Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 79/80 (1922)

Heft: 11

Inhaltsverzeichnis

Band 80. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 11.**

Trägheitskräfte und Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen.

Elementar dargestellt von Prof. Dr. *W. Kummer*, Ingenieur, Zürich.

Die Eigenschwingungszahlen von Maschinenwellen, die von der Wellenverbiegung oder von der Wellenverdrehung, oder von beiden Beanspruchungen kombiniert hervorgerufen werden, sind nach der einschlägigen Literatur in der Regel aus den Differentialgleichungen der klassischen Dynamik hergeleitet. Indessen ist es für das grundlegende Schema der schwingenden Einzelmasse sowohl im Falle der Wellenverbiegung, als auch im Falle der Wellenverdrehung möglich, die Fo mel für die Eigenschwingungszahl auf elementarem Wege, gleichsam auf statischer Grundlage, rechnerisch zu ermitteln, wozu in beiden Fällen die Zentrifugalkraft der rotierenden Masse ganz oder zum Teil die Gegenkraft der in Betracht fallenden elastischen Kraft bildet. Für die Biegungserscheinung ist diese Berechnungsmethode allgemein bekannt und in die Handbücher des Ingenieurs[1]) übergegangen; für die Verdrehungserscheinung finden wir einen bezüglichen, hier näher zu erörternden Ansatz in dem kürzlich erschienenen Werke von Dr. Ing. *Hans Wydler*[2]). Mit Rücksicht auf die analogen Erörterungen zur Herleitung der jeweiligen Beziehungen, sollen beide Fälle im Folgenden zur Darstellung kommen. Als weitere, dritte Gattung von Eigenschwingungszahlen an Maschinenwellen kann man noch die aus der Längenänderung (Dehnung) von Kurbelstangen hervorgehende betrachten, wobei jedoch die bewegten Massen nicht nur Eigenschwingungen, sondern zugleich meistens auch erzwungene Schwingungen unmittelbar bewirken, die harmonischen Drehmomenten von Trägheitskräften entsprechen; statt einer Einzelwelle ist nun allerdings ein eigentliches „Getriebe", nämlich entweder das Gleitkurbelgetriebe (Schubkurbelgetriebe) oder das Parallelkurbelgetriebe, zu betrachten. Auch für diese Schwingungen die wir als „Dehnungsschwingungen" bezeichnen wollen, lassen sich die Eigenschwingungszahlen auf elementarem Wege, also ohne Zuhülfenahme von Differentialgleichungen, ermitteln, wie im Folgenden gezeigt wird.

1. *Biegungsschwingungen.* Auf die masselose Welle sei die scheibenförmige Masse m mit der sehr kleinen Exzentrizität e aufgebaut. Bei der Rotation erfährt die, gemäss der Durchbiegung f aus der Geraden verformte Welle eine als „zusätzliche" Kraft auftretende Zentrifugalkraft Z vom Betrage:

$$Z = m\,(f + e) \cdot \omega^2$$

die nach Massgabe der Biegungskonstanten c_b mit der zu f proportionalen Kraft B der federnden Biegung vom Betrag

$$B = c_b f$$

im Gleichgewichte stehen muss, derart dass

$$m\,(f + e)\,\omega^2 = c_b f.$$

Die hieraus bestimmte Durchbiegung:

$$f = \frac{m\,e\,\omega^2}{c_b - m\,\omega^2}$$

wird ein Maximum, wenn der Nenner verschwindet, was für die kritische Winkelgeschwindigkeit ω_b, bezw. für die kritische Drehzahl ν_b der Eigenschwingung der Wellenverbiegung:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{c_b}{m}}\,, \quad \nu_b = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{c_b}{m}}$$

der Fall ist. Bekanntlich vermeidet man für numerische Rechnungen die Bestimmung der als Kraft pro Längeneinheit anzugebenden Grösse c_b und schreibt:

$$\frac{c_b}{m} = \frac{c_b f}{m f} = \frac{g}{f}$$

weil die Kraft $c_b f$ dividiert durch m der Beschleunigung g der Erdschwere gleichzustellen ist. Man erhält dann:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{g}{f}}\,, \quad \nu_b = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{g}{f}}$$

Man kann auch anstelle von c_b die ihr reziproke Grösse γ_b einführen, die, ebenso wie c_b, den Elastizitätsmodul E und das Flächenträgheitsmoment des Wellenquerschnitts enthalten muss, und kann schreiben:

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{\gamma_b\,m}}\,, \quad \nu_b = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{\gamma_b\,m}}\,,$$

welche Darstellungsform wir in einer frühern Veröffentlichung[1]) benutzten.

2. *Drehschwingungen.* Unsere zylindrisch angenommene Welle, deren Zylinder-Erzeugende $A\,B = l$ links in Abbildung 1 dem Beschauer zunächst liegt, sei am End-

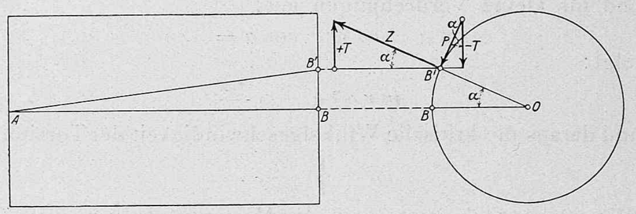

Abbildung 1.

querschnitt bei A mit einer als unendlich gross anzunehmenden Masse versehen, während der Endquerschnitt bei B die endliche Masse m aufweisen soll. Der Verdrehung entspricht der Schiebungsbogen:

$$f = B\,B'$$

für den die Festigkeitslehre die Beziehung:

$$f = M_t\,\frac{r}{c_t}$$

liefert, in der mit M_t das tordierende Moment, mit r ($= OB$ in Abbildung 1) der Wellenradius und mit c_t die Torsionskonstante bezeichnet sind. In c_t sind das polare Trägheitsmoment J_p, der Schubelastizitätsmodul G und die Länge l gemäss:

$$c_t = \frac{G\,J_p}{l}$$

enthalten, derart, dass c_t als Moment pro Bogeneinheit Deformation gemessen ist. Wir nennen die deformierende Schubkraft P und schreiben:

$$P = \frac{M_t}{r} = c_t\,\frac{f}{r^2}$$

Nach *H. Wydler*[2]) entspricht dem Schiebungsbogen f eine Trägheitskraft T, die als Komponente der Zentrifugalkraft in der Anfangsrichtung von f den Wert:

$$T = m\,a\,\omega^2$$

hat, wobei für die Bewegungsumkehr:

$$a = f$$

und

$$c_t\,\frac{f}{r^2} = m\,f\,\omega^2$$

gesetzt wird, und wobei die Auflösung nach ω den Ausdruck der kritischen Winkelgeschwindigkeit der Torsion ergibt:

$$\omega_t = \sqrt{\frac{c_t}{m\,r^2}} = \sqrt{\left(\frac{G\,J_p}{r^2}\right)\frac{1}{m\,l}}$$

[1]) Vergl. Band II der «*Hütte*», sowie Band I des Taschenbuches für den Maschinenbau von *H. Dubbel.*

[2]) Vergl. unter «Literatur» auf Seite 128 dieser Nummer.

[1]) Auf Seite 147 von Band LXXII (am 12. Oktober 1918).

[2]) Seite 8 seines oben erwähnten Werkes.