Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 77/78 (1921)
Heft: 15

Artikel: Seitensteiffigkeit offener massiver Bogenbrücken
Autor: Ostenfeld, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37243

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 28.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Seitensteifigkeit offener massiver Bogenbrücken. — Flugzeuge mit verspannungslosen Tragflächen. — Der Segelflug der Vögel und die Möglichkeit einer künstlichen Nachahmung. — Wettbewerb für den Ausbau des Länggass-Quartiers in Bern. — Miscellanea: Neue Schnellbahn-Pläne für New York. Eidgenössische Technische Hochschule. Elektrifizierung der Berliner Vorortbahnen. Die Gibraltar-Staumauer im Santa Inez River in Californien. Kommission für elektrische Anlagen. Eidgenössische Kommission für Mass und Gewicht. Elektrifizierung der Gotthardlinie. — Konkurrenzen: Gemeinde-Asyl in Schwanden. Dorfplatz und Dorfbrunnen in Bettingen. Kirchgemeindehaus Zürich-Enge. Neubau der Schweizerischen Volksbank in Freiburg. — Nekrologie: K. E. Osthaus. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Schweizer. Ingenieur- und Architekten-Verein. Société Genevoise des Ingénieurs et des Architectes. St. Gallischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Stellenvermittlung.

Band 77. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. **Nr. 15.**

Seitensteifigkeit offener massiver Bogenbrücken.

Von Prof. *A. Ostenfeld*, Kopenhagen.

Während man gewöhnlich bei Untersuchung der Seitensteifigkeit offener Fachwerkbrücken vom Drehungswiderstand des Obergurtes absieht, wird dies für massive Bögen, und besonders für solche aus Eisenbeton, eine allzu grobe Annäherung sein. Indessen wird die Aufgabe durch exakte Berücksichtigung des Drehungswiderstandes ausserordentlich erschwert. Für gewöhnliche Fachwerkbrücken lässt sich das Knickproblem bekanntlich auf die Untersuchung der Determinante eines Systems von 5-gliedrigen Gleichungen zurückführen[1]); wenn jetzt in jedem Obergurtstab noch ein unbekanntes Drehungsmoment auftritt und die Zahl der Ueberzähligen daher mit diesen Momenten vergrössert wird, könnte man sich zwar die Rechnung auf die Weise durchgeführt denken, dass man die Drehungsmomente als einzige Ueberzählige auf ein statisch unbestimmtes Hauptsystem mit nur biegungsfestem Obergurt einwirken liesse; ein solches Verfahren würde aber offenbar zu allzu komplizierten Rechnungen und Endgleichungen führen. — Der einzige Weg, der hiernach übrig bleibt, scheint dann der folgende zu sein: indem wir uns hier auf eingespannte Bögen beschränken, betrachtet man den für eine willkürliche Belastung 6-fach statisch unbestimmten Bogen, denkt sich, er habe eine kleine Ausbiegung aus seiner Ebene angenommen und setzt eine gegebene Kurven*form* dieser Biegungslinie voraus, so dass alle Ausbiegungen y bekannt sind, wenn nur die Ausbiegung f_1 z. B. im Scheitel gegeben ist. Sodann berechnet man die von den Ausbiegungen y hervorgerufenen Aenderungen der Beanspruchungen der verschiedenen Bogenpunkte und schliesslich auch die hierdurch bewirkte Ausbiegung f_1 im Scheitel, die somit als eine Funktion von f_1 selbst hervorgeht, und man kommt auf diese Weise zu einer Gleichung $f_1 = F(f_1)$, woraus sich die Knickbedingung wie gewöhnlich herleiten lässt.

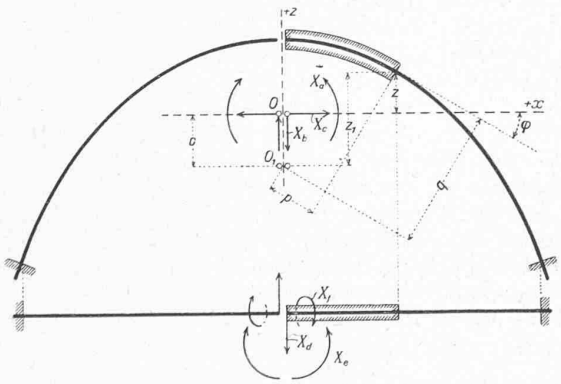

Abb. 1.

Das Verfahren ist also das nämliche, das früher von *Engesser* und *Vianello* für gerade Säulen angewandt wurde, und fordert daher eigentlich noch eine Verifikation der angenommenen Form der Ausbiegungslinie, durch Vergleich mit der berechneten. Für gerade Säulen ist doch bekanntlich eine solche Nachprüfung nicht besonders notwendig, indem die Form der Biegelinie nur sehr wenig durch kleine Aenderungen des Ausgangspunktes beeinflusst wird und im vorliegenden Falle, für einen eingespannten Bogen mit symmetrischer Deformation, worauf wir uns hier beschränken, scheint diese Nachprüfung noch weniger notwendig zu sein, da die Form der Biegelinie hier so ziemlich gegeben ist.

[1]) Siehe «Beton und Eisen» 1916, S. 123, 147.

Um zu fertigen Formeln zu gelangen, wird es notwendig werden, sowohl eine einfache Bogenform wie eine einfache Querschnittsänderung vorauszusetzen, um die Durchführung der Rechnungen möglich zu machen. Doch kann natürlich die skizzierte Berechnung immer durchgeführt werden, falls man sich mit Summationen statt Integrationen begnügen und in jedem Einzelfalle die Arbeit nach der Zahlenrechnung hinlegen will.

Als Einleitung soll zuerst kurz gezeigt werden die im folgenden benutzte

I. Behandlung des eingespannten Bogens mit räumlicher Belastung.

Indem die Querschnitthauptaxe 1 senkrecht zur Bogenebene, die Axe 2 in der Bogenebene selbst liegt, werden die sechs Schnittkräfte eines willkürlichen Querschnitts folgendermassen bezeichnet:

in der Bogenebene:
- M' ... Biegungsmoment um die Axe 1, + für Druck oben
- N ... Normalkraft, + für Zug
- T' ... Querkraft in der Axe 2, + nach der konvexen Seite

T'' ... Querkraft in der Axe 1, + nach vorn

M'' ... Biegungsmoment um die Axen 2, + für Druck auswendig

M_d ... Drehungsmoment, + wenn der Bogen sich als linksgängige Schraube verwindet

Die Vorzeichen für T' und T'' setzen voraus, dass diese Kräfte auf das Bogenstück links vom Schnitte angreifen.

Wie gesagt, beschränken wir uns auf einen symmetrischen Bogen und stellen das Hauptsystem dar durch Ueberschneidung des Bogens im Scheitel (Abb. 1); die sechs Ueberzähligen X sollen dann die Schnittkräfte im Scheitel ersetzen. Die drei ersten dieser Ueberzähligen, das Moment X_a und die beiden Vertikal- und Horizontalkräfte X_b und X_c, sind die nämlichen wie für den ebenen Bogen und sollen im Punkte O (Abb. 1) angreifend gedacht werden; die drei übrigen, nämlich die Querkraft X_d senkrecht zur Bogenebene, das Biegungsmoment X_e um die Axe 2 de sScheitelquerschnitts und das Drehungsmoment X_f, lassen wir im Punkte O_1 (in der Symmetrieaxe) angreifen. Die positiven Richtungen der Grössen X sind durch Pfeile in Abb. 1 angegeben; ein positives X_f gibt ein positives M^d in den verschiedenen Bogenpunkten. Der Koordinatenanfang wird in O gelegt, x wird nach rechts, z nach oben positiv gezählt; O_1 wird im Abstande c *nach unten* von O angenommen. Die Bogentangente schliesst mit der x-Axe den Winkel φ ein und φ wird für die linke Bogenhälfte als positiv, für die rechte als negativ angesehen.

Mit einer willkürlichen Belastung ergibt sich für den Querschnitt (x, z) (vergl. Abb. 1):

$$\left.\begin{aligned} M' &= M_0' - X_a - X_b x - X_c z, \\ M'' &= M_0'' + X_d p + X_e \cos\varphi - X_f \sin\varphi, \\ M^d &= M_0^d - X_d q + X_e \sin\varphi + X_f \cos\varphi, \\ N &= N_0 + X_b \sin\varphi - X_c \cos\varphi, \\ T' &= T_0' + X_b \cos\varphi + X_c \sin\varphi, \\ T'' &= T_0'' - X_d, \end{aligned}\right\} \quad . \ (1)$$

und hieraus bildet man die folgende Zusammenstellung der von den Belastungen $X = -1$ hervorgerufenen Beanspruchungen:

Belastung	M'	M''	M^d	N
$X_a = -1$	$+1$	0	0	0
$X_b = -1$	$+x$	0	0	$-\sin\varphi$
$X_c = -1$	$+z$	0	0	$+\cos\varphi$
$X_d = -1$	0	$-p$	$+q$	0
$X_e = -1$	0	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$X_f = -1$	0	$+\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	0

Hieraus ist sofort ersichtlich, dass sich die Ueberzähligen in zwei Gruppen, X_a, X_b, X_c und X_d, X_e, X_f, teilen, die von einander unabhängig bestimmt werden und weiter, dass sich auch die erstgenannten, X_a, X_b, X_c, aus je einer Gleichung berechnen, sobald der Punkt O als Schwerpunkt der elastischen Kräfte $\frac{ds}{J_1}$ gewählt wird. Für die drei letztgenannten Ueberzähligen erreicht man den gleichen Vorteil, falls nur:

$$\int \frac{p \cos \varphi}{EI_2} ds - \int \frac{q \sin \varphi}{GI_p} ds = 0,$$

$$- \int \frac{p \sin \varphi}{EI_2} ds - \int \frac{q \cos \varphi}{GI_p} ds = 0,$$

$$- \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{EI_2} ds + \int \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{GI_p} ds = 0,$$

von welchen Bedingungen die letzte aus Symmetriegründen sofort erfüllt ist. Mit $c + z = z_1$ (Abb. 1) ist:

$$\left.\begin{aligned} p &= x \cos \varphi + z_1 \sin \varphi, \\ q &= - x \sin \varphi + z_1 \cos \varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

womit die beiden ersten der genannten Bedingungen übergehen in:

$$\int \frac{x \cos^2 \varphi + z_1 \sin \varphi \cos \varphi}{EI_2} ds - \int \frac{- x \sin^2 \varphi + z_1 \sin \varphi \cos \varphi}{GI_p} ds = 0,$$

$$- \int \frac{x \sin \varphi \cos \varphi + z_1 \sin^2 \varphi}{EI_2} ds - \int \frac{- x \sin \varphi \cos \varphi + z_1 \cos^2 \varphi}{GI_p} ds = 0,$$

Hier ist wieder die erste aus Symmetriegründen erfüllt und mittels der letzten bestimmt sich die Lage des Punktes O_1 (Abb. 1). Mit $z_1 = c + z$ und

$$\frac{EI_2}{GI_p} = k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wird erhalten:

$$c \int (\sin^2 \varphi + k \cos^2 \varphi) \frac{ds}{J_2} = - \int (\sin^2 \varphi + k \cos^2 \varphi) \frac{z\, ds}{J_2}$$

$$- \int x \sin \varphi \cos \varphi \, (1 - k) \frac{ds}{J_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

woraus sich der Abstand c berechnen lässt. Ein positives c bedeutet, dass O_1 *unter* O zu liegen kommt. Für $k = 1$, ein Fall, der natürlich durchaus nicht allgemein zutrifft, der uns aber weiter unten speziell interessieren wird, geht aus (4) hervor, dass O_1 im Schwerpunkte der elastischen Kräfte $\frac{ds}{J_2}$ fällt. Für rechteckigen Querschnitt ist

$$J_2 = \frac{1}{12} h\, b_3 \quad \text{und} \quad J_p = \frac{12}{m} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2},$$

wo m zwischen 38,5 und 42,7 (letzteres für $b = h$) liegt. Wird weiter für Beton $G:E = 0{,}45 \ldots 0{,}375$ angenommen, so ergibt sich:

$$k = \frac{m}{65} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right) \ldots\ldots \frac{m}{54} \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right),$$

oder für $b:h$ =	$\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{4}$,	1,	2,	5
k =	0,81	1,00	1,32	3,23	15,8,
bis k =	0,98	1,20	1,59	3,89	19,0.

Nach Festlegung der Punkte O und O_1 bestimmen sich die sechs Ueberzähligen aus je einer Gleichung und die drei letzten dieser Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} X_d \int (p^2 + k q^2) \frac{ds}{J_2} &= \int (- M_0'' p + k M_0^d q) \frac{ds}{J_2}, \\ X_e \int (\cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi) \frac{ds}{J_2} &= - \int (M_0'' \cos \varphi + k M_0^d \sin \varphi) \frac{ds}{J_2} \\ X_f \int (\sin^2 \varphi + k \cos^2 \varphi) \frac{ds}{J_2} &= \int (M_0'' \sin \varphi - k M_0^d \cos \varphi) \frac{ds}{J_2} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

in welchen Gleichungen die Werte p und q durch die Gleichungen (2) gegeben sind.

II. Ausknickung des eingespannten Bogens im einfachsten Falle.

Die äussere Belastung sei lotrecht. Für den ebenen Bogen hat man dann nur mit den Momenten M_0' zu tun, während $M_0'' = 0$ und $M^d = 0$. Nimmt der Bogen dagegen die Ausbiegungen y, senkrecht zu seiner Ebene, an, wird die Belastung die ursprünglichen Momente M_0' ein wenig ändern und die Momente M_0'' und M_0^d werden von Null verschieden. Die Grösse der genannten Aenderungen hängt von der Wirkungsweise der Belastung ab; bleibt z. B. die Belastung immer lotrecht und greift sie in Punkten der Bogenaxe an (was übrigens in der Wirklichkeit kaum möglich sein wird), so bekommt man *einen* Wert der Aenderungen; wird die Belastung durch schlaffe Hängestäbe übergeführt, die sich ein wenig schräg stellen, wenn sich der Bogen ausbiegt, so ergibt sich ein anderer Wert; noch mehr abweichend werden die Verhältnisse, wenn steife Hängestäbe zusammen mit den Querträgern steife Halbrahmen bilden. *Wir nehmen indessen vorläufig an, die erwähnten Aenderungen der M_0-Werte seien so geringfügig, dass man sie ganz vernachlässigen kann,* und strenge gilt daher die erstfolgende Untersuchung nur für einen unbelasteten Bogen, der z. B. allein von einer Temperaturänderung beansprucht wird. Wir kommen auf die Berücksichtigung der Schrägstellung der Hängestäbe und eventueller Halbrahmen zurück.

Wenn der Bogen die Ausbiegungen y annimmt, stellen sich infolge hiervon auch einige kleine Winkeländerungen α um die Axe 2 und kleine Verdrehungen ϑ ein, indem die Bogenaxe in eine Raumkurve übergeht; auch diese Deformationen werden natürlich die erwähnten Aenderungen der Schnittkräfte beeinflussen. Indessen hängen die Ausbiegungen y in ähnlicher Weise von α und ϑ ab, wie die Durchbiegung eines geraden Balkens von den Tangentenwinkeln, und ebenso wie man gewöhnlich in der Differentialgleichung der elastischen Linie eines geraden Balkens die $dy : dy$ im Verhältnis zu 1 vernachlässigt, wird es daher berechtigt sein, im folgenden die Grössen α und ϑ als verschwindend zu betrachten.

Die erste Aufgabe ist nun, die Ueberzähligen X mit Berücksichtigung der Ausbiegungen y senkrecht zur Bogenebene (siehe Abbildung 2, unten, y positiv nach vorne) zu berechnen. Bei Aufstellung des Ausdruckes für die Momente im Schnitte (x, z, y) erinnert man sich jetzt, das α und ϑ vernachlässigt werden sollen; die Tangente der Ausbiegungslinie (Axe des Drehungsmomentes) soll also als parallel zur ursprünglichen Bogenebene, und die Querschnittsaxen 1 und 2 sollen als wagerecht bzw. parallel zur Bogenebene angesehen werden. X_a ruft dann nur um die Axe 1 ein Moment hervor, aber weder um die Axe 2, noch um die Bogentangente; die senkrechte Kraft X_b gibt die Momente: $- X_b x$ um die Axe 1, $+ X_b \sin \varphi \cdot y$ (im Punkte y in Abbildung 2 ist φ negativ) um die Axe 2 und $- X_b \cos \varphi \cdot y$ um die Bogentangente usw.; X_d, X_e und X_f rufen die nämlichen Momente hervor wie in (1) angegeben, da eine Parallelverschiebung aller dreier Momentenaxen um die Strecke y senkrecht zur Bogenebene keinen Einfluss auf die Wirkung dieser Kräfte üben kann. Im ganzen ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} M' &= M_0' - X_a - X_b x - X_c z, \\ M'' &= X_b y \sin \varphi - X_c y \cos \varphi + X_d p + X_e \cos \varphi - X_f \sin \varphi, \\ M_d &= - X_b y \cos \varphi - X_c y \sin \varphi - X_d q + X_e \sin \varphi + X_f \cos \varphi, \end{aligned}\right\} (6)$$

und die von den Belastungen $X = -1$ herrührenden Momente werden somit:

Belastung	M'	M''	M^d
$X_a = -1$	$+1$	0	0
$X_b = -1$	$+x$	$-y \sin \varphi$	$+y \cos \varphi$
$X_c = -1$	$+z$	$+y \cos \varphi$	$+y \sin \varphi$
$X_d = -1$	0	$-p$	$+q$
$X_e = -1$	0	$-\cos \varphi$	$-\sin \varphi$
$X_f = -1$	0	$+\sin \varphi$	$-\cos \varphi$

(7)

Weiter ist für alle X gleich Null: $M_0' = M_0'$, $M_0'' = 0$, $M_0^d = 0$, wo M_0' den nämlichen Wert hat wie für den ebenen Bogen.

Hieraus geht sofort hervor, dass die Belastungsglieder der drei letzten Elastizitätsgleichungen Null sind, jene der drei ersten Gleichungen die nämlichen wie für den ebenen Bogen. Wenn der Punkt O als Schwerpunkt der Kräfte $\frac{ds}{J_1}$ gewählt ist, wird die ganze *erste Elastizitätsgleichung* unverändert wie für den ebenen Bogen, was geschrieben werden kann:

$$X_a = X_a^0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

indem X_a^0, X_b^0 . . . . . diejenigen Werte der X-Grössen bezeichnen, die für den ebenen Bogen gelten.

Von den übrigen fünf Elastizitätsgleichungen brauchen hier nur die dritte und fünfte, zu Bestimmung von X_c und X_e, aufgestellt zu werden, wenn wir uns auf einen symmetrischen Bogen und überdies auf eine symmetrische Deformation beschränken; in dem Falle müssen nämlich die drei in der Symmetrieebene liegenden Kräfte X_b, X_d und X_f gleich Null sein. Die genannten beiden Gleichungen werden unschwer mittels der obigen Zusammenstellung (7) gebildet, sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} &X_c\left[\int\frac{z^2\,ds}{EI_1}+\int\frac{y^2\cos^2\varphi}{EI_2}\,ds+\int\frac{y^2\sin^2\varphi}{GI_p}\,ds\right]+\\ &\quad+X_c\left[-\int\frac{y\cos^2\varphi}{EI_2}\,ds-\int\frac{y\sin^2\varphi}{GI_p}\,ds\right]=\int\frac{M_0'z}{EI_1}\,ds,\end{aligned}\right\}\quad(8b)$$

$$\left.X_e\left[\int\frac{\cos^2\varphi\,ds}{EI_2}+\int\frac{\sin^2\varphi\,ds}{GI_p}\right]+X_c\left[-\int\frac{y\cos^2\varphi}{EI_2}\,ds-\int\frac{y\sin^2\varphi}{GI_p}\,ds\right]=0\right\}\quad(8c)$$

Bevor wir indessen zur näheren Auswertung dieser Gleichungen schreiten, müssen zuerst die Voraussetzungen über Bogenform usw. festgestellt werden.

Als Form der Ausbiegungskurve nehmen wir an:

$$y = \frac{1}{2}f_1\left(1+\cos\frac{2\pi x}{l}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und weiter setzen wir voraus: einen parabolischen Bogen

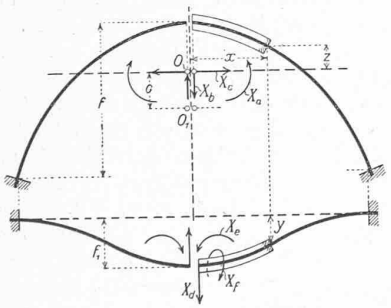

Abb. 2.

$$z = f\left(\frac{1}{3}-4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \quad (10)$$

eine Querschnittänderung, gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} I_1\cos\varphi &= I_1^c,\\ I_2\cos\varphi &= I_2^c,\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

wo I_1^c und I_2^c unveränderlich sind und schliesslich noch:

$$k = \frac{EI_2}{GI_p} = 1, \quad (12)$$

was nach obigen Auseinandersetzungen über die Werte dieses Verhältnisses einem Werte von $b:h$ entspricht zwischen $1/2$ und $3/4$. Für die Eisenbeton-Einzelbögen, die hier allein in Betracht gezogen werden sollen, wird das Verhältnis $b:h$ wohl gewöhnlich innerhalb dieser Grenzen liegen und man erhält daher sicherlich einen recht zutreffenden Begriff der Sache mit der Voraussetzung (12), die überdies die Rechnungen ausserordentlich vereinfacht.

Mit den Voraussetzungen (9) bis (12) findet man die Punkte O und O_1 (Abbildung 1) zusammenfallend, im Abstande $1/3\,f$ unter dem Scheitel; dieser Koordinatenanfang ist schon in (10) berücksichtigt worden. Nach Ausführung der Integrationen können jetzt die Gleichungen (8b) bis (8c) geschrieben werden:

$$C\left(1+\frac{135}{32}\,\frac{f_1^2\,I_1^c}{f^2\,I_2^c}\right)X_c-\frac{f_1 l}{2EI_2^c}\,X_e = CX_c^0, \quad . \quad (13b)$$

wo $C = \frac{4}{45}\,\frac{f^2 l}{EI_1^c}$ gleich jenem Koeffizienten zu X_c ist, den man beim ebenen Bogen erhalten würde; da weiter die rechte Seite die nämliche ist wie beim ebenen Bogen, somit $X_c^0 = \frac{\text{rechte Seite}}{C}$, kann man sie hier als CX_c^0 schreiben

$$\text{und} \quad \frac{l}{EI_2^c}\,X_e-\frac{f_1 l}{2EI_2^c}\,X_c = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{woraus: } X_c = \gamma X_c^0, \text{ wo } \gamma = \frac{1}{1+\frac{45}{32}\frac{f_1^2}{f^2}\frac{I_1^c}{I_2^c}},\\ &\text{und} \quad X_e = \frac{1}{2}f_1 X_c\end{aligned}\right\}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Wenn diese Werte von X_c und X_e und ausserdem $X_b = X_d = X_f = 0$, in (6) eingeführt werden, ergibt sich:

$$M'' = +\gamma\left(\frac{1}{2}f_1 - y\right)\cos\varphi X_c^0,$$

$$M^d = +\gamma\left(\frac{1}{2}f_1 - y\right)\sin\varphi X_c^0,$$

und hiermit soll schliesslich die Ausbiegung $y = f_1$ im Scheitel berechnet werden (das Moment M' trägt zu dieser Ausbiegung nicht bei). — Durch eine einfache Anwendung der Arbeitsgleichung, mit der Belastung 1 im Scheitel, senkrecht zur Bogenebene und auf das Hauptsystem wirkend, findet man:

$$f_1 = \frac{1}{EI_2^c}\int_0^{\frac{1}{2}l} M''\left(x\cos\varphi - \left(\tfrac{1}{3}f - z\right)\sin\varphi\right)dx +$$

$$+\frac{1}{GI_p}\int_0^{\frac{1}{2}l} M^d\left(x\sin\varphi + \left(\tfrac{1}{3}f - z\right)\cos\varphi\right)dx\,,$$

und nach Einführung der Werte von M'' und M_d (und mit $EI_2 = GI_p$):

$$EI_2^c f_1 = \gamma X_c^0\int_0^{\frac{1}{2}l} x\left(\tfrac{1}{2}f_1 - y\right)dx = \gamma X_c^0\,\frac{l^2}{4\pi^2}f_1.$$

Hieraus erhält man endlich die *Knickbedingung:*

$$EI_2^c = \gamma\frac{X_c^0 l^2}{4\pi^2} \quad \text{oder} \quad \gamma X_c^0 = \frac{4\pi^2 EI_2^c}{l^2} \quad . \quad . \quad (15)$$

wo γ praktisch genommen (siehe Gleichung 14) für kleine Ausbiegungen gleich 1 ist.

Dass man also zu der für eine beiderseits eingespannte gerade Säule bekannten *Euler*schen Knickkraft gelangt, ist vielleicht nicht besonders überraschend, es ist doch aber ganz interessant, diese Tatsache einmal konstatiert zu bekommen, und auch nicht für die Praxis überflüssig, wie aus dem Falle des *Langwieser* Viaduktes hervorgeht. Hierüber berichtet *Schürch* („Der Bau des Talüberganges bei Langwies an der elektrischen Bahn Chur-Arosa", Berlin 1916 Julius Springer, S. 30):

> „Zu einer Diskussion gab die Frage der Knickgefahr des grossen Bogens Veranlassung. Es ist klar, dass, da es sich hier um einen Fall zusammengesetzter Festigkeit (Biegung und Druck) handelt, nur die von der Normalkraft erzeugte Druckspannung, nicht aber die grösste Gesamtspannung am Rande, kleiner als die Knickspannung bleiben muss. Unsicher ist dagegen die Entscheidung bezüglich der Knicklänge. Setzt man eine zuverlässige Einspannung an den Widerlagern voraus, so wäre die freie Knicklänge gleich der halben Stablänge, in diesem Falle gleich der halben *abgewickelten Bogenlänge* von rund 140 *m*, also rund 70 *m*. Der Gutachter wollte jedoch die völlige Einspannung nicht gelten lassen und nur etwa $2/3$ oder $3/4$ der freien Stablänge oder rund 100 *m* als Knicklänge annehmen."

Wie man sieht, wird hier mit der *Bogenlänge*, statt der in (13) eingehenden Spannweite l, gerechnet; dass man dagegen nicht mit voller Einspannung rechnen zu dürfen glaubte, ist natürlich eine andere Sache. Uebrigens handelte es sich hier nicht um die Ausknickung der Einzelbögen, sondern des von den beiden, miteinander verbundenen Einzelbögen bestehenden ganzen Bogenträgers, und es ist daher gewiss nicht berechtigt, den Wert $k = 1$ hier zu benutzen. Wollte man die Frage hier näher untersuchen, müsste man die ganze Rechnung mit Summationen, statt Integrationen, durchführen. (Schluss folgt.)