

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 79/80 (1922)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Verdrehungsschwingungen von Wellen  
**Autor:** Föppl, O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-38041>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Von reicherem Innenausbau finden wir in Zug eine Reihe von Häusern aus der Stilperiode der Renaissance. Sie liegen ausserhalb der gotischen Stadt, zum Teil als Stadthäuser, zum Teil als Landhäuser in weiten Gärten. Zu den städtischen Bauten gehört der Komplex der „Münz“ an der Zeughausgasse, dessen Grundriss nebenstehend abgebildet ist. Das Haus zur „oberen Münz“ wurde 1580, die „untere Münz“ 1604 vom gleichen Bauherrn erbaut, und beide bald darauf durch eine (nicht mehr bestehende) gedeckte Galerie miteinander verbunden. Es beherbergte anfänglich die zugerische Münzstätte; später war die städtische Kanzlei darin untergebracht, zuletzt die Regierungskanzlei. Das im Laufe der Jahre zum heutigen Umfang ausgebaute Münzhaus zeigt in einer Reihe im Bande abgebildeter reicher Zimmer den typischen Renaissance-Stil mit kostbarer Holzarchitektur in Eiche und Nussbaum. Beachtenswert an diesem Bau ist, in welchem Mass die Baukünstler jener Zeit schiefwinklige Räume und Blöcke in Kauf nahmen, um sich in den gegebenen Plan der Strassenfluchten restlos einzupassen; beachtenswert auch, wie gut sie es verstanden, solche erhebliche Schiefwinkligkeit nach aussen wie nach innen unauffällig zu machen. Es geht gerade wieder aus diesem Beispiel deutlich hervor, dass das Auge, das die Strassenwände meist in starker perspektivischer Verkürzung sieht, für Abweichungen der Häuserfronten aus der Richtung der Strassenflucht viel empfindlicher ist, als für stumpfe oder spitze Baublockkanten.

Im allgemeinen — lesen wir im Text — darf man den Typus des gewöhnlichen, gut situirten (Zuger) Bürgerhauses als einfach und vornehm gehalten bezeichnen. Es kommt dem Erbauer mehr darauf an, seine *Wohnräume* behaglich und künstlerisch wertvoll zu gestalten, als durch eine reiche Aussenarchitektur die Blicke der Mitbürger auf sich zu ziehen.“

**Verdrehungsschwingungen von Wellen.<sup>1)</sup>**

Von Professor O. Föppl, Braunschweig.

Die einfachste Anordnung, mit der eine harmonische Schwingung erhalten wird, ist die Verbindung einer Feder mit einer Masse (Abbildung 1). Wenn die Feder, die an einem Ende festgehalten ist und am anderen Ende die Masse *m* trägt, bei der Zusammendrückung um 1 cm die Kraft von *c* kg auslöst, so lautet die dynamische Grundgleichung für die Bewegung der Masse *m*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - cx \tag{1}$$

mit der Lösung:

$$x = x_0 \cos \left( \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t \right) \tag{2}$$

Ein gleich gebautes Glied mit  $\sin \left( \sqrt{\frac{c}{m}} t \right)$  ist weggelassen worden unter der Voraussetzung, dass der Zeitmasstab so



Abb. 1

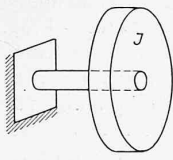


Abb. 2

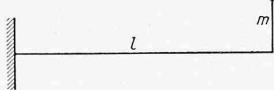


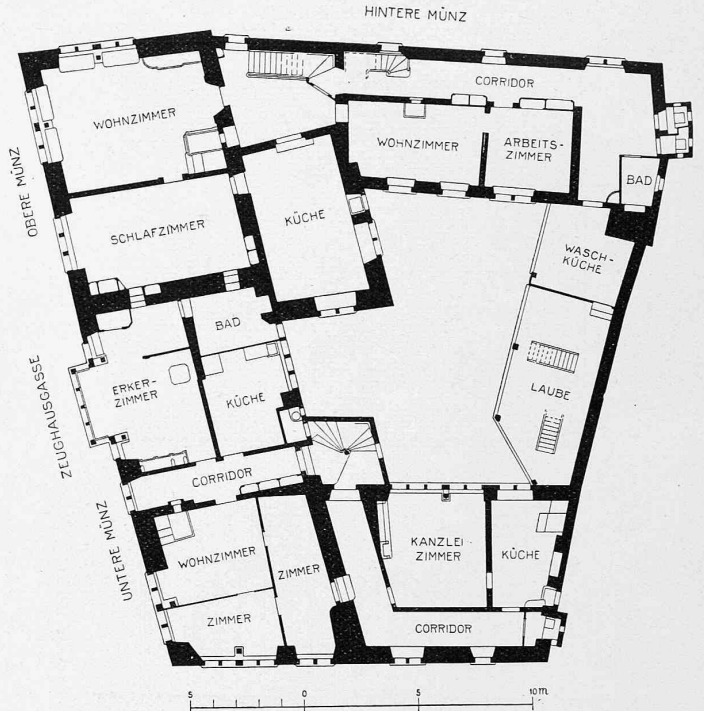
Abb. 3

gewählt sein soll, dass für  $t = 0$  der grösste Ausschlag vorhanden ist. Dämpfung wird ebenso wie im nachfolgenden nicht berücksichtigt.

<sup>1)</sup> Literatur: *Frahm* «Neuere Untersuchungen...» Z. d. V. d. I. 1912. *Gümbel* «Verdrehungsschwingungen eines Stabes...» Z. d. V. d. I. 1912. *A. Föppl* «Vorlesungen aus der techn. Mechanik» Band 4. *Geiger* «Ueber Verdrehungsschwingungen von Wellen», Dissertation, Berlin 1914.

**Aus: Bürgerhaus in der Schweiz. — Bd. X: Kanton Zug.**

Verlag: Art. Institut Orell Füssli, Zürich.



Grundriss vom 1. Stock des Hauses „Zur Münz“. — Masstab 1:300.

Die Schwingungsdauer *T*, d. h. die Zeit, nach deren Ablauf der Ausschlag *x* wieder den vorher gebabten Wert annimmt, ist nach Gleichung 2:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m}{c}} \tag{3}$$

In gleicher Weise lässt sich die Schwingung einer Schwingmasse behandeln, die auf einer Welle sitzt und das Trägheitsmoment *J* hat (Abbildung 2). Der Freiheitsgrad für die Bewegung der Schwingmasse ist jetzt der Verdrehungswinkel  $\varphi$  und statt der rücktreibenden Kraft tritt hier das rücktreibende Moment  $c \frac{\text{cm kg}}{\text{Verdrehungswinkel}}$  in die Erscheinung. Den Gleichungen 1, 2 und 3 entsprechen die Gleichungen:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - c \varphi \tag{4}$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos \left( \sqrt{\frac{c}{J}} t \right) \tag{5}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J}{c}} \tag{6}$$

Man erhält für die Verdrehungsschwingungen Gleichungen, die ebenso gebaut sind, wie die Gleichungen für die gradlinigen Schwingungen. Da sich die Anordnungen für gradlinige Schwingungen leichter graphisch darstellen und übersehen lassen, behandelt man zweckmässig nur diese und wendet die Ergebnisse ohne weiteres auf Drehschwingungen an. Im nachfolgenden ist deshalb nur die Rede von Massen, Federlängen und Federkräften, man kann sich darunter aber ebensovot auch Trägheitsmomente, Wellenlängen und Drehmomente vorstellen.

Da die Schwingungsdauer nur abhängt von der Kraft, die bei einer Längenänderung der Feder um 1 cm auftritt, kann man eine beliebige Feder auch durch eine Bezugfeder von bestimmtem Windungsdurchmesser und Drahtstärke ersetzen, wenn man die Länge *l* der Bezugfeder so wählt, dass sie bei der Längenänderung um 1 cm die gleiche Kraft *c* liefert wie die tatsächliche Feder. Dieser Ersatz der tatsächlichen Feder durch eine Bezugfeder ist namentlich dann zweckmässig, wenn mehrere Schwingungsanordnungen der Abbildung 1 mit verschiedenen Federdurchmessern, Drahtstärken usw. vorliegen.

Dann kann man bestimmte Abmessungen (Drahtstärke und Windungsdurchmesser) für eine Bezugfeder zu Grunde legen und jede tatsächliche Feder durch eine Bezugfeder mit der besonderen für den jeweiligen Fall in Frage kommenden Länge ersetzen, sodass sich die verschiedenen Anordnungen ausser durch die Massen nur noch durch die Federlängen unterscheiden. Zur Bestimmung der Schwingungsdauer der Anordnung nach Abbildung 1 ist also nur die Kenntnis der Länge  $l$  der Bezugfeder und der Masse  $m$  nötig, die man auch nach Abbildung 3 durch die Strecken  $l$  und  $m$  graphisch wiedergeben kann.

Wenn man Federn von verschiedenen Längen, sonst aber gleichen Abmessungen, um den gleichen Betrag, etwa um 1 cm, zusammendrückt, so lösen sie Kräfte aus, die im umgekehrten Verhältnis zu den Längen  $l$  der Federn stehen. Das  $c$  in Gleichung 3 kann also durch eine von der Wahl der Bezugfeder abhängige Konstante geteilt durch die Federlänge  $l$  ersetzt werden; oder man kann schreiben:

$$T = a \sqrt{m l} \tag{7}$$

wobei  $a$  durch die Bezugfeder festgelegt ist.

In dem Aufsatz „Verdrehungsschwingungen von Wellen und geradlinige Schwingungen von Massen, die zwischen Federn gehalten sind“ in Heft 5 der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“ 1921 habe ich gezeigt, wie man verwickeltere Anordnungen mit mehreren Massen  $m_1, m_2, m_3 \dots$ , die zwischen Federn von den Längen  $l_1, l_2, l_3 \dots$ , gehalten sind (Abbildung 4), so in Anordnungen nach Abbildung 3 zerlegen kann, dass die Gesamtschwingung sich aus Einzelschwingungen nach Abbildung 3 zusammensetzt. Zu diesem Zweck werden die Längen durch die Knotenpunkte  $K_{12}, K_{23} \dots K_{n-1,n}$  je in zwei Teile geteilt und die zwischenliegenden Massen  $m_2, m_3, m_4 \dots m_n = 1$  ebenfalls so unterteilt, dass

$$m_1 l_{11} = m_{21} l_{12} = m_{23} l_{22} = m_{22} l_{23} = m_{34} l_{33} = \dots \tag{8}$$

wobei

$$m_{21} + m_{23} = m_2; m_{32} + m_{34} = m_3; \dots \tag{9}$$

und

$$l_{11} + l_{12} = l_1; l_{22} + l_{23} = l_2; \dots \tag{10}$$

oder, wenn man die Ergebnisse von 9 und 10 in 8 einsetzt:

$$m_1 l_{11} = m_{21} (l_1 - l_{11}) = (m_2 - m_{21}) l_{22} = m_{32} (l_2 - l_{22}) \dots \tag{11}$$

Diese Gleichung ist die strenge Lösung, die durch Einsetzen in Gleichung 7 die Schwingungsdauer  $T$  liefert. Wenn man Gleichung 11 analytisch aufzulösen hat, wird man zuerst die  $m_{21}, m_{32} \dots$ , durch Zusammenfassung von je zwei aufeinander folgenden Gliedern eliminieren und dann die  $l$  durch Verhältniszahlen ersetzen. Bei  $n$  Massen hat man  $2n - 3$  Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten, die  $n - 1$  reelle Lösungen haben. Diese Lösungen enthalten nicht nur die Schwingung, bei der zwischen je 2

Im nachfolgenden soll die praktische Anwendbarkeit dieser theoretischen Ueberlegungen zur Bestimmung der Eigenschwingungszahlen von mit Schwungmassen behafteten Maschinenwellen an Beispielen gezeigt werden.

Gang der Rechnung.

Wir zergliedern zuerst die Anordnung nach Abbildung 5 in Einzelanordnungen nach Abbildung 3. Die Unterteilung der Längen und der Massen erfolgt nach der Gleichung:

$$m_1 l_{11} = m_{21} (l_1 - l_{11}) = (m_2 - m_{21}) l_{22} = m_{32} (l_2 - l_{22}) = (m_3 - m_{32}) l_{33} = m_4 (l_3 - l_{33}) \tag{12}$$

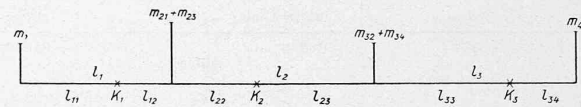


Abb. 4

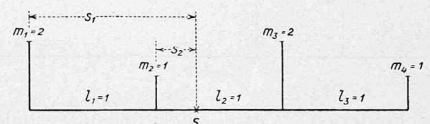


Abb. 5

Die fünf Gleichungen haben drei Lösungen für  $l_{11}$ , die die drei möglichen Schwingungsformen darstellen. Nach Gleichung 7 hat die Schwingungsform 1. Ordnung, d. h. die mit der grössten Schwingungsdauer  $T$ , den grössten Wert von  $l_{11}$ . Die Auffindung der Wurzeln der Gleichungen auf analytischem Wege würde erhebliche Schwierigkeiten bereiten. In den meisten Fällen genügt es überdies, wenn man die Schwingungsdauer 1. Ordnung, also den grössten Zahlenwert von  $l_{11}$  angeben kann. Man wird versuchen, diesen durch Probieren zu ermitteln. An der angegebenen Stelle habe ich gezeigt, dass der innenliegende Knotenpunkt der Schwingung 1. Ordnung nicht weit entfernt ist vom Schwerpunkt  $S$  der in Abbildung 5 wiedergegebenen Anordnung. Für die erste Annäherung denkt man sich deshalb  $S$  als Knotenpunkt festgehalten. Man berechnet die Eigenschwingungszahl des links (oder rechts) von  $S$  gelegenen Teiles der Anordnung. Das  $m_1 l_{11}$  dieses Teiles, das in Gleichung 7 eingesetzt,  $T$  ergibt, ist aber kleiner als  $\Sigma m s$ , wenn mit  $s$  der Schwerpunktabstand bezeichnet und die Summierung über die links oder rechts von  $S$  gelegenen Massen erstreckt wird; es ist also:

$$m l = \gamma \Sigma m s = B_1 \tag{13}$$

wobei  $\gamma$  ein echter Bruch ist. Für die 1. Annäherung setzt man  $\gamma_1 = 0,85$  bis  $0,90$  ein. Man hat dann einen Annäherungswert, den  $m l$  in Gleichung 12 haben soll und kann daraus zuerst  $l_{11}$  nach der Formel

$$l_{11} = \frac{B_1}{m_1} \tag{14}$$

dann  $m_{21}$  aus dem 2. Glied der Gleichung 12

$$m_{21} = \frac{B_1}{l_1 - l_{11}} \tag{15}$$

berechnen usw., und erhält aus dem letzten Glied der Gleichung 12:

$$m'_4 (l_3 - l_{33}) = B_1. \tag{16}$$

Da  $l_{33}$  schon aus dem vorausgehenden Ansatz bekannt ist, liefert Gleichung 16 einen Wert für  $m'_4$ , der von den vorausgehenden Annahmen abhängt und der nicht mit dem bestimmten Wert

von  $m_4 = 1$  übereinstimmen wird. Wir erhalten also den Wert, den die Masse  $m_4$  haben müsste, wenn der Ansatz  $m l = B_1$  wirklich die Lösung der Gleichungen 12 wäre.

Nach diesen Ueberlegungen ist die erste Zeile der Tabelle I berechnet. Man erhält hier für  $m'_4$  den Wert 0,900 statt des gegebenen 1,0. Für die Anordnung mit den Massen  $m_1, m_2, m_3$  und  $m'_4$  kennt man einerseits  $B_1$  und damit die Schwingungsdauer  $T'_1$  nach der Formel 7,  $T'_1 = a \sqrt{B_1}$ ; andererseits kann man hierfür den Schwer-

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$s_1$	$\Sigma m s$	$\gamma_1$	$B_1$	$l'_{13}$	$m_{21}$	$l'_{23}$	$m_{32}$	$l'_{34}$	$m'_4$	$s'_1$	$\Sigma m s'$	$\gamma_2$
1,33	3,0	0,850	2,55	1,275	-9,27	0,248	3,39	-1,835	0,900	1,30	2,90	0,880
—	—	0,880	2,64	1,32	-8,25	0,2855	3,695	-1,558	1,032	—	—	—

$$B = 2,55 + 0,09 \frac{1 - 0,900}{1,032 - 0,900} = 2,55 + 0,068 = 2,618 \quad \gamma = 0,873$$

Massen 1 Knotenpunkt — bei  $n$  Massen ( $n - 1$ ) Knotenpunkte — liegt (Schwingung der ( $n - 1$ ten Ordnung), sondern zugleich auch alle Schwingungen der niederen Ordnung. Ich habe an der angeführten Stelle den Begriff des aussenliegenden Knotenpunktes eingeführt und gezeigt, dass z. B. die Schwingung 1. Ordnung bei  $n$  Massen ( $n - 2$ ) aussenliegende und 1 innenliegenden Knotenpunkt, die 2. Ordnung  $n - 3$  aussenliegende und 2 innenliegende Knotenpunkte hat usw.

punkt  $S'$  und  $\Sigma m \cdot s'$  links von  $S'$  berechnen. Man kann also nach Gleichung 13 das  $\gamma_2$  ermitteln (Spalte 11 bis 13).

Für die Berechnung der zweiten Annäherung nimmt man an, dass die Anordnung mit der Masse  $m_4$  das gleiche  $\gamma$  habe wie die Anordnung mit der Masse  $m_4'$  und rechnet die zweite Zeile der Tabelle mit  $\gamma_2 = 0,880$  wieder unter Benützung der Gleichung 12 durch. Man erhält so ein  $m_4'' = 1,032$ , das dem  $B_2 = 2,64$  entspricht und das dem wirklichen Wert  $m_4 = 1,00$  schon beträchtlich näher liegt

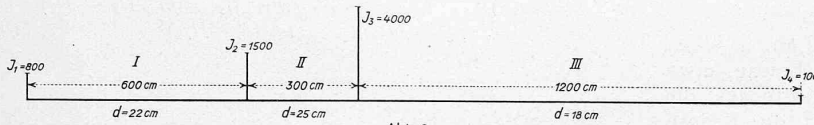


Abb. 6

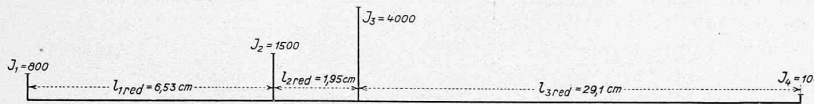


Abb. 7

als  $m_4'$ . Die verschiedenen Werte, die für  $m_4$  erhalten werden, kann man abhängig von den Annahmen für  $B$  in einer Kurve auftragen, von der die beiden Punkte  $m_4'$ ,  $B_1$  und  $m_4''$ ,  $B_2$  bekannt sind. Um das  $B$  zu ermitteln, das zum tatsächlich vorhandenen  $m_4$  gehört, denkt man sich das Kurvenstück durch eine Gerade ersetzt und extrapoliert nach der Formel:

$$B = B_1 + (B_2 - B_1) \frac{m_4 - m_4'}{m_4'' - m_4'} \quad (17)$$

und erhält in der Tabelle den Wert  $B = 2,618$ .

Wie man sieht, ist in diesem Falle das  $\gamma_2 = 0,880$ , das in der ersten Zeile erhalten wird, eine gute Annäherung an das tatsächliche Ergebnis ( $\gamma = 0,873$ ). Das ist aber in diesem besonderen Falle darauf zurückzuführen, dass die Massenverteilung verhältnismässig gleichmässig ist. Im allgemeinen Falle, z. B. bei der Berechnung einer Schiffswelle auf Drehschwingungen, kann es vorkommen, dass die letzte Schwungmasse, z. B. die Schiffschraube, ein im Vergleich zu den übrigen Massen kleines Trägheitsmoment hat. Dann ist es, wenn man eine rasche Annäherung an den wahren Wert  $m_4$  haben will, empfehlenswert, die Berechnung unter Benützung des  $\gamma_1$  und  $B_1$  von beiden Seiten zu beginnen und bei jener Masse  $m_r$ , deren statisches Moment auf  $S$  bezogen — also  $m_r s_r$  — den grössten Wert hat, endigen zu lassen.

Nach Tabelle I und Formel 7 würde sich die Schwingungsdauer 1. Ordnung berechnen zu

$$T_1 = a \sqrt{B} = a \sqrt{2,618} \quad (18)$$

Die Grösse von  $a$  ist in einem bestimmten Fall durch die Abmessungen der Bezugsfeder gegeben.

*Durchrechnung eines Zahlenbeispiels.*

Die auf einer Schiffswelle sitzenden Schwungmassen mögen durch die in Abbildung 6 eingeschriebenen Zahlenwerte gegeben sein. Die Trägheitsmomente sind Massenträgheitsmomente, also von der Dimension  $\text{kg cm sek}^2$ . Wir haben die Anordnung zuerst auf einheitliche Bezugsfedern, d. h. gleiche Wellendurchmesser, umzurechnen, und zwar wählen wir als Bezugswelle ganz willkürlich jene Welle, die bei der Länge von 1 cm und dem Drehmoment von 1 cmkg die Verdrehung  $\Delta \varphi = \frac{1}{10^8}$  (oder  $57,3^0 \cdot 10^{-8}$ ) liefert. Die drei in der Abbildung auftretenden Wellenstücke von den Längen  $l$  werden auf die Längen  $l_{red}$  der Bezugswelle so umgerechnet, dass die tatsächlichen Wellenstücke und die zugehörigen Bezugswellenstücke bei glei-

chem Drehmoment gleiche Verdrehungswinkel ergeben. Nach einer bekannten Form der Festigkeitslehre ist:

$$\Delta \varphi = \frac{M l}{G i_p} \quad (19)$$

wobei  $M$  das Drehmoment,  $G$  den Schubelastizitätsmodul und  $i_p$  das polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnitts bezeichnet. Da Wellenstück und Bezugswellenstück bei gleichem Drehmoment gleichen Verdrehungswinkel haben sollen, ist:

$$\frac{l}{i_p} = \frac{l_{red}}{(i_p)_{red}} \text{ oder } l_{red} = l \frac{(i_p)_{red}}{i_p} \quad (20)$$

Das Trägheitsmoment der Bezugswelle ist mit  $(i_p)_{red}$  bezeichnet.  $(i_p)_{red}$  ist nach Gleichung 19 und den bestimmten für die Bezugswelle gemachten Annahmen:

$$(i_p)_{red} = \frac{10^8}{G}; \quad (21)$$

oder,  $G$  mit  $800\,000 \text{ kg/cm}^2$  eingesetzt:

$$(i_p)_{red} = \frac{10^8}{0,8 \cdot 10^6} = 125 \text{ cm}^4 \quad (21a)$$

$$l_{red} = 125 \frac{l}{i_p} \quad (22)$$

Nach dieser Formel sind die drei Stücke  $l_{1red}$ ,  $l_{2red}$  und  $l_{3red}$  der Bezugswelle berechnet und in Abbildung 7 eingetragen.

Die Schwingungsdauer der Anordnung wird, wie man aus dem Vergleich der Formeln 3 und 6 ersieht, nicht geändert, wenn man sich die Schwungmassen vom Trägheitsmoment  $J$  durch gradlinig schwingende Massen  $m$  und die Wellenstücke durch Zug- und Druckfedern ersetzt denkt. Die Bezugsfeder muss dabei entsprechend den Annahmen, die für die Bezugswelle gemacht worden sind, so gewählt sein, dass sie bei der Länge von 1 cm und der Zusammendrückung um  $\frac{1}{10^8}$  cm die Kraft von 1 kg auslöst. Für die Anordnung mit den gradlinig schwingenden Massen (Abbildung 8) kann man sich den Schwerpunkt  $S$  berechnen, wenn man überdies noch voraussetzt, dass die Massen keine Breite haben, also je in einem Massenpunkt vereinigt sind (Schwingungsschwerpunkt).

Der Abstand der Masse  $m_1$  vom Schwerpunkt  $S$  wird berechnet nach der Formel:

$$\begin{aligned} & m_1 s_1 + m_2 (s_1 - l_1) = \\ & = m_3 (l_1 + l_2 - s_1) + m_4 (l_1 + l_2 + l_3 - s_1); \\ & s_1 = \frac{m_2 l_1 + m_3 (l_1 + l_2) + m_4 (l_1 + l_2 + l_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \end{aligned} \quad (23)$$

Der Wert von  $\Sigma m s$  der Massen rechts oder links von  $S$  ist für die in Abbildung 7 gemachten Zahlenangaben:

$$\Sigma m s = m_1 s_1 + m_2 s_2 = 7250 \text{ kg sek}^2 \quad (24)$$

Der 1. Annäherungswert für die Schwingungsdauer 1. Ordnung ist demnach unter Benützung des Wertes  $\gamma_1 = 0,85$ :

$$T_1' = 2 \pi \sqrt{\frac{7250 \cdot 0,85}{10^8}} = 4,93 \cdot 10^{-2} \text{ sek} \quad (25)$$

Tabelle II.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$s_1$	$\Sigma m s$	$\gamma_1$	$B_1$	$l_{12}$	$m_{21}$	$l_{23}$	$m_{33}$	$l_{43}$	$m_{34}$	$m_{34}'$	$s_1'$	$\Sigma m s$	$\gamma_2$
7,40	7250	0,850	6160	7,70	-5260	0,912	5930	61,6	-189,5	5740	7,64	7800	0,790
---	---	0,790	5725	7,16	-9090	0,541	4060	57,25	-203	3857	---	---	---

$$B = 6160 - (6160 - 5725) \frac{4000 - 5740}{3857 - 5740} = 5760$$

da die Bezugsfeder von der Länge 1 cm bei der Längenänderung um 1 cm nach der Voraussetzung die Kraft  $c = 10^8 \text{ kg}$  auslöst. Daraus folgt:

$$n_1' = \frac{60}{T_1'} = 1218 \cdot 1/\text{min} \quad (25)$$

Unter Benützung der Formel 12 ist Tabelle II berechnet worden. Da die am weitesten rechts gelegene Masse  $m_4$  in Abbildung 7 nur geringes Gewicht — also ein kleines statisches Moment auf  $S$  bezogen — hat, ist

bei der Aufstellung der Tabelle die Masse  $m_3$ , die das grösste statische Moment in Bezug auf  $S$  hat, als Schlussmasse angenommen worden. In Spalte 9 und 10 ist deshalb von rechts mit der Lösung der Gleichung begonnen und in Spalte 11  $m_3$  als Summe der Ergebnisse der Spalten 8 und 10 eingesetzt worden. Hätte die Anordnung der Abbildung 8 statt der Masse  $m_3 = 4000 \text{ kg sek}^2/\text{cm}$  die Masse  $m_3' = 5780 \text{ kg sek}^2/\text{cm}$  aus der ersten Zeile der Tabelle, so wäre der angenommene Wert  $B_1 = 6160$  der

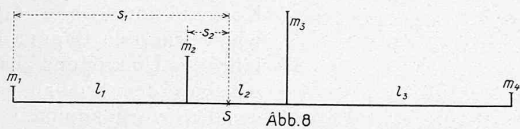


Abb. 8

richtige Wert zur Bestimmung von  $T_1$ . Für diese Anordnung mit  $m_3'$  ist in Spalte 13 wieder das  $\sum m s'$  links vom Schwerpunkt berechnet worden. Daraus erhält man in Spalte 14 das tatsächliche  $\gamma_2 = 0,790$  für die Anordnung mit den Massen  $m_1, m_2, m_3', m_4$ , das in der zweiten Zeile als neuer Annäherungswert für die Anordnung nach Abbildung 8 verwendet worden ist. Mit  $\gamma_2 = 0,790$  erhält man in der zweiten Zeile das tatsächliche  $B_2$  für eine Anordnung mit der Masse  $m_3'' = 3850 \text{ kg sek}^2/\text{cm}$ , die der gegebenen Anordnung mit der Masse  $m_3 = 4000 \text{ kg sek}^2/\text{cm}$  schon recht nahe kommt. Durch Interpolation wird nach Gleichung 17 der Wert  $B$  und daraus  $n_1 = 1260$  als minutliche Periodenzahl für die Schwingung erster Ordnung der Anordnung nach Abbildung 7 erhalten.

*Grenzfälle der Schwingungen und Beziehungen zwischen  $m$  und  $l$ .*

Bei der Berechnung der Schwingung können zwei Grenzfälle auftreten:

1. An einer bestimmten Stelle, z. B. an der Stelle 2, kann das  $m_{21}$ , das nach Gleichung 12 errechnet wird, gleich  $m_2$  sein. Dann wird im nächsten Glied  $(m_2 - m_{21}) = 0$  und  $l_{22} = \infty$ , und in dem darauffolgenden Glied  $l_2 - l_{23} = -\infty$  und  $m_{33} = 0$ . Das Wellenstück  $l_2$  hat also einen aussenliegenden Knotenpunkt im Unendlichen; d. h.  $l_2$  ändert bei der Schwingungsbewegung seine Länge nicht. Die beiden Massen  $m_2$  und  $m_3$  bleiben bei der Schwingung in stets gleicher Entfernung oder, wenn man sie als Schwingmassen und die Federn als Wellen ansieht: sie führen gegeneinander keine Verdrehungen aus.

2. An einer Stelle, z. B. Stelle  $m_3$ , wird  $l_{22} = l_2$ ; dann ist  $(l_2 - l_{22}) = 0$  und, nach Gleichung 12,  $m_{32} = \infty$  also auch  $m_3 - m_{32} = -\infty$  und  $l_{33} = 0$ . Das heisst: ein Knotenpunkt liegt in der Masse  $m_3$ . Die Masse macht bei der Schwingung, für die sie Knotenpunkt ist, keine Bewegungen mit.

Aus Gleichung 12 ersieht man ferner, dass Massen und Längen für die Schwingung vollständig gleichwertig sind. Beide werden nach bestimmten Verhältniszahlen geteilt und es spielt immer nur das Produkt aus einem Massenteil und einem Längenteil eine Rolle. Man kann deshalb auch in der Darstellung die Massen durch wagrechte neben einander gereichte Strecken und die Federlängen durch zwischengesetzte senkrechte Strecken wiedergeben. Aus Abbildung 4 wird dann Abbildung 9.

Für die Zergliederung des Schwingungsvorgangs muss es gleichgültig sein, welche der beiden Grössen  $m$  und  $l$  man als Massen und welche als Längen auffasst. Daraus folgt, dass den Knotenpunkten, die die Längen unterteilen, solche entsprechen müssen, die die Massen unterteilen. Jede zwischenliegende Masse und Länge wird

durch einen inneren oder äusseren Knotenpunkt unterteilt. Nur die inneren Knotenpunkte treten bei der Schwingung in die Erscheinung. Auf die Längen- und Massenknotenpunkte wird noch ausführlicher im folgenden Abschnitt zurückgekommen.

In Abbildung 10 sind Massen und Längen gegenseitig vertauscht worden. Abbildung 10a stellt eine Anordnung dar, die an beiden Enden durch je eine Masse begrenzt wird. Durch Vertauschung erhält man daraus Abbildung 10b,

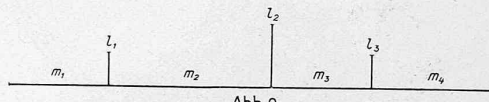


Abb. 9

bei dem die Enden durch die Federn  $l_1'$  bzw.  $l_4'$  gebildet werden. Die Anordnung 10b geht aus 10a hervor, wenn man die Strecken  $m$  und  $l$  bzw.  $m'$  und  $l'$  wechselseitig gleich setzt, also:

$$m_1 = l_1'; m_2 = l_2'; m_3 = l_3' \quad (26)$$

$$\text{und } l_1 = m_1'; l_2 = m_2'; l_3 = m_3'$$

Die beiden Anordnungen haben, wenn für beide das Produkt  $ml$  gleich ist, gleiche Schwingungsbilder und Schwingungsdauern. In den vorausgehenden Ausführungen ist deshalb schon die Lösung für die Aufgabe, die Eigenschwingungszahlen einer Welle zu bestimmen, die an beiden Enden festgehalten ist, mit enthalten.

*Schwingungen höherer Ordnung.*

Bei einer Schwingung von der  $r$ -ten Ordnung wird eine Anordnung mit aussenliegenden Massen (nach Art der Abbildung 10a) durch  $r$  innenliegende Längenknotenpunkte und  $r - 1$  innenliegende Massenknötenpunkte unterteilt. Die Schwingung 2. Ordnung hat also z. B. zwei Längenknotenpunkte  $K_1$  und  $K_2$  und einen Massenknötenpunkt  $Q_1$  (Abbildung 11). Wenn bei der Anordnung mit  $n$  Massen

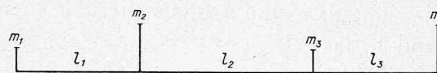


Abb. 10a

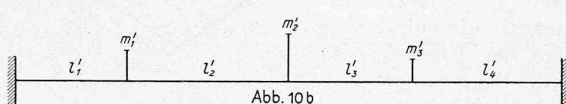


Abb. 10b

**Verdrehungsschwingungen von Wellen.**

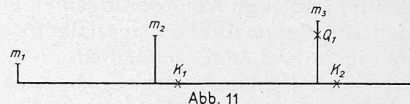


Abb. 11

nicht zwei Massen, sondern zwei Federn aussen liegen (Abbildung 10b), dann sind bei der Schwingung  $r$ -ter Ordnung  $r$  innenliegende Massenknötenpunkte und  $r - 1$  innenliegende Längenknotenpunkte vorhanden. Die Längenknotenpunkte sind dadurch ausgezeichnet, dass an diesen Stellen die Federn bei der Schwingung ruhen. Man ändert den Schwingungsvorgang nicht, wenn man die Feder an der Stelle  $K$  aufschneidet und die beiden Enden festhält. Durch den Massenknötenpunkt dagegen wird die Masse so in zwei Teile geteilt, dass durch die Teilfläche bei der Schwingung keine Kräfte übertragen werden. Man kann also z. B. bei der Anordnung Abbildung 11 die Masse  $m_3$  in  $Q_1$  aufschneiden, ohne die zugehörige Schwingung 2. Ordnung dadurch zu stören. Durch  $Q_1$  wird die Gesamtanordnung so in zwei Teile geteilt, dass die Schwingung 1. Ordnung jeden Teiles gleich der Schwingung 2. Ordnung der Gesamtanordnung ist.

Wenn die Schwingung I. Ordnung bekannt ist und die Schwingung II. Ordnung berechnet werden soll, weiss man vor allem, dass  $T_1$  kleiner ist als  $T_{II}$ . Den ersten Ansatz wählt man zweckmässig so, dass man  $B_1$  etwa gleich setzt  $\frac{1}{3} B_{II}$ . Die weitere Durchrechnung zur Annäherung an den tatsächlichen Wert findet in gleicher Weise wie bei Tabelle II statt.