Innern eines leicht angebbaren Kreises um O^*, bleibt also immer im Endlichen. Freilich wird dieser Kreis sehr gross, wenn nahezu der Ausnahmefall $U : 2\pi =$ ganze Zahl vorliegt, da dann O^* sehr weit wegfällt. Das periodische Integral zeigt dann, sehr starke Schwankungen, und das Gleiche gilt für alle andern Integrale, die andern Anfangspunkten O entsprechen. Es muss als ein Hauptvorteil dieser Darstellung bezeichnet werden, dass der Einfluss der Anfangsbedingungen auf den Verlauf des Integrals ohne weiteres anschaulich ersichtlich ist.

Klar und einfach tritt nun auch der Ausnahmefall der *Resonanz* in Erscheinung. Es ist $U = 2\pi \cdot g$, wo g irgend eine Zahl bedeutet. O^* fällt ins Unendliche und die Kurvenbogen $P_0 P_n$, die aneinandergereiht sind, entstehen durch *Parallelverschiebung* aus dem ersten von ihnen (Abbildung 3). Sie entfernen sich schliesslich mehr und mehr ins Unendliche, und dementsprechend verläuft auch der Schwingungsvorgang mit Ausschlägen, die unbegrenzt nach einem leicht zu überblickenden Gesetze anwachsen. Man erhält so die bekannten Bedingungen für Resonanz, ohne die Störung in Grund- und Oberwellen aufzulösen. Man sieht auch ein, dass das Anwachsen der Schwingungen bedingt wird von der Entfernung der Endpunkte $P_0^{(1)}$ und $P_n^{(g)}$ des ersten g-Kurvenbogens. Fallen sie ausnahmsweise zusammen, so schliesst sich die Kurve nach g-Schlaufen, bleibt also, trotzdem die Resonanzbedingung für die g-te Oberwelle erfüllt ist, ganz im Endlichen. Dies entspricht offenbar dem Fall, wo bei Fourier-Analyse der störenden Kraft die Amplitude der g-ten Welle gleich Null wird.

Wir erkennen unschwer aus dieser Betrachtung den engen Zusammenhang unserer Konstruktion mit der analytischen Methode und folgern daraus, dass es möglich sein muss, aus der Konstruktion auch die Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion $R(u)$ graphisch zu ermitteln. Dies soll im folgenden Abschnitt geschehen.

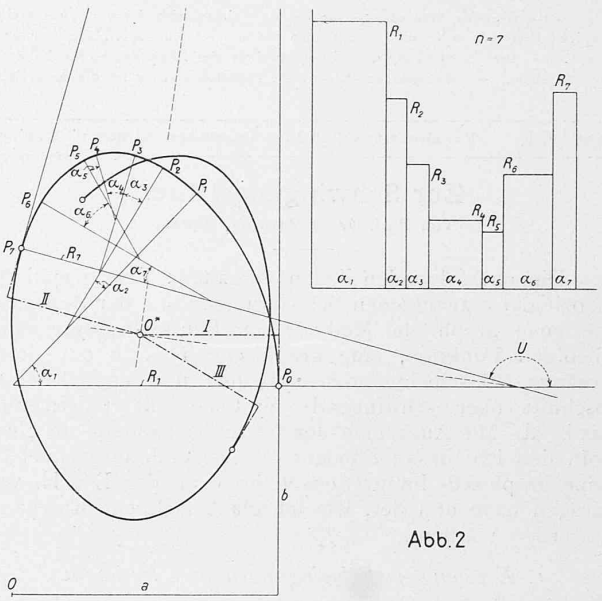


Abb. 2

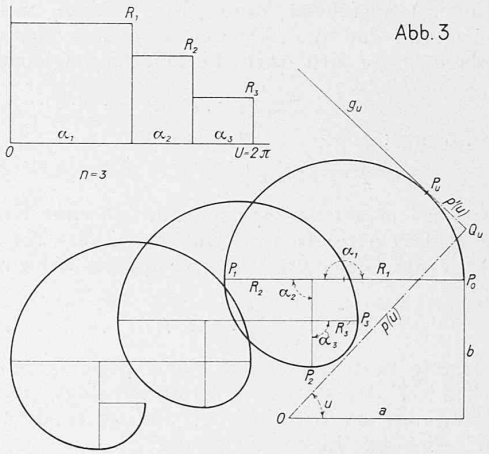


Abb. 3

2. *Graphische Bestimmung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion.*

Es sei $F(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode T_e. Durch die Masstab-Aenderung nach Gleichung (5) geht sie in eine Funktion $R(u)$ über, die die Periode $U = 2\pi$ besitzt. Diese Funktion sei nun in eine Fourier-Reihe zu entwickeln:

$$R(u) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos u + b_1 \sin u + a_2 \cos 2u + b_2 \sin 2u \; . \; . \; (10)$$

wobei es sich um die Bestimmung der hier auftretenden Zahlen a_k, b_k aus dem graphisch gegebenen Verlauf der Funktion $R(u)$ handelt.

Wir zeichnen genau wie im vorigen Abschnitt eine Kurve C_1, die der Forderung (7) näherungsweise genügt als Folge von Kreisbogen. Neu ist dabei nur der Umstand, dass hier $U = 2\pi$ ist, sodass die Endtangenten des Bogens $P_0 P_n$ parallel werden. Sind x, y die Koordinaten eines laufenden Punktes P der Kurve C_1, und ist s die Bogenlänge $P_0 P$, so ist

$$ds = R \cdot du; \quad dx = -R \cdot \sin(u) \cdot du; \quad dy = R \cdot \cos(u) \cdot du \quad (11)$$

Sei L die Bogenlänge von $P_0 P_n$, seien $\Delta x^{(1)}$, $\Delta y^{(1)}$ die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{P_0 P_n}$. Dann gibt die Integration von (11) über u von 0 bis 2π

$$\left.\begin{aligned} L = \int_0^{2\pi} R(u) \cdot du \qquad \Delta x^{(1)} = -\int_0^{2\pi} R(u) \sin u \cdot du \\ \Delta y^{(1)} = \int_0^{2\pi} R(u) \cos u \, du \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

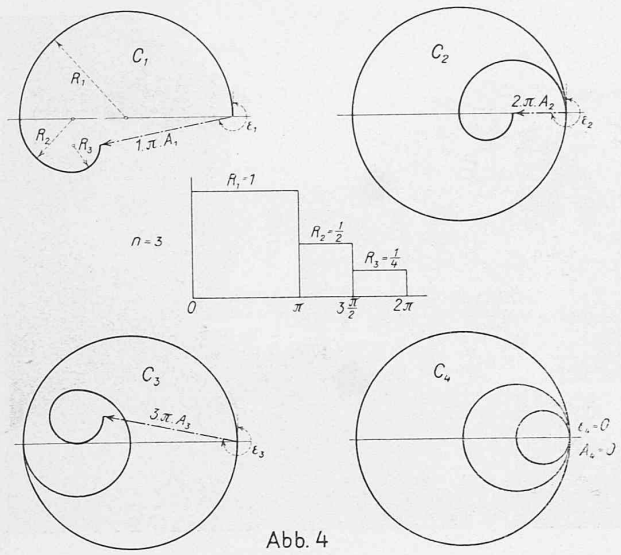


Abb. 4

und da nach Fourier allgemein

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R(u)\cos(ku)\cdot du \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R(u)\sin(ku)\cdot du \quad (12)$$

so hat man

$$a_0 = \frac{L}{\pi} \qquad a_1 = \frac{\Delta y^{(1)}}{\pi} \qquad b_1 = \frac{-\Delta x^{(1)}}{\pi} \quad (13)$$

womit a_0, a_1, b_1 graphisch bestimmt sind.

Ersetzt man in (12) die Integrationsvariable u durch $u:k$, so folgt

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi k} R\left(\frac{u}{k}\right)\cos u\cdot du \qquad b_k = \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi k} R\left(\frac{u}{k}\right)\sin(u)\cdot du \quad (12')$$

Man zeichnet jetzt die der Forderung

$$\varrho(u) = R\left(\frac{u}{k}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

genügende Kurve C_k, *die aus* C_1 *dadurch entsteht, dass man alle Zentriwinkel der Kreisbogen k mal grösser nimmt,* und bei der also die Tangente k volle Umläufe macht. Diese Kurve heisse die *k-te Auswicklung,* die zur Funktion $R(u)$ gehört. Als ihre *Schlusslinie* werde der Vektor bezeichnet, der von ihrem Anfangspunkt nach ihrem Endpunkte geht. Wegen (11) und (11') erhält man für seine Komponenten:

$$\overset{(k)}{\Delta x} = -\int_0^{2\pi k} R\left(\frac{u}{k}\right)\cos(u)\cdot du \qquad \overset{(k)}{\Delta y} = +\int_0^{2\pi k} R\left(\frac{u}{k}\right)\sin(u)\cdot du$$

und der Vergleich mit (12') gibt

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\cdot\overset{(k)}{\Delta y} \qquad b_k = -\frac{1}{k\pi}\cdot\overset{(k)}{\Delta x} \quad . \quad . \quad (15)$$

Mithin gilt der *Satz:*

Die k-ten Fourier-Koeffizienten a_k, b_k *der Funktion* $R(u)$ *sind das* $\pm\frac{1}{\pi k}$*-fache der Komponenten der Schlusslinie in der k-ten Auswicklung der Funktion* $R(u)$.

Durch diesen Satz wird die Fourier-Analyse einer Funktion auf die Konstruktion ihrer Auswicklungen zurückgeführt.

Setzt man die Fourier-Entwicklung (10) in der Form an

$$R(u) = \frac{a_0}{2} + \sum A_k\cdot\cos(ku + \varepsilon_k)$$

indem man Amplitude und Phase der einzelnen Wellen einführt, so ist die *Amplitude* A_k *das* $\frac{1}{k\pi}$*-fache der Länge der Schlusslinie in der k-ten Auswicklung und die Phase* ε_k *ist der Winkel der Schlusslinie mit der y-Axe.*

In Abbildung 4 ist die Analyse graphisch durchgeführt für die an der Spitze stehende Treppenkurve von drei Stufen. Die Auswicklungen bestehen dementsprechend aus drei Kreisbogen. Die ersten vier Auswicklungen sind gezeichnet. Die folgenden führen hier periodisch wieder zu denselben Schlusslinien. Man entnimmt aus ihnen

$$a_1 = -\frac{1}{1\cdot\pi}\cdot\frac{1}{4} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{1}{3\cdot\pi}\cdot\frac{1}{4} \qquad a_4 = 0$$

$$b_1 = +\frac{1}{1\cdot\pi}\cdot\frac{5}{4} \qquad b_2 = +\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{1}{2} \qquad b_3 = +\frac{1}{3\cdot\pi}\cdot\frac{5}{4} \qquad b_4 = 0$$

und allgemein

$$a_{4n+1} = -\frac{1}{(4n+1)\pi}\cdot\frac{1}{4} \qquad a_{4n+2} = 0$$

$$a_{4n+3} = \frac{1}{(4n+3)\pi}\cdot\frac{1}{4} \qquad a_{4n} = 0 \qquad b_{4n+1} = \frac{1}{(4n+1)\pi}\cdot\frac{5}{4}$$

$$b_{4n+2} = \frac{1}{(4n+2)\pi}\cdot\frac{1}{2} \qquad b_{4n+3} = \frac{1}{(4n+3)\pi}\cdot\frac{5}{4} \qquad b_{4n} = 0$$

Die Genauigkeit und Raschheit des geschilderten Verfahrens hängt ab von der Stufenzahl in der Treppenkurve, durch die die zu analysierende stetige Kurve angenähert wird. Man kann diese Stufen recht kurz nehmen, bevor sich der störende Einfluss zeichnerischer Ungenauigkeiten bemerkbar macht. Da es sich meist nur um die Ermittlung der ersten drei oder vier Fourier-Koeffizienten handelt, dürfte das Verfahren durchaus brauchbar sein, wenn Abweichungen von der Grössenordnung eines Prozentes zulässig sind.

3. *Stossvorgänge bei einem schwingenden System.*

Das schwingende System (1) erfahre eine Reihe unregelmässiger Stösse, die seine Geschwindigkeit jeweilen augenblicklich ändern. In der durch (5) gegebenen Zeitmessung seien u_1, u_2, u_3 . . . die Zeitpunkte, in denen die Stösse erfolgen, Δ_1, Δ_2, Δ_3 . . . die sprungweisen Aenderungen, die die Geschwindigkeit $\frac{dp}{du}$ durch sie erfährt. Welche Bewegung führt das System aus?

Die Zeichnung des Liniendiagramms gibt übersichtlichen Aufschluss darüber. Bis zum ersten Stoss besteht die durch die Anfangsbedingungen bestimmte Eigenschwingung, deren Diagramm etwa der Punkt C_1 sein möge. Durch den ersten Stoss wird $p(u)$ nicht geändert, behält also seinen Wert $p(u_1)$ bei. Dagegen springt die Ableitung $(p'u)$ plötzlich um den Betrag Δ_1. Nach dem Stoss vollzieht sich somit eine Eigenschwingung, deren Diagrammpunkt C_2 auf der Stützlinie $g(u_1)$ um den Betrag Δ_1 verschoben ist, und zwar im Sinn des wachsenden Winkels u, wenn Δ_1 positiv ist, im umgekehrten Sinn, wenn Δ_1 negativ ausfällt. Die Verschiebungsstrecke C_1C_2, die mit der Axe $u = 0$ den Winkel $\frac{\pi}{2} + u_1$ einschliesst, bezeichnet also die Wirkung des Stosses vollständig. C_2 bleibt Diagrammpunkt bis zum nächsten Stoss zur Zeit $u = u_2$. Alsdann springt das Liniendiagramm zum Punkte C_3, wobei $C_2C_3 = \Delta_2$ ist, und der Vektor C_2C_3 mit dem Vektor C_1C_2 den Winkel $u_2 - u_1$ bildet.

Das Liniendiagramm des ganzen Bewegungsvorgangs ist also eine Folge von Punkten $C_1C_2C_3C_4$ . . . Sie bilden ein *Polygon,* dessen Seiten die Längen Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 . . . haben. Die Normalen auf den Seiten bilden mit der Axe $u = 0$ die Winkel u_1, u_2, u_3, u_4 . . . Das Polygon ist somit auf die einfachste Weise aus den gegebenen Stosskräften konstruierbar.

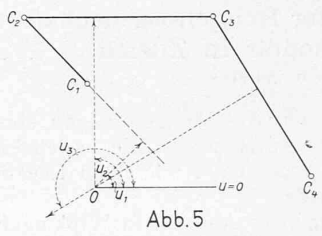


Abb. 5

In Abbildung 5 erfolgt ein erster Stoss zur Zeit $u = \pi/4$, ein zweiter, doppelt so kräftiger, zur Zeit $u = \pi/2$ in entgegengesetztem Sinn, ein dritter von der Intensität dieses letztern, aber wieder im ursprünglichen Sinn zur Zeit $u = \frac{4\pi}{3}$. Das Resultat dieser Stösse ist das Umwerfen der Eigenschwingung C_1 in C_4. Soll ein Stoss die Amplitude nicht beeinflussen, so muss $CC_1 = CC_2$ sein, also auch $QC_1 = QC_2$. Dies bedeutet entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse. Die *Phase* ändert sich nur dann nicht, wenn

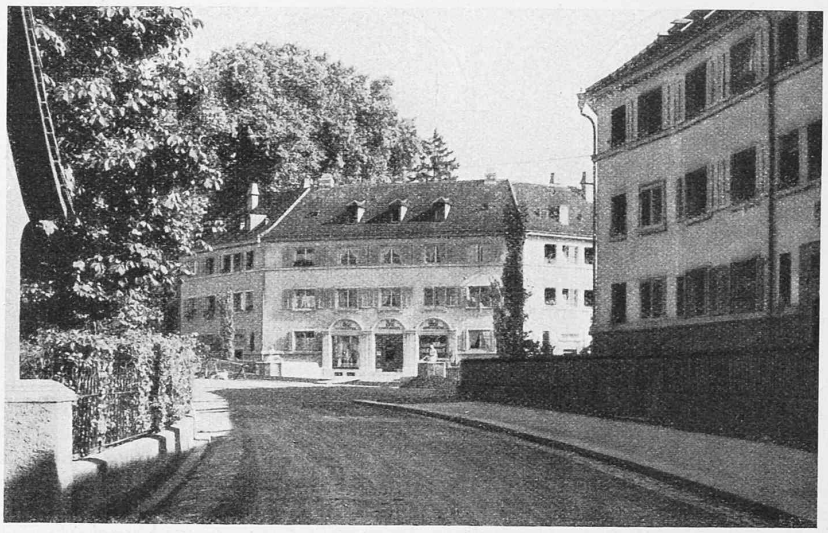
C_1 und C_2 auf einem Strahl durch O liegen, d. h. wenn der Stoss in der Gleichgewichtslage stattfindet.

Wenn eine Gruppe von n Stössen sich nach der Zeit $U = u_n$ periodisch wiederholt, so ist die Wirkung der ersten Stossgruppe eine Verschiebung des Diagrammpunktes von C_1 nach $C_{n+1} = C_I$. Die zweite Gruppe verlegt C_I nach C_{II}, die dritte C_{II} nach C_{III} u. s. f. Hierbei sind die Strecken $C_1 C_I$, $C_I C_{II}$, $C_{II} C_{III}$ . . . alle gleich lang und die äussern Winkel zweier aufeinander folgenden Seiten sind gleich U. Wenn U kein ganzzahliges Vielfaches der Periode $U_e = 2\pi$ der Eigenschwingung ist, so ist das Vieleck $C_1 C_I C_{II} C_{III}$ einem endlichen Kreis einbeschrieben und der Bewegungsvorgang bleibt in endlichen Grenzen. Genau periodisch wird er, wenn das Verhältnis $U : U_e$ das zweier ganzer Zahlen q_1 und q_2 ist. Wegen $q_2 U = q_1 2\pi$ wird sich nach der Einwirkung von q_2 Stossgruppen alles periodisch wiederholen. Das Polygon der C-Punkte schliesst sich auf q_1 Umläufen.

Ist aber $U = g \cdot 2\pi$, wo g eine ganze Zahl bedeutet, so liegen die Punkte C statt auf einem Kreis aequidistant auf einer Geraden, und die Bewegung des Systems wächst mit der Zeit ins Unendliche. Man kann dies als *Stossresonanz* bezeichnen. *Die Periode der Stossgruppe ist dann ein ganzzahliges Vielfaches der Eigenperiode des schwingenden Systems.*

Wenn bei einer beliebigen Stossfolge die Zahl der Stösse in geeigneter Weise ins Unendliche gesteigert wird, ihre Intensitäten aber nach Null vermindert werden, so geht das darstellende Polygon der Punkte C in eine gewöhnliche Kurve über, deren Kontingenzwinkel nun die unendlich kleinen Zeitintervalle zwischen den Stössen, deren Linienelemente die unendlich kleinen Geschwindigkeitssprünge messen. Die Kurve kann aber auch als Diagramm einer erzwungenen Schwingung gedeutet werden, die von einer äussern störenden Kraft herrühren.

Man kann sonach mit beliebiger Annäherung die Wirkung äusserer Kräfte ersetzen durch eine Folge sehr rascher und sehr feiner Stösse. Für eine Naturbeschreibung, die auf die diskontinuierlichen Vorgänge aufbaut (wie vielfach die moderne Physik), ist das von Bedeutung. (Schluss folgt.)



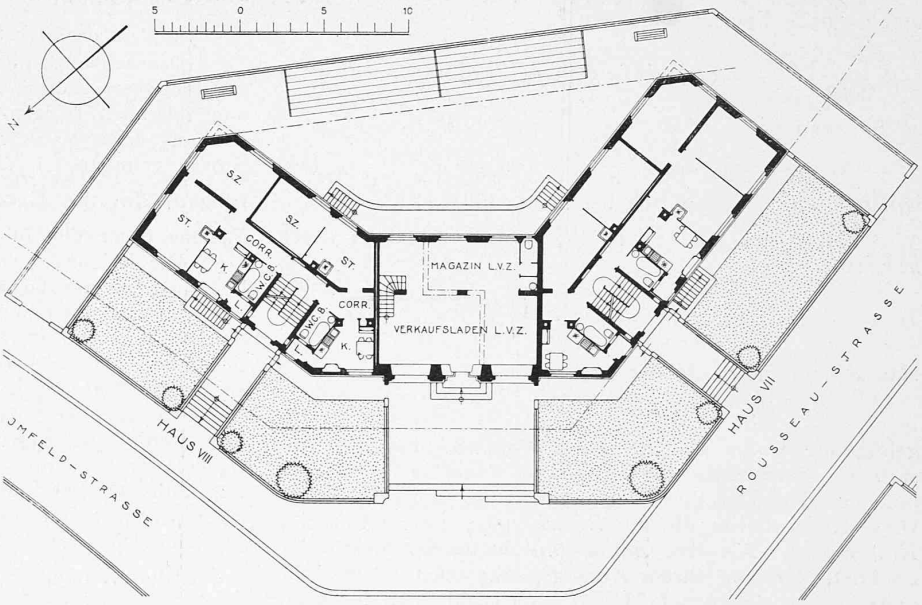


Abb. 9 und 10. Frontansicht und Grundriss 1 : 400 des Doppelhauses VII/VIII an der Strassenkreuzung.

Die Wohnkolonien der Baugenossenschaft des eidgen. Personals in Zürich.

(Mit Tafeln 9 und 10.)

Die heute wiedergegebenen Abbildungen zeigen eine Kolonie, die 1921 bis 1923 im Anschluss an die im letzten Heft veröffentlichte ebenfalls von den Architekten Leuenberger & Giumini erbaut wurde.

Der Bauplatz (vergl. Lageplan Abb. 8), in Wipkingen an einem Plateaurand oberhalb des städtischen Wasserwerks gelegen, wird beherrscht vom Schulhaus Letten, das vor acht Jahren die Gebrüder Bräm erbaut haben[1]) und das mit seiner rotgetönten ruhigen Masse das Farbenthema für die Umgebung stellt.

[1]) Dargestellt in Band 68, Seite 273 (9. Dezember 1916). Red.

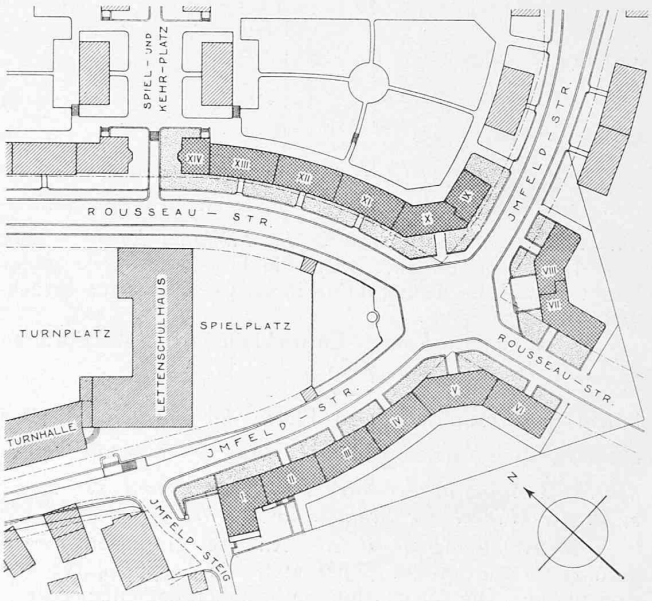


Abb. 8. Lageplan der Wohnkolonie im Letten. — Masstab 1 : 2000.