Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 83/84 (1924)

Heft: 23

Inhaltsverzeichnis

Band 84. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 23.**

Zur Schwingungslehre.

Von Prof. Dr. E. Meissner, Zürich.

Die nachfolgenden Zeilen enthalten: Eine graphische Theorie der erzwungenen Schwingungen und der Resonanz, eine neue graphische Methode zur Fourier-Analyse einer beliebigen Funktion, eine graphische Theorie der Stossvorgänge bei schwingenden Systemen und endlich einen Abschnitt über schwingende Systeme mit pulsierender Elastizität. Mit Ausnahme des letzten behandeln sie einen Stoff, den ich diesen Sommer als Anwendungsbeispiel für meine graphische Integrationsmethode an der E. T. H. vorgetragen habe und der, wie ich glaube, allgemein bekannt zu werden verdient.

1. Erzwungene Schwingungen und Resonanz.

Es sei ein System gegeben, das unter dem Einfluss einer elastischen Kraft harmonische Schwingungen (Eigenschwingungen) ausführen kann. Ihre Periode werde mit T_e bezeichnet. Für die Ablenkung p aus der Gleichgewichtslage ergibt sich dann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_e^2} \cdot p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

mit der Lösung:

$$p = P \cos\left(\frac{2\pi}{T_e} \cdot t - \varepsilon\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wirkt ausserdem auf das System eine störende Kraft $K(t)$ ein, die zeitlich periodisch verläuft mit T als Periode, so geht (1) in die Gleichung für erzwungene Schwingungen über:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_e^2} \cdot p = K(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Bewegung besteht hier aus einem periodischen Anteil, der im Takte T der störenden Kraft schwingt, der eigentlichen erzwungenen Schwingung, und einer darüber gelagerten beliebigen Eigenschwingung.

Bei der gewöhnlichen Behandlung dieses Vorgangs, wie sie z. B. in der Elektrotechnik üblich ist, wird die Störung nach *Fourier*-Art in eine Reihe harmonischer Wellen aufgelöst:

$$K(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{g=1}^{\infty} A_g \cos\left(g \cdot \frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_g\right) \quad . \quad . \quad (4)$$

Dann findet man, den einzelnen Wellen entsprechend, die Lösung:

$$p = \frac{A_0 T_e^2}{8\pi^2} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{A_g}{\frac{4\pi^2}{T_e^2}\left(1 - g^2 \frac{T_e^2}{T^2}\right)} \cos\left(g \frac{2\pi}{T} t - \varepsilon_g\right) \quad (4')$$

Sie versagt nur im Fall, wo die Eigenschwingung in *Resonanz* mit einer Oberwelle tritt, was Rationalität der Perioden voraussetzt ($T : T_e$ = ganze Zahl). Alsdann enthält die Lösung ein mit wachsender Zeit unbegrenzt anwachsendes Glied.

Die hiermit geschilderte Methode hat einige Uebelstände. Einmal erscheint die Fourier-Entwicklung als ein der Sache fremdes Element, und der Grund, warum die Ganzzahligkeit des Verhältnisses $T : T_e$ zum Ausnahmefall der Resonanz führt, tritt nicht natürlich in Erscheinung. Ferner ist es, selbst wenn man sich auf die ersten Glieder der Reihe beschränken darf, fast unmöglich, ein übersichtliches Bild über den Verlauf des Vorgangs zu erhalten. Besonders unübersichtlich wird alles, wenn ausserdem beliebige Anfangsbedingungen vorgeschrieben sind, sodass noch eine in anderem Takt schwingende Eigenschwingung die erzwungene Schwingung überlagert.

Man kann alle diese Uebelstände vermeiden, wenn man sich einer früher hier entwickelten Methode bedient, um Funktionen darzustellen und Differentialgleichungen zu integrieren, die auf Verwendung von Liniendiagrammen als Funktionsbildern beruht.[1]) Um sie anzuwenden, führen wir zunächst einen neuen Zeitmasstab so ein, dass die Periode der Eigenschwingung den Wert 2π erhält, d. h.

$$u = \frac{2\pi}{T_e} \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Es geht $K(t)$ in eine Funktion $K(u)$ über, die die Periode

$$U = 2\pi \cdot \frac{T}{T_e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

besitzt und (3) verwandelt sich zu

$$\frac{d^2 p}{du^2} + p = \frac{T_e^2}{4\pi^2} K(u) = R(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

mit $\qquad R(u + U) = R(u)$

Ist nun $p(u)$ eine beliebige Funktion, so verstehen wir unter ihrem Liniendiagramm C_u die Kurve, die in der x-y-Ebene von den Geraden

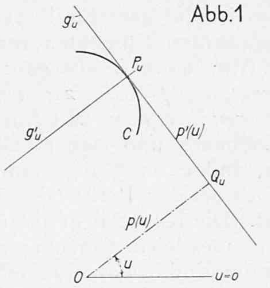
$$g_u = x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u) - p(u) = 0$$

eingehüllt wird. Das Lot OQ_u vom Anfangspunkt auf g_u hat die Länge $p(u)$ und bildet mit der x-Axe den Winkel u (Abbildung 1). Es lässt sich zeigen[1]), dass $Q_u P_u = \frac{dp}{du}$ ist, also die erste Ableitung von p darstellt, und dass die Kurve C_u im Pukte P_u den durch

$$\varrho(u) = p(u) + \frac{d^2 p}{du^2} \quad . \quad (8)$$

gegebenen Krümmungsradius besitzt.[2])

Abb. 1



Die Gleichung (1) für die Eigenschwingung sagt in dieser Darstellung demnach nichts anderes aus, als dass das Linien-Diagramm des Integrals (2) überall den Krümmungsradius Null hat.

Das Liniendiagramm der Eigenschwingung ist ein Punkt P. Sind a und b seine Koordinaten, so hat man in Uebereinstimmung mit (2)

$$p(u) = a \cdot \cos(u) + b \cdot \sin(u) \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Es bedeutet OP die Amplitude, der Winkel von OP mit der x-Axe die Phase ε der harmonischen Schwingung.

Für das Liniendiagramm der erzwungenen Schwingung erhalten wir nach (7)

$$\varrho(u) = R(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

d. h. *es ist für jede Richtung u der Normalen der Krümmungsradius vorgeschrieben.* Die Gleichung (7) integrieren heisst einfach, eine Kurve gemäss dieser Forderung zeichnen.

Zur praktischen Durchführung dieser Aufgabe wird die Funktion $R(u)$ durch eine stückweise konstante Funktion gemäss Abbildung 2 ersetzt. Nimmt man die Intervalle dieser „Treppenkurve“ klein genug, so kann das mit beliebiger Annäherung geschehen. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_u$ die Intervalle, sodass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_u = U$$

und $R_1, R_2 \ldots R_u$ die zugehörigen Funktionswerte, so ist jetzt eine Folge von Kreisbogen $P_0 P_1 \ldots P_n$ so zu zeichnen, dass $P_{i-1} P_i$ den Radius R_i und den Zentriwinkel α_i hat, und dass alle diese Bogen stetig und mit

[1]) «S. B. Z.», Bd. 62, S. 199 u. 221 (Oktober 1913).

[2]) Man kann von dieser Darstellung sofort zur Darstellung von $p(u)$ in Polarkoordinaten übergehen, indem man statt C_u die von den Punkten Q_u gebildete «Fusspunktkurve» konstruiert.