

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 75/76 (1920)  
**Heft:** 23

**Artikel:** Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte  
**Autor:** Nádai, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-36559>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte. — Von den Erweiterungsbauten der Technischen Hochschule München. — Zur Festigkeitslehre. — Miscellanea: Einführung der Kunze-Knorrbremse in Schweden. Eidgenössische Technische Hochschule. Autogene Schweißung im Eisenbetonbau. Eidgenössische

Technische Hochschule. Ein Schweizer als Träger des Nobelpreises für Physik. Elektrische Zugförderung in Kuba. Internat. Institut für Kältetechnik. — Nekrologie: Hans Mathys. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Zürcher Ingenieur- und Architektenverein. Gesellschaft ehem. Studierender: Maschineningenieur-Gruppe; Stellenvermittlung.

Band 76.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 23.

## Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte.

Von Dr. Ing. A. Nádai, Göttingen.

1. Der Spannungszustand in einer dünnen elastischen Platte, die durch ein System von zu ihrer Ebene senkrechten Kräften nur wenig verbogen ist, hängt in erster Näherung von der Gestalt ab, nach der sie sich verbiegt. Die kleinen Verschiebungen, die ihre Punkte in der Richtung ihrer Ebene erfahren, sowie die Spannungen in ihrem Innern lassen sich auf eine Funktion der Koordinaten, nämlich die transversale Verschiebung der Mittelebene oder ihre Durchbiegung zurückführen. Wenn die Oberflächenkräfte an einzelnen Stellen der beiden Begrenzungsebenen der Platte konzentriert sind, ist der Formänderungszustand in der Umgebung dieser Stellen von komplizierterer Art. Man wird auf einen derartigen Fall von praktischer Bedeutung geführt, wenn die Spannungen der Platte in der Nähe der Angriffstelle einer Last bestimmt werden sollen.<sup>1)</sup> In dem kürzlich erschienenen ersten Band von „Drang und Zwang“ haben A. und L. Föppl am Beispiel der kreisförmigen Platte die eigenartigen Verhältnisse auseinandergesetzt, die für die Ermittlung der grössten Inanspruchnahme in einer durch eine Einzelkraft belasteten Platte massgebend sind, und unter anderm darauf hingewiesen, dass bei der Bestimmung der Spannungen im Innern des Gebietes, das durch einen zylindrischen Schnitt begrenzt ist, den man sich entlang der Randkurve der Druckfläche durch die Platte geführt denken kann, das Verhältnis ihrer linearen Abmessungen zur Dicke der Platte eine Rolle spielt. Wenn die Abmessungen der Druckfläche grösser als die Dicke der Platte sind, können die Druckspannungen, mit der sich die äusseren Kräfte auf sie übertragen, mit einer für die Anwendungen hinreichenden Genauigkeit neben den übrigen Spannungen vernachlässigt und die letzteren in der Umgebung der Angriffstelle der Last nach dem Vorgang von Grashof und A. Föppl aus den Formeln der Plattenbiegung bestimmt werden. Die Angabe der Durchbiegung reicht zur Beschreibung des Spannungszustandes in der Nähe der Druckfläche nicht aus bei starker Konzentration der Kraft in einer Platte von beliebiger Dicke. Dieses ist auch der Fall bei weniger stark konzentrierter Belastung, wenn die Dicke der Platte vergleichbar mit ihren übrigen Abmessungen ist. Im Folgenden sollen die Spannungen der Platte in diesen Fällen und bei kreissymmetrischer Gestaltsänderung in der Umgebung der Druckfläche und in dieser selbst angegeben werden.

Die elastischen Verzerrungen, die die Punkte eines Rotationskörpers unter der Wirkung eines zu seiner Axe symmetrisch verteilten Systems von Oberflächenkräften erfahren, sind durch die Angabe der kleinen Strecken  $\varrho$  und  $\zeta$  beschrieben, um die sich die Punkte im Innern in radialer und in axialer Richtung verschieben. Die radiale und axiale Verschiebung  $\varrho$  und  $\zeta$  eines Punktes, dessen Abstand von der Axe  $r$  und von einer zur letzteren senkrechten festen Ebene  $z$  ist und

<sup>1)</sup> Ich verdanke einer vor längerer Zeit gemachten gütigen Bemerkung von Herrn Prof. L. Prandtl den Hinweis auf gewisse in der Theorie der Plattenbiegung nicht berücksichtigte Verzerrungen (s. weiter unten Gl. (22a) und den anschliessenden Text), deren Einfluss sich in der Umgebung der Angriffstelle konzentrierter Kräfte stärker bemerkbar macht. Zur Durchführung der Rechnung wurde ich neuerdings durch Besprechungen mit ihm über Fragen der Berührung aneinander gedrückter elastischer Körper angeregt.

die Volumänderung  $e = \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\varrho}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$  genügen den Gleichungen<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial e}{\partial r} + (1 - 2\nu) \left( \Delta \varrho - \frac{\varrho}{r^2} \right) = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} + (1 - 2\nu) \Delta \zeta = 0$$

wo mit  $\nu$  das Verhältnis der Querverkürzung zur Längsdehnung bezeichnet ist. Ist ferner  $G$  die Schubziffer des Materials, so sind die Spannungskomponenten in Zylinderkoordinaten  $r, z$  ausgedrückt:

$$\sigma_r = 2G \left( \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right)$$

$$\sigma_t = 2G \left( \frac{\varrho}{r} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right) \quad \tau = G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_z = 2G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right)$$

2. Die Oberflächenspannungen in einem durch eine Ebene einseitig begrenzten Körper. Das System partikulärer Lösungen der Gleichungen (1)

$$\varrho = \int_0^\infty A [1 - 2\nu - az] e^{-az} J_1(ar) da \quad (z > 0)$$

$$\zeta = - \int_0^\infty A [2(1 - \nu) + az] e^{-az} J_0(ar) da \quad (3)$$

$$e = 2(1 - 2\nu) \int_0^\infty A a e^{-az} J_0(ar) da \quad 2)$$

gibt die Verschiebungskomponenten und die Volumänderung in einem Punkte  $(r, z)$  des von der Ebene  $z = 0$  begrenzten Körpers wieder, der auf dieser Ebene durch axensymmetrisch verteilte Normalspannungen belastet ist. In den bestimmten Integralen hängt  $A$  von  $a$  ab,  $J_0$  und  $J_1$  sind die Besselschen Funktionen der Ordnung 0 und 1.<sup>3)</sup> Zur Bestimmung von  $A$  dient die Gleichung für die Spannung  $\sigma_z$  in der Ebene  $z = 0$

$$\sigma_z = -p = f(r) = 2G \int_0^\infty A a J_0(ar) da =$$

$$= \int_0^\infty a J_0(ar) da \int_0^\infty f(n) J_0(an) n dn \quad (4)$$

woraus

$$2GA = - \int_0^\infty p n J_0(an) dn \quad (5)$$

Hier und im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der äussere Druck  $p$  bekannt und eine gegebene integrable Funktion von  $r$  ist. Wie schon Boussinesq und H. Hertz bemerkt haben, ist die Volumänderung  $e$  in der Ebene  $z = 0$

$$e = 2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} = - \frac{1 - 2\nu}{G} p \quad (6)$$

dem äusseren Druck  $p$  proportional. Für ein Verteilungsgesetz  $\sigma_z = -p = f(r)$  des Normaldruckes lassen sich die Spannungen in der Ebene  $z = 0$  leicht angeben. Um dies zu zeigen, braucht ausser  $e$ , dessen Wert aus (6) folgt, die Radialverschiebung  $\varrho$  aus (3) und (5) für  $z = 0$  ausgerechnet zu werden. Sie ist

$$\varrho = (1 - 2\nu) \int_0^\infty A J_1(ar) da = - \frac{1 - 2\nu}{2G} \int_0^\infty J_1(ar) da \int_0^\infty p J_0(an) n dn$$

oder

<sup>1)</sup> A. Föppl, Vorlesungen ü. techn. Mechanik Bd. 5. S. 212.

<sup>2)</sup> Riemann-Weber, Bd. 2. S. 184.

<sup>3)</sup> Schafheitlin, die Theorie der Besselschen Funktionen (Teubner).

$$\varrho = -\frac{1-2\nu}{2Gr} \int_0^\infty \dot{p} n dn \int_0^\infty J_1(ar) J_0(an) da \quad (8)$$

Das innere Integral hat nach einer bekannten Formel der Integralrechnung den Wert

$$\int_0^\infty J_1(ar) J_0(an) da = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 < n < r \\ 0 & \text{„ } r < n < \infty \end{cases} \quad (9)$$

Mithin ist

$$\varrho = -\frac{1-2\nu}{2Gr} \int_0^r \dot{p} n dn \dots (0 < r < \infty) \quad (10)$$

wo noch das Integral durch den mittleren Druck  $\bar{p}$ , der im Kreise  $r$  herrscht, ersetzt werden kann:

$$\bar{p} = \frac{2\pi \int_0^r \dot{p} n dn}{\pi r^2} \quad (11)$$

Es ergeben sich damit aus (2) die spezifischen Spannungen in der Begrenzungssebene in der ausserordentlich einfachen Form:

$$\sigma_z = -\dot{p}, \quad \sigma_r = -\dot{p} + \frac{1-2\nu}{2} \bar{p}, \quad \sigma_t = -2\nu \dot{p} - \frac{1-2\nu}{2} \bar{p}, \quad \tau = 0$$

Zur Angabe der radialen und tangentialen Spannung  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  bedarf es nur der zur Bestimmung des mittleren Druckes  $\bar{p}$  erforderlichen Quadratur. Wenn die Ebene  $z = 0$  nur im Innern eines Kreises vom Halbmesser  $r = c$  belastet ist, sind im unbelasteten Teil der Ebene ( $r > c$ )  $\dot{p} = 0$  und  $\bar{p} = P : \pi r^2$ , sofern mit  $P$  die im Druckkreis  $r = c$  übertragene Gesamtkraft bezeichnet wird. Ausserhalb des Druckkreises sind die radiale und tangentiale Spannung  $\sigma_r = -\sigma_t = \frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2}$  oder, wie man durch Vergleich mit den von Boussinesq herrührenden Formeln feststellt, ebenso gross, als wenn die Kraft  $P$  im Mittelpunkt des Kreises  $r = c$  konzentriert wäre.

3. Den Spannungszustand in einem durch zwei parallele Ebenen begrenzten elastischen Körper hat J. Dougall<sup>1)</sup> in einer grossangelegten Arbeit untersucht.<sup>2)</sup> Er gab die Lösungen der Grundgleichungen der Elastizität für eine an beliebiger Stelle im Innern oder auf einer der Begrenzungs-Ebenen angreifenden Kraft an und leitete ihre Form für die dünne Platte ab. Die Betrachtung einer unbegrenzten Platte hat den Vorzug, dass auf die Befriedigung vorgeschriebener Grenzbedingungen auf einem zylindrischen Schnitt nicht geachtet zu werden braucht; sie hat den Nachteil, dass die Spannungen und Verschiebungen mit zunehmendem Abstand von der Angriffstelle der Kraft unbegrenzt anwachsen, was die Rechnung erschwert.

Im Folgenden sollen die axensymmetrischen Formänderungen und Spannungen in einer endlichen Platte angegeben werden. Sie können aus einem speziellen Formänderungszustand

$$\begin{aligned} \varrho' &= \sum_{\lambda} K_{\lambda} \left[ 1 - 2\nu - \frac{\lambda z}{a} \right] e^{-\frac{\lambda z}{a}} J_1\left(\frac{\lambda r}{a}\right) \quad (0 < r < a, z > 0) \\ \zeta' &= -\sum_{\lambda} K_{\lambda} \left[ 2(1-\nu) + \frac{\lambda z}{a} \right] e^{-\frac{\lambda z}{a}} J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

eines unendlich langen Kreiszylinders hergeleitet werden. Die Ausdrücke gehen aus den Formeln (3) hervor, wenn in diesen  $a$  durch  $\frac{\lambda}{a}$  und  $A$  durch  $K$  ersetzt werden, unter  $\lambda$  eine sogleich zu definierende Folge von Zahlen und unter  $K$  eine von  $\lambda$  abhängige Folge von Festwerten verstanden; die Summen sind über alle  $\lambda$  zu nehmen. Die vorstehenden Ausdrücke für die radiale und axiale Verschiebung  $\varrho'$  und  $\zeta'$  sind zur Darstellung eines Spannungszustandes in einem unendlich langen Zylinder vom Halbmesser  $r = a$  geeignet, der durch die Ebene  $z = 0$  begrenzt

<sup>1)</sup> Trans. R. S. Edinburgh, 1904.

<sup>2)</sup> Mit Spannungsproblemen verwandter Art in Kreiszyllindern beobachtigten sich Chree, Filon u. a. (vergl. Love, Elasticity).

und auf dieser nur durch Normalspannungen belastet ist. Setzt man für  $\lambda$  die Bedingung

$$J_0(\lambda) = 0 \quad (14)$$

fest, sodass die Zahlen  $\lambda$  die Wurzeln der Besselschen Funktion erster Ordnung

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2,4048 \\ \lambda_2 &= 5,5201 \\ \lambda_3 &= 8,6537 \dots \end{aligned}$$

sind, so verschwindet die axiale Verschiebung  $\zeta'$  auf dem Zylindermantel  $r = a$ . (Die Reihe stellt auch auf dem Rande ihres Geltungsbereiches den Funktionswert von  $\zeta'$  richtig dar.) Die zu den Verschiebungen gehörigen Spannungen können aus den Gl. (2) berechnet werden. Für  $z = \infty$  verschwinden sämtliche Spannungskomponenten, die Druckverteilung auf der ebenen Begrenzung des Zylinders wird von einem System von Spannungen auf seinem Mantel im Gleichgewicht gehalten. Die Festwerte  $K_{\lambda}$  werden aus der Grenzbedingung  $z = 0$   $\sigma_z' = \frac{2G}{a} \sum K_{\lambda} \lambda J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right) = -\dot{p} = f\left(\frac{r}{a}\right)$  bestimmt. Setzt man  $x = \frac{r}{a}$ , so ist

$$K_{\lambda} = \frac{a}{G \lambda J_1^2(\lambda)} \cdot \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda x) dx \quad (15)$$

Wenn beispielsweise der Normaldruck in einem Kreise vom Halbmesser  $r = c$  gleichmässig verteilt und ausserhalb desselben gleich Null ist, wird

$$\begin{aligned} 0 < r < c \dots \dots f(x) &= -\dot{p}_0 & K_{\lambda} &= -\frac{\dot{p}_0 c}{G} \cdot \frac{J_1\left(\frac{\lambda c}{a}\right)}{\lambda^2 J_1^2(\lambda)} \\ c < r < a \dots \dots f(x) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Wenn der Halbmesser  $c$  des „Druckkreises“ unbegrenzt verkleinert und gleichzeitig der Druck  $\dot{p}_0$  in dem Masse vergrössert wird, dass die Resultierende der Druckspannungen  $\sigma_z$  konstant bleibt, nähert sich  $K_{\lambda}$  wegen  $[J_1(n) : n]_{n=0} = 1/2$  einem Grenzwert, nämlich:

$$K_{\lambda}^* = -\frac{P}{2\pi a G} \cdot \frac{1}{\lambda J_1^2(\lambda)} \quad (16a)$$

Dieser Wert von  $K_{\lambda}$  wird im Falle der Beanspruchung durch eine im Koordinatenanfangspunkt senkrecht zur Ebene  $z = 0$  und in Richtung der positiven  $z$ -Axe wirkenden Einzelkraft  $P = \pi c^2 \dot{p}_0$  (unter gewissen Einschränkungen, die durch die Konvergenz der Reihen bedingt sind) zu verwenden sein.

Aus dem Zylinder kann nunmehr durch eine Ebene  $z = h$  eine kreisförmige Platte abgegrenzt werden. Die Spannungen  $\sigma_z'$  und  $\tau'$  werden auf dieser Ebene von Null verschieden sein. Sie werden zum Verschwinden gebracht nach Hinzunahme des weiteren Systems partikulärer Lösungen der Gl. (1)<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \varrho'' &= \sum_{\lambda} \left\{ A \cosh \frac{\lambda z}{a} + B \frac{\lambda z}{a} \cosh \frac{\lambda z}{a} + C \sinh \frac{\lambda z}{a} + D \frac{\lambda z}{a} \sinh \frac{\lambda z}{a} \right\} J_1\left(\frac{\lambda r}{a}\right) \\ \zeta'' &= \sum_{\lambda} \left\{ -A \sinh \frac{\lambda z}{a} + B \left[ (3-4\nu) \cosh \frac{\lambda z}{a} - \frac{\lambda z}{a} \sinh \frac{\lambda z}{a} \right] \right. \\ &\quad \left. - C \cosh \frac{\lambda z}{a} + D \left[ (3-4\nu) \sinh \frac{\lambda z}{a} - \frac{\lambda z}{a} \cosh \frac{\lambda z}{a} \right] \right\} J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

Aus den 4 Bedingungen

$$\begin{aligned} z = 0 \dots \dots 1. \sigma_z'' &= 0 & 2. \tau'' &= 0 \\ \text{und } z = h \dots \dots 3. \sigma_z' + \sigma_z'' &= 0 & 4. \tau' + \tau'' &= 0 \end{aligned}$$

bestimmen sich die 4 von  $\lambda$  abhängigen Festwerte:

$$\begin{aligned} A &= 2(1-\nu) D = 2(1-\nu) K \cdot \frac{\omega^2}{\sinh^2 \omega - \omega^2} \\ C &= (1-2\nu) B = -\frac{1-2\nu}{2} \cdot K \cdot \frac{1 - e^{-2\omega} + 2\omega(1+\omega)}{\sinh^2 \omega - \omega^2} \end{aligned} \quad (18)$$

wo zur Abkürzung  $\omega = \frac{\lambda h}{a}$  gesetzt wurde. Die Bedingungen 1 und 2 drücken aus, dass durch den Spannungszustand  $\zeta'' \varrho'$  keine neuen Spannungen auf der Ebene  $z = 0$  hinzutreten sind, die Bedingungen 3 und 4, dass die Ebene  $z = h$  eine

<sup>1)</sup> Jahnke und Emde, Funktionentafeln, S. 122.

<sup>2)</sup> Die Spannungen, die zu den Verschiebungen  $\varrho' \zeta'$  gehören, werden mit einem, die zu  $\varrho'' \zeta''$  gehörigen mit zwei Strichen bezeichnet.

freie Oberfläche ist. Wegen (14) und (15) ist auf dem Zylindermantel auch  $\zeta'' = 0$ .

Durch den Formänderungszustand

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta' + \zeta'' \\ \varrho &= \varrho' + \varrho'' \end{aligned} \quad (19)$$

sind die axialen und radialen Verschiebungen  $\zeta$  und  $\varrho$  der Punkte einer Kreisplatte gegeben, die 1. auf ihrer (oberen) Seite  $z=0$  durch einen vom Abstand  $r$  abhängigen Druck  $p$  belastet ist, 2. deren (untere) Seite  $z=h$  frei ist, 3. deren axiale Verschiebung auf dem Rande  $r=a$  verschwindet und 4. deren Dicke  $h$  nicht mehr klein im Verhältnis zum Halbmesser  $a$  der Platte zu sein braucht. Ihre Radialspannung  $\sigma_r$  ist im Randzylinder  $r=a$  von Null verschieden.

4. Zusammenhang mit der Kirchhoffschen Plattentheorie.

Die Tatsache, dass die Biegungsspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_z$  in einer dünnen Platte nur von ihrer Krümmung, beziehungsweise von den zweiten Differentialquotienten ihrer Durchbiegung und die Schubspannungen  $\tau$  von einer dritten Ableitung abhängen, findet hier ihren Ausdruck darin, dass der Formänderungszustand der dicken Platte für kleine Werte des Verhältnisses  $h/a$ , der Dicke zum Halbmesser, eine asymptotische Lösung besitzt. Um sie zu erhalten, genügt es, die Grenzwerte der Bestandteile der Reihen, die  $h$  und  $z$  enthalten (das sind die  $A, B, C, D$  und  $\sinh, \cosh \frac{\lambda z}{a}$ ) für kleine Verhältnisse  $h/a$  und  $z/a$  zu bilden. Der Formänderungszustand  $\zeta', \varrho'$  kommt für die asymptotische Lösung nicht in Betracht. Wenn die Platte durch eine Einzelkraft  $P$  verbogen wird, gibt die Ausführung des Grenzüberganges unter Benützung des Wertes von  $K_\lambda^*$  aus Gl. (16a)

$$\zeta'' = \frac{6(1-\nu)Pa^2}{\pi Gh^3} \sum_{\lambda} \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right)}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} \quad (20)$$

Nun ist im Intervall  $0 \leq x \leq 1$

$$\sum_{\lambda} \frac{J_0(\lambda x)}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} = \frac{1}{8}(x^2 \ln x + 1 - x^2) \text{ und speziell } \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} = \frac{1}{8}$$

( $\lambda$  ist eine Wurzel von  $J_0(x) = 0$ , die Summe ist mit den wachsend geordneten Wurzeln  $\lambda$  zu bilden). Ersetzt man hier  $x$  durch  $\frac{r}{a}$  und die Reihe in (20) durch die Funktion, die sie darstellt, so folgt für

$$\zeta'' = \frac{3(1-\nu)Pa^2}{4\pi Gh^3} \left[ \frac{r^2}{a} \ln \frac{r}{a} + 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] \quad (20a)$$

Die asymptotische Lösung der dicken Platte führt in der Tat auf die Formel für die Durchbiegung einer dünnen Kreisplatte zurück, die man aus der Differentialgleichung der verbogenen Platte  $\Delta \Delta \zeta'' = 0$  unter den Randbedingungen  $r=a, \omega=0, \Delta \omega=0$  erhalten haben würde. Der aufgestellten Lösung (19) für die dicke Platte entspricht also asymptotisch die einer in der Mitte durch eine Einzelkraft belasteten dünnen Kreisplatte, deren Radialspannung auf dem Rande  $r=a$

$$\sigma_r'' = -\frac{3(1-\nu)P}{2\pi h^3} \left( \frac{h}{2} - z \right) \quad (21)$$

ist.

5. Die axiale Verschiebung oder die Durchbiegung  $\zeta$  der dicken Platte ist durch (13), (17) und (19) gegeben. Die Punkte, die ursprünglich in der oberen Begrenzungsebene  $z=0$  lagen, verschieben sich um die Strecke

$$\zeta = -(1-\nu) \sum_{\lambda} K_{\lambda} J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right) \left[ 2 + \frac{1 - e^{-2\omega} + 2\omega(1+\omega)}{\sinh^2 \omega - \omega^2} \right] \quad (22)$$

Wenn die Platte durch einen gleichmässigen Druck  $\sigma_z = -p_0$  in einem Kreise  $r=c$  belastet ist, ist die Verschiebung des Mittelpunktes des Druckkreises ( $z=0, r=0$ )

$$\zeta = \frac{(1-\nu)p_0 c}{G} \sum_{\lambda} \frac{J_1\left(\frac{\lambda c}{a}\right)}{\lambda^2 J_1^2(\lambda)} \left[ 2 + \frac{1 - e^{-2\omega} + 2\omega(1+\omega)}{\sinh^2 \omega - \omega^2} \right]$$

Die Durchbiegung der Plattenmitte strebt auf der zweiten (unbelasteten) Seite ( $z=h, r=0$ ) bei starker Konzentration der Last  $P = \pi c^2 p_0$  einem Wert:

$$\zeta = \frac{(1-\nu)P}{\pi a G} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda J_1^2(\lambda)} \cdot \frac{\sinh \omega + \omega \cosh \omega}{\sinh^2 \omega - \omega^2}$$

zu, der grösser ist, als ihr aus der Kirchhoffschen Theorie der Plattenbiegung gemäss (20a) gefolgter Wert, nämlich

$$\zeta^* = \frac{6(1-\nu)Pa^2}{\pi Gh^3} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} = \frac{3(1-\nu)Pa^2}{4\pi Gh^3} \quad (22a)$$

Der Unterschied  $\zeta - \zeta^*$  in den Durchbiegungen macht sich mit zunehmender Dicke der Platte stärker bemerkbar und nimmt mit wachsendem Abstand  $r$  von der Mitte wieder ab. Dass die von einer Einzelkraft hervorgebrachten Einsenkungen in der Umgebung der Angriffstelle grösser sind, als ihre aus der gewöhnlichen Theorie der Plattenbiegung ermittelten Werte, ist eine Folge des starken Anwachsens der Schubspannungen  $\tau$  an diesen Stellen, deren Beiträge zu den Verzerrungen in dieser nicht berücksichtigt sind. Die Abweichungen finden sich experimentell bestätigt in den Versuchen, die A. Föppl mit kreisförmigen<sup>1)</sup> und der Verfasser mit rechteckigen Platten<sup>2)</sup> angestellt haben. Föppl fand anlässlich von vergleichenden Biegungsversuchen, die er mit in der Mitte durch eine Einzelkraft belasteten kreisförmigen Platten und Streifen von rechteckigem Querschnitt machte, die aus gleichen Blechtafeln herausgeschnitten waren, dass sich die Elastizitätszahl  $E$  aus den Plattenversuchen im Mittel um 7% kleiner als aus den Biegungsversuchen mit den Streifen ergab. Zur Berechnung von  $E$  aus den Plattenversuchen diente eine der Gl. (22a) für die frei aufliegende Kreisplatte entsprechende Formel des Biegungspfeils  $\zeta^*$ . Für das Zustandekommen dieses Unterschiedes massgebend scheint der Umstand gewesen zu sein, dass die Durchbiegung der Platte (mit Ausnahme einer Versuchsreihe) in der Mitte und unterhalb der Druckstelle der Last gemessen wurde. Alle Beobachtungen (mit Ausnahme der erwähnten Reihe) enthielten den Einfluss der Schubspannungen. Der Sinn der beobachteten Abweichung beim Elastizitätsmodul entspricht  $\zeta > \zeta^*$ ; trotzdem der mittlere Unterschied grösser war, als er nach den obigen Formeln für die dicksten der dort untersuchten Platten hätte betragen müssen, dürfte sich in ihm der Einfluss der Schubspannungen bemerkbar gemacht haben. Bei den Biegungsversuchen, die ich mit durch Einzelkräfte in den Ecken belasteten bedeutend dickeren quadratischen Platten 1912 gemacht habe, ergaben sich ebenfalls die beobachteten Durchbiegungen grösser, als die berechneten; die Abweichungen nahmen regelmässig zu, wenn die Mess-Stelle näher an die Angriffspunkte der Kräfte gelegt wurde und waren von der zu erwartenden Grössenordnung.

6. Der Verlauf der Spannungen in der Nähe der Druckfläche. Die abgeleiteten Gleichungen ermöglichen den Verlauf der Spannungen in der Platte bis in die Nähe der Druckfläche und in dieser selbst zu verfolgen. Entsprechend den beiden Formänderungszuständen  $\varrho', \zeta'$  und  $\varrho'', \zeta''$  setzen sich die Spannungen der dicken Platte aus zwei Bestandteilen zusammen. Wegen der Unstetigkeit, die im allgemeinen der Verlauf der Normalspannung  $\sigma_z$  in der Ebene  $z=0$  auf dem Rande des Druckkreises aufweist, empfiehlt es sich, die Spannungen für die beiden Lösungen in dieser Ebene getrennt anzugeben. Ähnlich wie sich die Radialverschiebung  $\varrho$  in Gl. (8) aus (3) und (5) ergab, wird jetzt  $\varrho'$  aus den Gl. (13) und (15) gleich

$$z = 0 \dots \dots \varrho' = -\frac{1-2\nu}{Ga} \int_0^r p n dn \sum_{\lambda} \frac{J_1\left(\frac{\lambda r}{a}\right) J_0\left(\frac{\lambda n}{a}\right)}{\lambda J_1^2(\lambda)}$$

gefunden. Nun stellt die Summe

$$\frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \frac{J_1\left(\frac{\lambda r}{a}\right) J_0\left(\frac{\lambda n}{a}\right)}{\lambda J_1^2(\lambda)} \begin{cases} = 1 & \text{wenn } 0 < n < r \\ = 0 & \text{,, } r < n < a \end{cases}$$

ähnlich wie Gl. (9) einen „diskontinuierlichen Faktor“ dar, und es ist

$$\varrho' = -\frac{1-2\nu}{2Gr} \int_0^r p n dn$$

<sup>1)</sup> Mitt. d. mech.-techn. Laboratoriums München, 1900.

<sup>2)</sup> Mitt. ü. Forschungsarbeiten Heft 170, 1911



Ferner ist für  $z = 0$

$$e' = -\frac{1-2\nu}{G} \cdot p$$

Der Vergleich der vorstehenden Formeln mit den Gl. (6) und (10) zeigt, dass die Spannungen des Zylinders und die des eingangs betrachteten, durch eine Ebene begrenzten unendlich ausgedehnten Körpers in der Ebene  $z = 0$  gleich sind. Die Spannungen der ersten Lösung  $\zeta' \varrho'$  in der Ebene  $z = 0$  sind also bereits durch die Formeln (12) oder durch

$$\sigma_z' = -p, \quad \sigma_r' = -p + \frac{1-2\nu}{2} \bar{p}, \\ \sigma_t' = -2\nu p - \frac{1-2\nu}{2} \bar{p}, \quad \tau' = 0 \quad (23)$$

dargestellt. Wenn die Druckfläche im Verhältnis zur Dicke der Platte klein ist (sodass  $K_\lambda$  nach (16a) durch  $K_\lambda^*$  ersetzt werden kann), berechnen sich die Spannungen der zweiten Lösung für  $r = 0$  zu

$$\sigma_z'' = 0, \quad \sigma_r'' = \sigma_t'' = -\frac{(1+\nu)P}{\pi a^2} \sum_{\lambda} \frac{\omega^2}{J_1^2(\lambda) (\sinh^2 \omega - \omega^2)}, \quad \tau = 0 \quad (24)$$

Die Summen  $\sigma' + \sigma''$  sind also die resultierenden Spannungen innerhalb und in der nächsten Umgebung der Druckfläche.

Auf der unteren Seite  $z = h$  der Platte ist die Trennung der beiden Spannungszustände wegen des stetigen Verlaufes der Spannungen in dieser Ebene nicht erforderlich; die grössten resultierenden Spannungen treten hier in der Mitte ( $z = h, r = 0$ ) auf und sind gleich

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{P\nu}{\pi a^2} \sum_{\lambda} \frac{\omega \sinh \omega}{J_1^2(\lambda) (\sinh^2 \omega - \omega^2)} \quad (25)$$

$\sigma_z$  und  $\tau$  sind hier Null. In dieser und in der vorletzten Gleichung wurde, wie schon erwähnt, für  $K_\lambda$  der Grenzwert  $K_\lambda^*$  aus (16a) genommen. Physikalisch bedeutet dies, dass die Spannungen in der Ebene  $z = h$ , die von der wahren Verteilung des Druckes  $p$  herrühren, durch die Spannungen ersetzt wurden, die von einer im Punkte

$z = r = 0$  konzentrierten Kraft  $P = 2\pi \int_0^c p r dr$  erzeugt werden.

Die Formeln (24), (25) gelten also für die Beanspruchung von Platten durch stark konzentrierte Kräfte, genauer gesagt, wenn die Abmessungen des Druckkreises selbst im Verhältnis zur Dicke der Platte klein sind.

Es ist kaum notwendig, zu erwähnen, dass die abgeleiteten Formeln für die Spannungen von den speziellen Bedingungen unabhängig gemacht werden können, die der Lösung  $\zeta = \zeta' + \zeta''$  hinsichtlich der Radialspannungen  $\sigma_r$  auf dem Umfang  $r = a$  der Platte auferlegt wurden. Es genügt, zu diesem Zweck von den resultierenden Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  die der asymptotischen Lösung  $\sigma_r^*$  und  $\sigma_t^*$ , die zu der selben Druckverteilung  $p = f(r)$  und zu den gleichen Randbedingungen auf dem Kreisumfang  $r = a$  gehört, in Abzug zu bringen. (Die asymptotische Lösung genügt also innerhalb des belasteten Teiles der Oberfläche der Gleichung

$\Delta \Delta \zeta^* = \frac{p}{N}$ , wo  $p$  den Druck und  $N$  die Plattenziffer bezeichnen, und ausserhalb der Gleichung  $\Delta \Delta \zeta^* = 0$ , ausserdem den Grenzbedingungen auf dem äusseren Rand und gewissen Stetigkeitsbedingungen auf der Randkurve des Druckgebietes.) Für die so erhaltenen Differenzen

$$\sigma - \sigma^*$$

kann passend die Bezeichnung „Störungsspannungen“ gebraucht werden.<sup>1)</sup> Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass die beiden Formänderungs- und Spannungszustände  $\zeta, \varrho$  und  $\zeta^*, \varrho^*$  in dünnen Platten sich von einander nur in der Umgebung der Druckfläche unterscheiden. Die in der Nähe der Angriffstelle der Kraft vorhandenen Störungsspannungen sind demzufolge in einer solchen Platte praktisch von der Gestalt ihrer Randkurve und den Grenzbedingungen, die ihr auf der letzteren auferlegt sind, unabhängig. Sie hängen lediglich von der Art der Verteilung

<sup>1)</sup> Oertlich schnell abklingende Spannungszustände hat *Boussinesq* «perturbations locales» genannt.

des Druckes  $p$  (von der Funktion  $p = f(x, y)$ ) und vom Verhältnis der linearen Abmessungen der Druckfläche zur Dicke der Platte ab.

**Zusammenfassung.** Die Biegungsbeanspruchung von Platten durch Einzelkräfte wurde in der Umgebung der Druckfläche und in dieser selbst für die kreissymmetrische Druckverteilung am Spannungszustand einer durch eine Einzelkraft verbogenen dicken kreisförmigen Platte ermittelt. Die berechnete Korrektur des Biegungspfeils einer durch Einzelkraft belasteten Kreisplatte findet in Plattenversuchen ihre Bestätigung.

## Von den Erweiterungsbauten der Technischen Hochschule München.

Im Jahre 1918 konnte die Technische Hochschule in München auf ihr fünfzigjähriges Bestehen zurückblicken. Wie aus dem gleichen Anlass unsere E. T. H. 1905 ihre zweibändige Festschrift geschichtlichen Inhalts herausgab, so tat auch die Münchener Technische Hochschule, nur nach Form und Inhalt etwas abweichend. Sie wählte ihre bauliche Entwicklung zum Gegenstand einer „Denkschrift zur Feier ihres 50-jährigen Bestehens“, eines gross angelegten Tafelwerkes, das durch die graphische Kunstanstalt F. Bruckmann A.-G. in München in höchst gediegener Ausstattung (Format  $40 \times 52$  cm), aber in beschränkter Auflage hergestellt worden ist. Das Syndikat der Technischen Hochschule München hatte die Liebeshwürdigkeit, uns ein Exemplar dieser im Buchhandel nicht erhältlichen Denkschrift zu überreichen<sup>1)</sup> mit der Ermächtigung, über deren Inhalt nach freiem Ermessen in unserem Blatte zu verfügen. Wir tun dies, indem wir aus dem reichen Inhalt als Beispiel eines der in Wort, Bild und Plänen umfassend dargestellten „Institute“ der Hochschule herausgreifen, d. h. nur einige der betreffenden Bilder und Pläne in verkleinertem Masstab unsern Lesern hier vorführen; unsere bezüglichen nach den prächtigen Lichtdruck-Tafeln angefertigten Bildstöcke sind Zinkätzungen der gleichen Kunst-Anstalt F. Bruckmann.

Der Inhalt der Denkschrift umfasst, ausser einer baugeschichtlichen Einleitung, folgende Abschnitte: I. Die Zentrale für Heizung, Beleuchtung und Stromabgabe und das Laboratorium für Wärmekraftmaschinen, samt Prüfstand für Kraftwagen. — II. Das Hydraulische Institut mit der hydrometrischen Prüfungsanstalt. — III. Das Laboratorium für technische Physik (zur Prüfung u. a. von Wärmeisierungen und Schalluntersuchungen, wovon kürzlich anlässlich der Ausstellung „Baustoffe-Bauweisen“ hier die Rede war); das Mechanisch-technische Laboratorium; die Bibliothek der Techn. Hochschule. — IV. Die Flügelbauten an der Gabelsberger- und Luisenstrasse (im Hintergrund nebenstehender Abbildung 1, mit dem Turm), enthaltend verschiedene Laboratorien und kleinere Institute, Architektur- und Baustoff-Sammlung und Zeichensäle. Die unter I. und II. genannten Institute sind mit dem Laboratorium für Technische Physik in einem besondern Bau von rund  $40 \times 70$  m Grundfläche untergebracht, dessen östliche Querflügel-Front Abbildung 2 zeigt.

Die Ausführung der in dieser Denkschrift beschriebenen Neu- und Umbauten erfolgte, nach dreijähriger Projektierungszeit, zur Hauptsache in den Jahren 1910 bis 1913, während die mit der Umgruppierung verbundenen Umbauarbeiten sich, durch den Krieg gehemmt, bis 1916 hinzogen. Sie standen unter der architektonischen Leitung von Prof. Dr. Friedrich v. Thiersch, der selbst auch in konstruktiver Hinsicht interessante Einzelheiten mitteilt. Für die Kosten der Erweiterungsbauten war ein Gesamtbetrag von  $5\frac{1}{2}$  Mill. Mark zur Verfügung gestellt worden. Es gelang, die Summe der bewilligten Mittel einzuhalten, obwohl die Bautätigkeit in die Kriegsjahre hineinreichte.

<sup>1)</sup> Wir stellen die Denkschrift auf dem Bureau der G. e. P. zur Verfügung unserer Kollegen; sie kann überdies auch auf der Bibliothek der E. T. H. eingesehen werden.