Band 77. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 19.**

Berechnung von Rahmentragwerken aus Elementen stetig veränderlicher Höhe.

Von Ingenieur *Leopold Herzka,* Oberbundesbahnrat, Wien.

Träger mit stetig veränderlicher Höhe werden wohl am vorteilhaftesten nach dem von Dr.-Ing. *Max Ritter*[1]) empfohlenen Gesetze berechnet; es lautet in etwas vereinfachter Schreibweise:

$$y = 1 - (1 - n)\,\varphi_1^{\,2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und eignet sich ganz besonders auch für die äussere Trägergestaltung. In Gleichung (1) bedeuten mit Bezug auf Abb. 1 und 2:

$$y = \frac{J_m}{J} \text{ und } n = \frac{J_m}{J_a}$$

wobei J das Trägheitsmoment an der Stelle x_1, J_m jenes in Trägermitte (bezw. bei Trägerformen nach Abbildung 2 am Ende ohne Anlauf [Voute]) und J_a endlich das am verstärkten Balkenende darstellen; φ_1 ist ein Verhältnis, das bei Balken nach Abb. 1 durch $\varphi_1 = \frac{2\,x_1}{l}$, bei solchen nach Abbildung 2 durch $\varphi_1 = \frac{x_1}{l}$ bestimmt ist. Die Festlegung der Querschnitte erfolgt im ersten Falle auf die Balkenmitte, sonst auf das unverstärkte Balkenende. Ersichtlich bewegt sich φ_1 zwischen ± 1 oder (Abb. 2) zwischen 0 und 1; der Exponent wird, abweichend von Ritter, mit $2r$ angenommen, um schon durch die Gleichung selbst eine zur Balkenmitte symmetrische Voutenanordnung anzudeuten, was stets dann zutrifft, wenn r eine ganze Zahl ist; die gewonnenen Ergebnisse lassen sich aber ohne weiteres auch für unganze r-Werte anwenden.

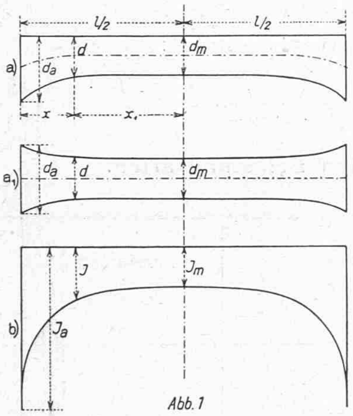

Abb. 1

Zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke mit Hilfe der Formänderung reicht die Kenntnis der Endverdrehungswinkel τ der irgendwie belasteten Rahmenelemente vollkommen aus; ihre Bestimmung nach Gleichung (1) ergibt, solange Endmomente als Belastungen vorliegen, mühelos durchsichtige Schlussformeln; für Einzellast-Angriffe im Balkenfeld wird die Herausschälung solcher Gebrauchswerte schon umständlicher; hier bietet die Spaltung einer Last in einen symmetrischen und einen polarsymmetrischen Kraftangriff[2]) ganz besondere Vorteile. Von Bedeutung ist, dass die gewonnenen Ergebnisse sich von jenen für feststehendes J nur durch eine Konstante K_s unterscheiden, die für $n = 1$ zur Einheit wird und die je nach der Belastungsart eine andere Zusammensetzung aufweist. Durch Einführung eines ideellen Trägheitsmomentes $\mathfrak{J}_s = J_m : K_s$ erhalten die τ-Werte vollends die Gestalt jener für konstantes J.

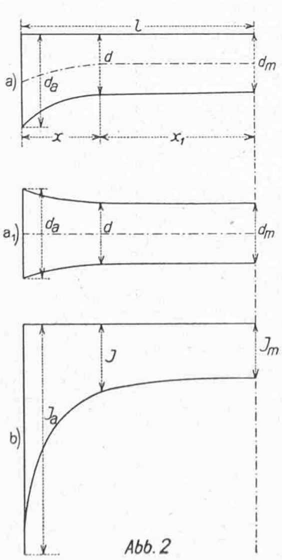

Abb. 2

In der umstehenden Tabelle sind die Winkel- und K-Werte für eine Anzahl häufig vorkommender Belastungsarten zusammengestellt.

Ueber den wesentlichen Einfluss eines Trägers mit Anlauf auf die statisch unbestimmten Grössen und auf die hierdurch bedingte Entlastung bezw. Belastung einzelner Trägerquerschnitte kann in den in Anmerkung angezogenen Aufsätzen nachgelesen werden, in welchen auch die Herleitung der einzelnen τ-Werte zu finden ist; hier möge nur die Berechnung der unter Nr. 1 und 7 für die Trägerform Abbildung 2 eingetragenen Winkelwerte nachgeholt werden.

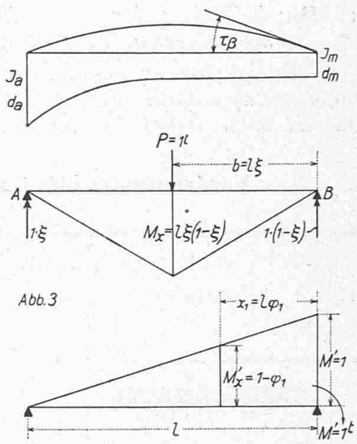

Abb. 3

Für den in Abb. 3 dargestellten, durch die Einheitslast im Abstande $b = l\,\xi$ von B ergriffenen Träger ist der Stellungswinkel τ_β (am unverstärkten Ende des Trägers) zu berechnen.

Nach bekannter Beziehung ist:

$$\tau_\beta = \frac{1}{E\,J_m} \int M_x\,M_x'\,y\,dx_1,$$

wobei M_x, bezw. M_x' die Momente am Orte $x_1 = l\,\varphi_1$ darstellen, wie sie sich durch die Belastung $P = 1\,t$, bezw. durch den Zustand $M' = 1$ ergeben; mit den Eintragungen der Abb. 3 gilt für:

$$x_1 < b \;.\;.\;.\;.\;.\; M_x = 1\,l\,(1 - \xi)\,\varphi_1$$

und für

$$x_1 > b \;.\;.\;.\;.\;.\; M_x = 1\,l\,\xi\,(1 - \varphi_1)$$

Daher endlich wegen: $dx_1 = l\,d\varphi_1$ und $M_x' = (1 - \varphi_1)$:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{E\,J_m}\left\{\int_0^\xi \left[1 - (1 - n)\,\varphi_1^{\,2r}\right](1 - \xi)\,(1 - \varphi_1)\,\varphi_1\,d\varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \,\xi \int_\xi^1 \left[1 - (1 - n)\,\varphi_1^{\,2r}\right](1 - \varphi_1)^2\,d\varphi_1\right\}$$

Die Integration liefert:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{6\,E\,J_m}\,\xi\,(1 - \xi)\,(2 - \xi)\left\{1 - \frac{6\,(1 - n)}{(r + 1)\,(2r + 1)\,(2r + 3)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(1 - \xi)\,(2 - \xi)}\left[1 - 0{,}5\,([2r + 3] - \xi\,[2r + 1])\,\xi^{2r+1}\right]\right\} \quad (2)$$

und wenn der Ausdruck in der geschweiften Klammer mit K_{11}' bezeichnet wird:

$$\tau_\beta = \frac{l^2}{6\,E\,J_m}\,K_{11}'\,\xi\,(1 - \xi)\,(2 - \xi) \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

Für Gleichlast p über die Balkenlänge ergibt die Integration der Gleichung (2) zwischen den Grenzen 0 und 1, wobei $1\,t = p\,db = p\,l\,d\xi$ zu setzen ist:

$$_p\tau_\beta = \frac{p\,l^3}{24\,E\,J_m}\left\{1 - \frac{6\,(1 - n)}{(r + 1)\,(2r + 3)\,(r + 2)}\right\} =$$

$$= \frac{p\,l^3}{24\,E\,J_m}\,K_{11} = \frac{p\,l^3}{24\,E\,\mathfrak{J}_{11}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

[1]) *Max Ritter:* «Ueber die Berechnung elastisch eingespannter und kontinuierlicher Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment.» Schweiz. Bauzeitung, Bd. LIII, S. 231 (1. Mai 1909).

[2]) Siehe die bezüglichen Veröffentlichungen des Verfassers: 1. «Die Berechnung des zweistieligen, symmetrischen Stockwerkrahmens für beliebigen Kraftangriff.» Zeitschrift für Betonbau. 1916, H. 7 bis 10; 2. «Balken mit stetig veränderlicher Höhe.» Der Bauingenieur. 1920, H. 12.