Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung

Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Band: 77/78 (1921)

Heft: 19

Artikel: Berechnung von Rahmentragwerken aus Elementen stetig veränderlicher Höhe

Autor: Herska, Leopold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37256

Band 77. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 19.**

Berechnung von Rahmentragwerken aus Elementen stetig veränderlicher Höhe.

Von Ingenieur *Leopold Herzka*, Oberbundesbahnrat, Wien.

Träger mit stetig veränderlicher Höhe werden wohl am vorteilhaftesten nach dem von Dr.-Ing. *Max Ritter*[1]) empfohlenen Gesetze berechnet; es lautet in etwas vereinfachter Schreibweise:

$$y = 1 - (1 - n)\,\varphi_1^{\,2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und eignet sich ganz besonders auch für die äussere Trägergestaltung. In Gleichung (1) bedeuten mit Bezug auf Abb. 1 und 2:

$$y = \frac{J_m}{J} \text{ und } n = \frac{J_m}{J_a}$$

wobei J das Trägheitsmoment an der Stelle x_1, J_m jenes in Trägermitte (bezw. bei Trägerformen nach Abbildung 2 am Ende ohne Anlauf [Voute]) und J_a endlich das am verstärkten Balkenende darstellen; φ_1 ist ein Verhältnis, das bei Balken nach Abb. 1 durch $\varphi_1 = \frac{2\,x_1}{l}$, bei solchen nach Abbildung 2 durch $\varphi_1 = \frac{x_1}{l}$ bestimmt ist. Die Festlegung der Querschnitte erfolgt im ersten Falle auf die Balkenmitte, sonst auf das unverstärkte Balkenende. Ersichtlich bewegt sich φ_1 zwischen ± 1 oder (Abb. 2) zwischen 0 und 1; der Exponent wird, abweichend von Ritter, mit $2r$ angenommen, um schon durch die Gleichung selbst eine zur Balkenmitte symmetrische Voutenanordnung anzudeuten, was stets dann zutrifft, wenn r eine ganze Zahl ist; die gewonnenen Ergebnisse lassen sich aber ohne weiteres auch für unganze r-Werte anwenden.

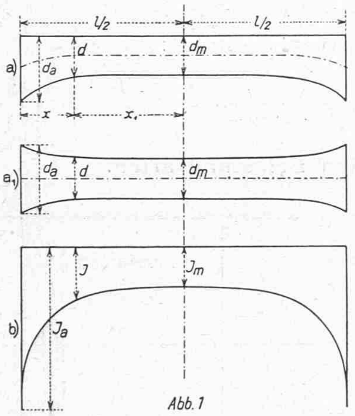


Abb. 1

Zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke mit Hilfe der Formänderung reicht die Kenntnis der Endverdrehungswinkel τ der irgendwie belasteten Rahmenelemente vollkommen aus; ihre Bestimmung nach Gleichung (1) ergibt, solange Endmomente als Belastungen vorliegen, mühelos durchsichtige Schlussformeln; für Einzellast-Angriffe im Balkenfeld wird die Herausschälung solcher Gebrauchswerte schon umständlicher; hier bietet die Spaltung einer Last in einen symmetrischen und einen polarsymmetrischen Kraftangriff[2]) ganz besondere Vorteile. Von Bedeutung ist, dass die gewonnenen Ergebnisse sich von jenen für feststehendes J nur durch eine Konstante K_s unterscheiden, die für $n = 1$ zur Einheit wird und die je nach der Belastungsart eine andere Zusammensetzung aufweist. Durch Einführung eines ideellen Trägheitsmomentes $\mathcal{J}_s = J_m : K_s$ erhalten die τ-Werte vollends die Gestalt jener für konstantes J.

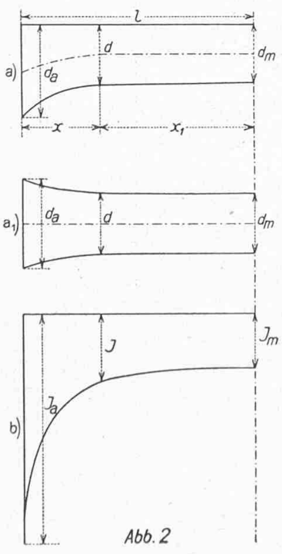


Abb. 2

In der umstehenden Tabelle sind die Winkel- und K-Werte für eine Anzahl häufig vorkommender Belastungsarten zusammengestellt.

Ueber den wesentlichen Einfluss eines Trägers mit Anlauf auf die statisch unbestimmten Grössen und auf die hierdurch bedingte Entlastung bezw. Belastung einzelner Trägerquerschnitte kann in den in Anmerkung angezogenen Aufsätzen nachgelesen werden, in welchen auch die Herleitung der einzelnen τ-Werte zu finden ist; hier möge nur die Berechnung der unter Nr. 1 und 7 für die Trägerform Abbildung 2 eingetragenen Winkelwerte nachgeholt werden.

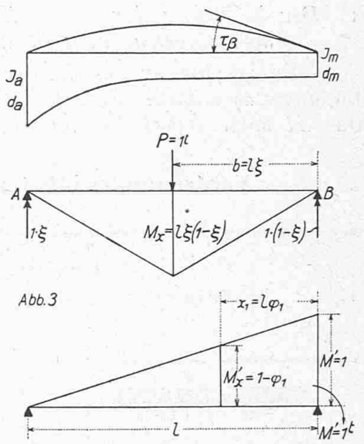


Abb. 3

Für den in Abb. 3 dargestellten, durch die Einheitslast im Abstande $b = l\,\xi$ von B ergriffenen Träger ist der Stellungswinkel τ_β (am unverstärkten Ende des Trägers) zu berechnen.

Nach bekannter Beziehung ist:

$$\tau_\beta = \frac{1}{E\,J_m} \int M_x\, M_x'\, y\, dx_1,$$

wobei M_x, bezw. M_x' die Momente am Orte $x_1 = l\,\varphi_1$ darstellen, wie sie sich durch die Belastung $P = 1\,t$, bezw. durch den Zustand $M' = 1$ ergeben; mit den Eintragungen der Abb. 3 gilt für:

$$x_1 < b \;.\;.\;.\;.\;.\; M_x = 1\, l\,(1 - \xi)\,\varphi_1$$

und für $\quad x_1 > b \;.\;.\;.\;.\;.\; M_x = 1\, l\, \xi\,(1 - \varphi_1)$

Daher endlich wegen: $dx_1 = l\,d\varphi_1$ und $M_x' = (1 - \varphi_1)$:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{E\,J_m}\left\{\int_0^\xi \left[1 - (1-n)\,\varphi_1^{\,2r}\right](1-\xi)(1-\varphi_1)\,\varphi_1\, d\varphi_1 + \right.$$
$$\left. + \,\xi \int_\xi^1 \left[1 - (1-n)\,\varphi_1^{\,2r}\right](1-\varphi_1)^2\, d\varphi_1\right\}$$

Die Integration liefert:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{6\,E\,J_m}\,\xi\,(1-\xi)(2-\xi)\left\{1 - \frac{6\,(1-n)}{(r+1)(2r+1)(2r+3)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{(1-\xi)(2-\xi)}\left[1 - 0{,}5\left([2r+3] - \xi\,[2r+1]\right)\xi^{2r+1}\right]\right\} \quad (2)$$

und wenn der Ausdruck in der geschweiften Klammer mit K_{11}' bezeichnet wird:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{6\,E\,J_m}\,K_{11}'\,\xi\,(1-\xi)(2-\xi) \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Für Gleichlast p über die Balkenlänge ergibt die Integration der Gleichung (2) zwischen den Grenzen 0 und 1, wobei $1\,t = p\,db = p\,l\,d\xi$ zu setzen ist:

$$_{p}\tau_\beta = \frac{p\,l^3}{24\,E\,J_m}\left\{1 - \frac{6\,(1-n)}{(r+1)(2r+3)(r+2)}\right\} =$$
$$= \frac{p\,l^3}{24\,E\,J_m}\,K_{11} = \frac{p\,l^3}{24\,E\,\mathcal{J}_{11}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[1]) *Max Ritter:* «Ueber die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment.» Schweiz. Bauzeitung, Bd. LIII, S. 231 (1. Mai 1909).

[2]) Siehe die bezüglichen Veröffentlichungen des Verfassers: 1. «Die Berechnung des zweistieligen, symmetrischen Stockwerkrahmens für beliebigen Kraftangriff.» Zeitschrift für Betonbau. 1916, H. 7 bis 10; 2. «Balken mit stetig veränderlicher Höhe.» Der Bauingenieur. 1920, H. 12.

Die Konstante K_{11} darf, wie man sich leicht überzeugen kann, mit hinreichender Genauigkeit an Stelle von K_{11}' gesetzt werden; dann hat man endlich:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{6\,E\,J_m} K_{11}\, \xi\,(1-\xi)\,(2-\xi) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welcher Ausdruck mit dem Werte $n = 1$ in den für konstantes J übergeht.

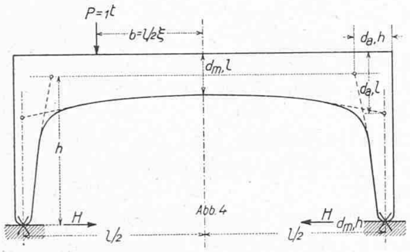


Abb. 4

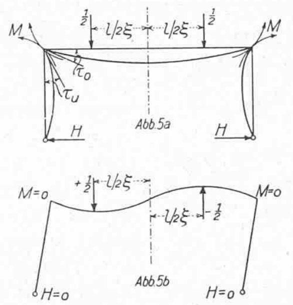


Abb. 5a Abb. 5b

Beispiele:

1) *Der in Abb. 4 dargestellte Zweigelenkrahmen ist für die dort eingetragene Belastung zu untersuchen.*

Er ist für *symmetrischen* Lastangriff $^1/_2\, t$, $^1/_2\, t$ (Abbildung 5*a*) *einfach* statisch unbestimmt und man erhält das H auch schon in der richtigen Grösse für die unsymmetrische Belastung der Abb. 4; bei einer *spiegelsymmetrischen* Kraftgruppe $^1/_2\, t$, $-\,^1/_2\, t$ (Abb. 5*b*) ist $H = 0$ und daher der Rahmen *statisch bestimmt.*

Das Eckmoment M gewinnt man unmittelbar aus der leicht ersichtlichen Beziehung:

$$\tau_o + \tau_u = 0.$$

Nun ist aus der Tabelle:

$$\tau_u = \alpha_h\, K_{4h}\, M$$

(Nr. 2, Spalte 4) und

$$\tau_o = \gamma_l\, K_{3l}\, M + \gamma_l \frac{l}{8} K_{2l}\,(1-\xi^2)$$

(Nr. 4 *b*, Spalte 1, bezw. Nr. 5, Spalte 1) und sohin die Gleichung der Einflusslinie für das Eckmoment:

$$M = -\frac{l}{8}\,\frac{\gamma_l\, K_{2l}}{\alpha_k\, K_{4h} + \gamma_l\, K_{3l}}\,(1-\xi^2)$$

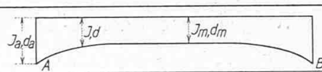
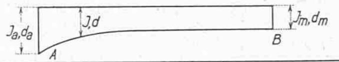
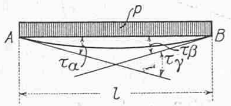
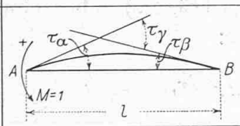
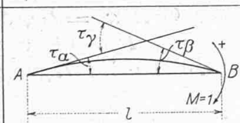
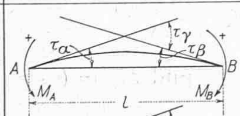
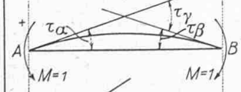
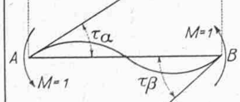
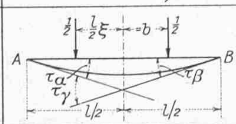
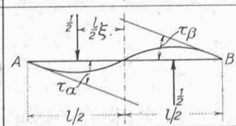
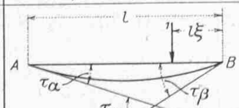
Die neuen Indices bei den Winkel- und K-Werten weisen auf die jeweils bezogenen Rahmenglieder hin; durch Sonderwertung gewinnt man, wenn

$$\mathfrak{J}_{4h} = \frac{J_{m,\,h}}{K_{4,\,h}}, \quad \mathfrak{J}_{3l} = \frac{J_{m,\,l}}{K_{3l}}$$

gesetzt wird, den übersichtlichen Ausdruck:

$$M = -\frac{l}{8}\,\frac{A}{1 + {}^2/_3\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{J_{m\,l}}{J_{m\,h}}\right)B}\,(1-\xi^2) \quad . \quad . \quad (5)$$

Verdrehungswinkel und Konstanten für die am häufigsten vorkommenden Belastungsarten.

Nº.	Belastungsart	Trägerform  $\tau_\alpha =$	$\tau_\beta =$	$\tau_\gamma =$	 $\tau_\alpha =$	$\tau_\beta =$	$\tau_\gamma =$	Konstanten und Bemerkungen
1		$\frac{pl^2}{8}\alpha K_2$	$\frac{pl^2}{8}\alpha K_2$	$\frac{pl^2}{4}\alpha K_2$	$\frac{pl^2}{8}\alpha K_6$	$\frac{pl^2}{8}\alpha K_{11}$	$\frac{pl^2}{4}\alpha K_8$	$\alpha = \frac{l}{3EJ_m}$; $\beta = \frac{l}{6EJ_m}$; $\gamma = \frac{l}{2EJ_m}$
2		αK_1	βK_2	γK_3	αK_4	βK_8	γK_{10}	$K_1 = 1 - \frac{3(1-n)(r+1)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{3K_3+K_4}{4}$ $K_2 = 1 - \frac{3(1-n)}{(2r+1)(2r+3)} = \frac{3K_3-K_4}{2} = K_5$
3		βK_2	αK_1	γK_3	βK_8	αK_7	γK_9	$K_3 = 1 - \frac{(1-n)}{2r+1} = \frac{1}{3}(2K_1+K_2) = \frac{K_9+K_{10}}{2}$
4a		$\beta(2M_A K_1 \pm M_B K_2)$	$\beta(M_A K_2 \pm 2M_B K_1)$	$\gamma K_3 (M_A \pm M_B)$	$\beta(2M_A K_4 \pm M_B K_8)$	$\beta(M_A K_8 \pm 2M_B K_7)$	$\gamma(M_A K_{10} \pm M_B K_9)$	$K_4 = 1 - \frac{3(1-n)}{2r+3} = 2K_1 - K_2$ $K_6 = 1 - \frac{6(1-n)}{(r+2)(2r+3)}$
4b		γK_3	γK_3	$2\gamma K_3$	γK_{10}	γK_9	$2\gamma K_9$	$K_7 = 1 - \frac{3(1-n)}{(r+1)(2r+1)(2r+3)}$
4c		βK_4	$-\beta K_4$	0	βK_{12}	$-\beta K_{13}$	—	$K_8 = 1 - \frac{3(1-n)}{(r+1)(2r+3)} = 2(K_6+K_{11})$
5		$\gamma\frac{l}{8}(1-\xi^2)K_5$ [1]	$\gamma\frac{l}{8}(1-\xi^2)K_5$ [1]	$\gamma\frac{l}{4}(1-\xi^2)K_5$ [1]	—	—	—	$K_9 = 1 - \frac{(1-n)}{(r+1)(2r+1)} = \frac{2K_7+K_8}{3}$ $K_{10} = 1 - \frac{(1-n)}{r+1} = \frac{2K_4+K_8}{3}$
6		$\beta\frac{l}{8}\xi(1-\xi^2)K_6$ [2]	$-\beta\frac{l}{8}\xi(1-\xi^2)K_6$ [2]	0	—	—	—	$K_{11} = 1 - \frac{6(1-n)}{(r+1)(r+2)(2r+3)}$ $K_{12} = 1 - \frac{3(1-n)(2r+1)}{(r+1)(2r+3)}$
7		—	—	—	$\beta l\xi(1-\xi^2)K_6$ [3]	$\beta l\xi(1-\xi)(2-\xi)K_{11}$ [3]	—	$K_{13} = 1 + \frac{3(1-n)(2r-1)}{(r+1)(2r+1)(2r+3)}$

Die genauen, mit der Laststellung veränderlichen Koeffizienten lauten (siehe auch die erwähnte Abhandlung):

[1] $K_5' = 1 - \frac{(1-n)}{(r+1)(2r+1)} \cdot \frac{1-\xi^{2(r+1)}}{1-\xi^2}$; [2] $K_6' = 1 - \frac{3(1-n)}{(r+1)(2r+3)} \cdot \frac{1-\xi^{2(r+1)}}{1-\xi^2}$; [3] $K_{11}' = 1 - \frac{6(1-n)}{(r+1)(2r+1)(2r+3)} \cdot \frac{1}{(1-\xi)(2-\xi)} \cdot \left\{1 - 0{,}5\left[(2r+3)-(2r+1)\xi\right]\xi^{2r+1}\right\}$

In dieser Gleichung bedeuten:

$$A = \left(\frac{K_{2l}}{K_{3l}}\right) = 1 + \frac{2r_l(1-n_l)}{(2r_l+3)(2r_l+n_l)},$$

$$B = \left(\frac{K_{4h}}{K_{3l}}\right) = \frac{(2r_h+3n_h)(2r_l+1)}{(2r_h+3)(2r_l+n_l)},$$

welche Beträge für $n = 1$ gleichfalls in die Einheit übergehen, wodurch dann Gleichung (5) die Gestalt für konstantes Trägheitsmoment (innerhalb eines Rahmengliedes) annimmt. Nun ist $A > 1$ und mit wenigen Ausnahmen $B < 1$, sodass beide Konstanten auf eine Vergrösserung des Eckmomentes hinarbeiten; für einzelne r und n wurden A und B in nachstehender Tabelle zusammengefasst.

r_e	n_e	A	B					
			$r_h =$ 1			0,5		
			$n_h = 0,5$	0,3	0,0	0,5	0,3	0,0
1	0,4	1,100	0,875	0,725	0,500	0,781	0,594	0,313
	0,2	1,145	0,955	0,791	0,546	0,852	0,648	0,341
	0,0	1,200	1,050	0,870	0,600	0,938	0,713	0,375
2	0,4	1,078	0,795	0,659	0,454	0,710	0,540	0,284
	0,2	1,109	0,833	0,690	0,476	0,744	0,565	0,298
	0,0	1,143	0,875	0,725	0,500	0,781	0,594	0,313

Nimmt man z. B. an: $h = 6,0\ m$, $l = 9,0$ m, $J_{ml} = 0,03\ m^4$, $J_{mh} = 0,015\ m^4$, $r_l = 1$, $n_l = 0,2$, $r_h = 0,5$, $n_h = 0,3$, so ergibt die Tabelle: $A = 1,145$ und $B = 0,648$.

Daher entsteht:

$$A : \left\{1 + {}^2/_3\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{J_{ml}}{J_{mh}}\right)B\right\} = 0,724,$$

bezw. für $n = 1 \ldots 1 : \left\{1 + {}^2/_3\left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{J_{ml}}{J_{mh}}\right)\right\} = 0,529.$

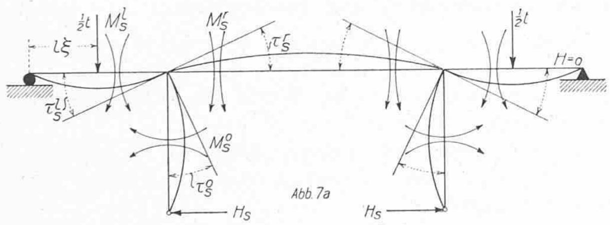


Abb. 7a

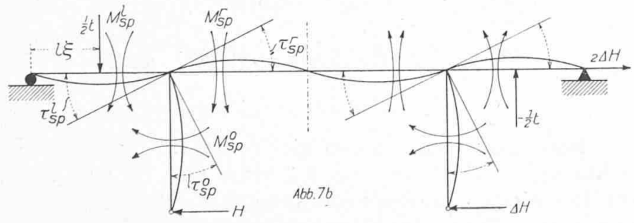


Abb. 7b

Das Eckmoment erfährt durch Anordnung von Vouten eine Erhöhung um rund 37 %. Es darf aber nicht übersehen werden, dass, wenn man die Rechnung mit konstanten J-Werten durchführt, durch geschickte Wahl mittlerer Trägheitsmomente der Betrag von 0,529 eine ziemliche Annäherung an 0,724 erfahren kann. Die richtigen oder besser gesagt zutreffendsten Mittelwerte zu finden ist allerdings Sache von viel Uebung, Erfahrung und statischem Gefühl. Endlich sei noch bemerkt, dass die günstige Wirkung der Uebergangsvoute (beim Zusammentreffen zweier Stabelemente) in der Rechnung nicht berücksichtigt wurde; wie dies geschehen kann, bleibe einer spätern Arbeit vorbehalten.

2) *Berechnung eines zweistieligen, symmetrischen Dreifeld-Trägers mit Fussgelenken und fester Lagerung bei B (Abb. 6).*

Er ist vierfach statisch unbestimmt; durch Spaltung der Last in einen *symmetrischen* und einen *polarsymmetrischen* Kraftangriff (Abb. 7 und 8) sinkt die Unbestimmtheit *je auf die Hälfte* herab; in den bezüglichen Abbildungen sind die Lastauflösungen für einen Kraftangriff im End- bezw. Mittelfelde dargestellt, ferner die hierdurch bewirkten Formänderungen, die Verdrehungswinkel, die Richtung der Knotenmomente und endlich die Horizontalkräfte; ebenso finden sich darin die sonstigen im Rechnungsgang benützten Bezeichnungen. Durch Uebereinanderlegung der geteilten Lastgruppen resultiert Lastenunsymmetrie.

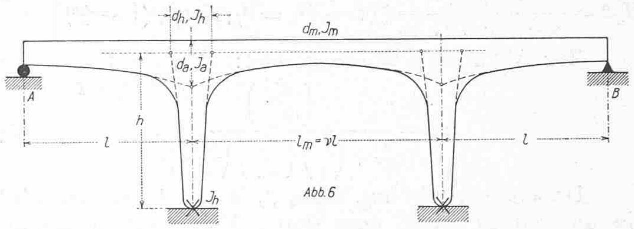


Abb. 6

Der nachstehende Rechnungsgang stützt sich auf folgende Grundsätze:

a) die Summe sämtlicher an einem freigemachten Knoten wirkenden Momente ist Null; deren Verknüpfung erfolge durch Uebertragungswerte; setzt man daher allgemein:

$$M^l = \lambda M^0, \quad M^r = \varrho M^0,$$

wobei M^0 das obere Säulenmoment, M^l, M^r die Stützenmomente unmittelbar links, bezw. rechts vom betrachteten Knoten darstellen, so besteht, absolut genommen, je nach dem Lastangriff:

$$\varrho - \lambda \pm 1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

b) die Knotendrehwinkel sind unter einander gleich:

$$\tau^l = \tau^r = \tau^0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Diese beiden Bedingungen genügen, um die statischen Grössen in raschester Weise zu berechnen.

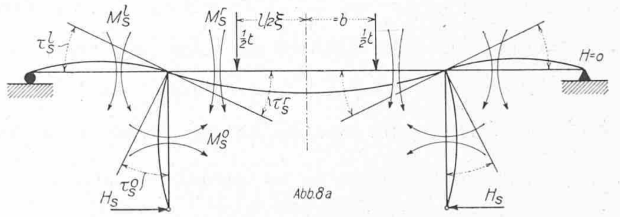


Abb. 8a

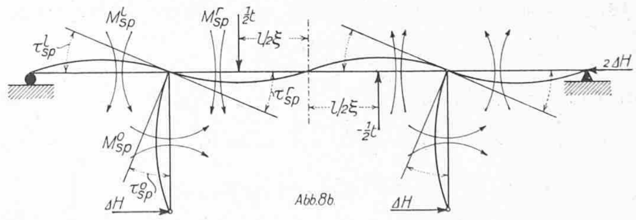


Abb. 8b

2a) *Der Rahmenträger ist im Endfelde belastet;* die Lastspaltung ist in den Abb. 7a und 7b dargestellt.

Mit Hilfe der Tabellenwerte, deren Aufsuchung an Hand der Abbildungen sehr einfach ist, ergibt sich, wenn durch den Fussindex auf eine symmetrische (s), bezw. spiegelsymmetrische (sp) Belastung hingewiesen werden soll:

$$\tau_s{}^0 = \alpha_h K_{4h} M_s{}^0; \quad \tau_{sp}{}^0 = \alpha_h K_{4h} M_{sp}{}^0 \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\tau_s{}^r = \gamma_m K_{3m} \varrho_s M_s{}^0; \quad \tau_{sp}{}^r = \beta_m K_{4m} \varrho_{sp} M_{sp}{}^0 \quad . \quad (9)$$

$$\tau_s{}^l = {}^1/_2 \beta_l l K_{6l} \xi (1 - \xi^2) - \alpha_l K_{4l} \lambda_s M_s{}^0 \quad . \quad (10)$$

Ersetzt man die Indices „s" durch „sp", so erhält man aus vorstehender Gleichung den Betrag für den Wert $\tau_{sp}{}^l$.

Nunmehr hat man aus den Gleichungen (8) und (9) die bezüglichen Uebertragungswerte:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_s &= \frac{\alpha_h K_{4h}}{\gamma_m K_{3m}} = {}^2/_3\left(\frac{h}{\nu l}\right)\cdot\left(\frac{\mathfrak{J}_{3m}}{\mathfrak{J}_{4h}}\right) = {}^2/_3\left(\frac{h}{\nu l}\right)\cdot\left(\frac{J_m}{J_h}\right)\cdot\left(\frac{K_{4h}}{K_{3m}}\right); \\ \lambda_s &= \varrho_s + 1. \\ \varrho_{sp} &= \frac{\alpha_h K_{4h}}{\beta_m K_{4m}} = 2\left(\frac{h}{\nu l}\right)\cdot\left(\frac{\mathfrak{J}_{4m}}{\mathfrak{J}_{4h}}\right) = 2\left(\frac{h}{\nu l}\right)\cdot\left(\frac{J_m}{J_h}\right)\cdot\left(\frac{K_{4h}}{K_{4m}}\right); \\ \lambda_{sp} &= \varrho_{sp} + 1. \end{aligned}\right\} (11)$$

Im übrigen besteht:

$$\varrho_{sp} = 3 \left(\frac{K_{3m}}{K_{4m}}\right) \varrho_s \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

endlich gewinnt man aus Gleichung (8) und (10) wegen Beziehung (7):

$$\left.\begin{aligned} M_s^0 &= \frac{{}^1/_2\, \beta_l\, l\, K_{6l}}{\alpha_h\, K_{4h} + \alpha_l\, K_{4l}\, \lambda_s}\, \xi\,(1 - \xi^2) = {}^1/_4\, l\, m_s\, \xi\,(1 - \xi^2) \\ M_{sp}^0 &= \frac{{}^1/_2\, \beta_l\, l\, K_{6l}}{\alpha_h\, K_{4h} + \alpha_l\, K_{4l}\, \lambda_{sp}}\, \xi\,(1 - \xi^2) = {}^1/_4\, l\, m_{sp}\, \xi\,(1 - \xi^2) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Zur Abkürzung wurde gesetzt:

$$m_s = \frac{\left(\frac{K_{6l}}{K_{4l}}\right)}{\lambda_s + \left(\frac{h}{l}\right)\left(\frac{J_l}{J_h}\right)\left(\frac{K_{4h}}{K_{4l}}\right)} \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Daraus entsteht m_{sp} wenn λ_s durch λ_{sp} ersetzt wird; die übrigen M erhält man durch Multiplikation mit den bezüglichen Uebertragungswerten. Durch Uebereinanderlegung folgt für die *Einheitslast* im linken Endfelde:

$$\left.\begin{aligned} M^0 &= \frac{l}{4}\,(m_s \pm m_{sp})\, \xi\,(1 - \xi^2) \\ M^l &= \frac{l}{4}\,(\lambda_s\, m_s \pm \lambda_{sp}\, m_{sp})\, \xi\,(1 - \xi^2) \\ M^r &= \frac{l}{4}\,(\varrho_s\, m_s \pm \varrho_{sp}\, m_{sp})\, \xi\,(1 - \xi^2) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15)$$

Die positiven Zeichen gelten für die Momente nächst dem belasteten Felde. Will man eine Gleichlast ${}^1/_2\, p$ berücksichtigen, so ersetzt man ${}^1/_2$ durch $\frac{p}{2}\, db = \frac{p}{2}\, l\, d\, \xi$; damit berechnet sich statt $\xi\,(1 - \xi^2)$ der Faktor:

$$p\, l \int_0^1 \xi\,(1 - \xi^2)\; d\xi = \frac{p\, l}{4};$$

z. B. entsteht, wenn beide Endfelder mit p belastet sind:

$${}_pM^0_s = 2\, \frac{l}{4}\, m_s\, \frac{p\, l}{4} = {}^1/_8\, p\, l^2\, m_s \quad . \; . \; . \quad (16)$$

und wenn nur das linke Endfeld die Last „p" trägt:

$${}_pM^0 = \frac{l}{4}\,(m_s \pm m_{sp})\, \frac{p\, l}{4} = \frac{p\, l^2}{16}\,(m_s \pm m_{sp}) \quad . \quad (17)$$

In ähnlicher Weise erhält man die übrigen Momentenwerte.

2 b) *Der Rahmenträger ist im Mittelfelde belastet.* (Abb. 8a und 8b.)

Mit dem unter 2a) angenommenen Richtungsinn hat man, wenn zur Unterscheidung ein oberer Index eingeführt wird:

$$\varrho' - \lambda' - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6')$$

Ferner: $\tau_s^{0'} = \alpha_h\, K_{4h}\, M_s^{0'}$; $\tau_{sp}^{0'} = \alpha_h\, K_{4h}\, M_{sp}^{0'}$ . . (18)

$$\tau_{sl}' = \alpha_l\, K_{4l}\, \lambda_s'\, M_s^{0'};\; \tau_{sp}^{l'} = \alpha_l\, K_{4l}\, \lambda_{sp}'\, M_{sp}^{0'} \quad . \quad (19($$

$$\left.\begin{aligned} \tau_s^{r'} &= \gamma_m\, \frac{l\nu}{8}\,(1 - \xi^2)\, K_{2m} - \gamma_m\, K_{3m}\, \varrho_s'\, M_s^{0'} \\ \tau_{sp}^{r'} &= \beta_m\, \frac{l\nu}{8}\, \xi\,(1 - \xi^2)\, K_{6m} - \beta_m\, K_{4m}\, \varrho_{sp}'\, M_{sp}^{0'} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Aus den ersten zwei Gleichungen erhält man:

$$\lambda_s' = \lambda_{sp}' = \varrho_s' - 1 = \varrho_{sp}' - 1 = \frac{\alpha_h\, K_{4h}}{\alpha_l\, K_{4l}} =$$

$$= \left(\frac{h}{l}\right) \cdot \left(\frac{J_l}{J_h}\right) \cdot \left(\frac{K_{4h}}{K_{4l}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

ferner aus $\tau_s^{r'} = \tau_s^{0'}$, bezw. $\tau_{sp}^{r'} = \tau_{sp}^{0'}$:

$$\left.\begin{aligned} M_s^{0'} &= \frac{\gamma_m\, \frac{l\nu}{8}\, K_{2m}}{\alpha_h\, K_{4h} + \gamma_m\, K_{3m}\, \varrho_s'}\,(1 - \xi^2) = \frac{l\nu}{8}\, m_s'\,(1 - \xi^2) \\ M_{sp}^{0'} &= \frac{\beta_m\, \frac{l\nu}{8}\, K_{6m}}{\alpha_h\, K_{4h} + \beta_m\, K_{4m}\, \varrho_{sp}'}\, \xi\,(1 - \xi^2) = \frac{l\nu}{8}\, m_{sp}'\, \xi\,(1 - \xi^2) \end{aligned}\right\} (22)$$

Die Abkürzungen haben die Zusammensetzung:

$$\left.\begin{aligned} m_s' &= \frac{\left(\frac{K_{2m}}{K_{3m}}\right)}{\varrho_s' + {}^2/_3\left(\frac{h}{l\nu}\right) \cdot \left(\frac{J_m}{J_h}\right) \cdot \left(\frac{K_{4h}}{K_{3m}}\right)} \\ m_{sp}' &= \frac{\left(\frac{K_{6m}}{K_{4m}}\right)}{\varrho_{sp}' + 2\left(\frac{h}{l\nu}\right) \cdot \left(\frac{J_m}{J_h}\right) \cdot \left(\frac{K_{4h}}{K_{4m}}\right)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (23)$$

Schliesslich ergeben sich, wenn die Einheitslast nächst der linken Stütze im Mittelfelde steht, wobei das positive Zeichen sich gleichfalls auf diese Stütze bezieht:

$$\left.\begin{aligned} M^{0'} &= \left\{ m_s' \pm \xi\, m_{sp}' \right\} \frac{l\nu}{8}\,(1 - \xi^2) \\ M^{l'} &= \left\{ m_s'\, \lambda_s' \pm \xi\, m_{sp}'\, \lambda_{sp}' \right\} \frac{l\nu}{8}\,(1 - \xi^2) \\ M^{r'} &= \left\{ m_s'\, \varrho_s' \pm \xi\, m_{sp}'\, \varrho_{sp}' \right\} \frac{l\nu}{8}\,(1 - \xi^2) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Für Gleichlast über das ganze Mittelfeld kann man unmittelbar die erste Zeile der Gleichung (22) benützen; dabei ist zu setzen: ${}^1/_2 = {}^1/_2\, p\, db = {}^1/_2\, p\, \frac{l\nu}{2}\, d\xi$ und der erhaltene Wert zu verdoppeln:

$${}_pM_s^{0'} = 2\, \frac{l\nu}{8}\, m_s'\, p\, \frac{l\nu}{2} \int_0^1 (1 - \xi^2)\, d\,\xi = \frac{p\, l^2\, \nu^2}{12}\, m_s' \quad (25)$$

Ist der ganze Träger gleichmässig belastet, so resultiert aus den Gleichungen (16) und (25):

$${}_gM_s^0 = \frac{p\, l^2}{8} \left\{ m_s - {}^2/_3\, \nu^2\, m_s' \right\} \quad . \; . \; . \quad (26)$$

Das negative Glied erklärt sich daraus, dass die Momente der benützten Gleichungen entgegengesetzten Richtungsinn haben, für die beiden Stützenmomente findet man:

$$\left.\begin{aligned} {}_gM_s^l &= \frac{p\, l^2}{8} \left\{ m_s\, \lambda_s + {}^2/_3\, \nu^2\, m_s'\, \lambda_s' \right\} \\ {}_gM_s^r &= \frac{p\, l^2}{8} \left\{ m_s\, \varrho_s + {}^2/_3\, \nu^2\, m_s'\, \varrho_s' \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (27)$$

Ueber den Einfluss der Vouten auf die Momente gelten dieselben Ueberlegungen wie im früheren Beispiel; sie können in jedem besonderen Falle leicht angestellt werden. Wir wollen unter folgenden Annahmen die Klammerwerte für die Gleichungen (26) und (27) bestimmen und zwar für veränderliches und für konstantes J ($n = 1$):

$l = 6{,}0\ m$; $l_m = 9{,}0\ m$ ($\nu = 1{,}5$); $h = 6{,}0\ m$; $r_l = r_m = 1{,}0$; $n_e = n_m = 0{,}1$; $r_h = 0{,}5$; $n_h = 0{,}3$; $J_l = J_m = 0{,}03\ m^4$; $J_h = 0{,}015\ m^4$; die Werte in Klammer gelten für $n = 1$; man findet:

$\varrho_s = 0{,}603\ (0{,}889)$; $\lambda_s = 1{,}603\ (1{,}889)$; $\varrho_s' = 3{,}065\ (3{,}0)$; $\lambda_s' = 2{,}065\ (2{,}0)$; $m_s = 0{,}3794\ (0{,}2571)$; $m_s' = 0{,}3194\ (0{,}257)$ und daher:

$${}_gM_s^0 = -\,0{,}0997\ (-\,0{,}12855)\, \frac{p\, l^2}{8}$$

$${}_gM_s^l = +\,1{,}59752\ (+\,1{,}25696)\, \frac{p\, l^2}{8}$$

$${}_gM_s^r = +\,1{,}69722\ (+\,1{,}38551)\, \frac{p\, l^2}{8}$$

Man sieht, dass durch die Voute in unserem Falle die Stützenmomente um 22,3 %, bezw. 27,1 % sich gegenüber den Werten für feldweise konstante Trägheitsmomente vergrössert haben; das Kopfmoment hat eine Ermässigung um 22,5 % erfahren.

Wien, August 1920.

Das Projekt einer Uetliberg-Seilbahn.

Am 12. Mai 1875 ist die „Uetlibergbahn" bei Zürich dem Betrieb übergeben worden. Mit 9130 *m* Länge überwindet sie bis zu ihrer Endstation, 60 *m* unterhalb des Gipfels, einen Höhenunterschied von 399 *m*. Als normalspurige Adhäsionsbahn mit künstlicher Entwicklung (vergl. Abbildung 1) und 70 ‰ Maximalneigung erregte sie damals besonderes technisches Interesse.[1]) Leider blieben ihr, infolge der hohen Betriebskosten, der langen und teuren Fahrt und der ungünstigen Lage von Ausgang- und Endpunkt, die nötige Frequenz und damit der finanzielle Erfolg versagt; nur neun Jahresabschlüsse ermöglichten die

[1]) Näheres darüber berichten Prof. *A. Fliegner* in der «Eisenbahn», Bd. II (26. März 1875) und Ing. *J. Tobler* in «Eisenbahn», Bd. IV (April 1876), ferner Obering. *Rob. Moser* in der E. T. H.-Festschrift von 1905, Zweiter Teil, Seite 235.