

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 73/74 (1919)
Heft: 13

Artikel: Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangentriebes
Autor: Müller, Karl E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35690>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangentriebes. — Wettbewerb für die Röstbrücke in Solothurn. — Association internationale des chemins de fer. — Von der XXXV. Generalversammlung und dem fünfzigjährigen Jubiläum der G. e. P. in Luzern. — Schweizerischer Verband zur Förderung des gemeinnützigen Wohnungsbaues (SVW). — Miscellanea: Der Schweizerische Elektrotechnische Verein. Die

50 000. Lokomotive der Baldwin-Werke. Zum 80. Geburtstag von Dr. h. c. H. Dietler. Ausbau der Bündner Kraftwerke. — Konkurrenzen: Wohnkolonie im Feldli und ländliche Siedlung im Zielgute St. Gallen. Bebauungsplan Kriens. Ueberbauung des Obmannamt-Areals in Zürich. — Vereinsnachrichten: Gesellschaft ehemaliger Studierender: Protokoll; Stellenvermittlung.

Band 74. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 13.

Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangentriebes.

Von Dr. Karl E. Müller, Ingenieur, Zürich.

(Fortsetzung von Seite 144.)

2. Die Resonanzschwingung.

Sobald innerhalb eines Instabilitätsgebietes die relative Schwingung der beiden Massen grosse Amplituden erreicht, ist die Voraussetzung eines *spielfreien* Kuppelstangentriebes unzulässig. Das *Lagerspiel* bewirkt, dass die kraftschlüssige Verbindung der beiden Massen zeitweise aufhört und bringt Unstetigkeiten in den Vorgang hinein, die die mathematische Behandlung erschweren. Nicht nur ist ψ jetzt eine unstetige Funktion, sondern es sind auch die Grenzen der Stetigkeitsintervalle mit der Amplitude der Schwingung veränderlich. Um jedoch die Besonderheiten der Schüttelgebiete im Einklang mit den Versuchen beschreiben zu können, genügt es, das in Abbildung 3 dargestellte einfache mechanische Modell des Vorganges zu betrachten. Es stellt die der gleichförmigen Rotation der Massen überlagerte Bewegung als gradlinige Schwingung eines Massenpunktes dar.

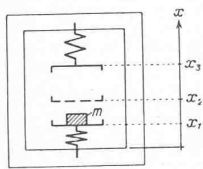


Abb. 3.

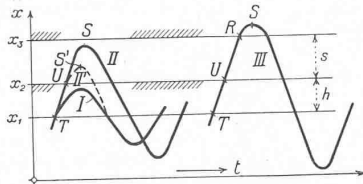


Abb. 4.

Zwei masselose Schalen sind mittels ebensolchen Federn an einem starr gelagerten Rahmen befestigt. Bei weggemommener Masse m ist die Lage der Schalen durch die Koordinate x_2 , bzw. x_3 gegeben. Nach Hinlegen der Masse m drückt deren Eigengewicht $G = m \cdot g$ die untere Schale auf die Kote x_1 ; dies ist die Ruhelage des Systems. Die Zusammendrückbarkeit der Feder ist durch eine Konstante b bestimmt, sodass

$$G = b(x_2 - x_1)$$

Solange m die untere Schale nicht verlässt, gilt die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b x + b x_2 - G$$

woraus

$$x = x_1 + A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{b}{m}} \cdot t - \alpha\right)$$

Es sei für $t = 0$: $x = x_1$, sodass $\alpha = 0$ wird. Eine solche Schwingung zeigt Kurve I in Abbildung 4. Sobald $x > x_2$, verlässt m zeitweise die untere Schale und fliegt frei in den Zwischenraum; beim Zurückfallen geht der Vorgang auf der Schale weiter, die Dauer einer Schwingung ist aber länger geworden.¹⁾ Für die Schwingung nach Kurve I erhält man leicht die Schwingungsdauer zu:

$$\vartheta = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{b}}$$

ferner die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{m}{b}} \arccos \sqrt{\frac{mbv^2}{b^2 A^2}}$$

Es gilt der arccos zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, wenn v die momentane Geschwindigkeit, t die seit dem

¹⁾ In Wirklichkeit tritt noch ein Stossverlust ein, der die Schwingungsdauer noch etwas verlängert.

Punkt T in Abb. 4 abgelaufene Zeit bedeutet. Ferner gilt

$$mbv_T^2 = b^2 A^2$$

$$mbv_U^2 = b^2 A^2 - G^2$$

wo v_T und v_U die Geschwindigkeiten in den Punkten T und U der Bahn bezeichnen.

Zur Abkürzung führen wir noch ein:

$$\eta = \frac{A}{x_2 - x_1} = \frac{A}{h} = \frac{A \cdot b}{G} = \xi \cdot \zeta$$

$$\zeta = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{s}{h} = \frac{s \cdot b}{G}$$

$$\xi = \frac{A}{s}$$

1. Schwingungsdauer ϑ^* , wenn m die obere Schale nicht erreicht (Kurve II).

Wir finden ϑ^* durch Addition der einzelnen Zeiten τ , die der Punkt zum Durchlaufen der einzelnen Kurvenstücke braucht.

Von T bis U : $\tau_1 = \sqrt{\frac{m}{b}} \arcsin \frac{1}{\eta}$

Von U bis S : $\tau_2 = \frac{m}{G} \cdot v_U$

Ganze Schwingungsdauer:

$$\vartheta^* = \frac{1}{2} \vartheta + 2(\tau_1 + \tau_2)$$

$$\vartheta^* = \vartheta \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{\eta^2 - 1} - \arccos \frac{1}{\eta} \right] \right\} \quad (21)$$

2. Schwingungsdauer ϑ^* , wenn m die obere Schale erreicht (Kurve III).

Von T bis U : $\tau_1 = \sqrt{\frac{m}{b}} \arcsin \frac{1}{\eta}$

Von U bis R : $\tau_2 = \frac{m}{G} (v_U - v_R) = \sqrt{\frac{m}{b}} \left[\sqrt{\eta^2 - 1} - \sqrt{\eta^2 - 1 - 2\zeta} \right]$

Von R bis S : $\tau_3 = \sqrt{\frac{m}{b}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 2\zeta}} \right\}$

$$\vartheta^* = \vartheta \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{\eta^2 - 1} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\eta^2 - 1 - 2\zeta} \right] + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{\eta^2 - 1} - \sqrt{\eta^2 - 1 - 2\zeta}}{\eta \cdot \sqrt{\eta^2 - 2\zeta}} \right\} \quad (22)$$

Die Annahme einer Schwerkraft in unserem Beispiel bedeutet eine Belastung des Kuppelstangentriebes mit konstantem Drehmoment. Ist $G = 0$ und trotzdem eine Schüttelschwingung vorhanden, so gilt $v_U = v_R = v_T$ und die Schwingungsdauer beträgt

$$\vartheta^* = \vartheta + 2 \frac{s}{v_T} = \vartheta \left\{ 1 + \frac{s}{\pi A} \right\} \quad (23)$$

Die gewonnenen Beziehungen (21), (22) und (23) benützen wir, um in Abb. 5 (S. 156) das Verhältnis $\frac{\vartheta^*}{\vartheta}$ über der Abszisse ξ aufzutragen; diese bedeutet im wesentlichen die Amplitude der Resonanzschwingung. ξ ist dem übertragenen mittleren Drehmoment umgekehrt proportional, also im idealen Leerlauf ∞ . Die aufsteigenden Aeste der Kurven entsprechen den Schwingungen nach Kurve II, die abfallenden asymptotischen nach Kurve III, der eigentlichen Resonanzschwingung.

Bei der Uebertragung dieser Resultate auf den Kuppelstangentrieb bedeutet also m die eine Masse, während die zweite Masse durch den Rahmen, an dem die Federn befestigt sind, dargestellt wird. Zunächst müssen wir allerdings daran festhalten, dass auf irgend eine Weise der

finden, wird die Annahme gemacht, dass die gekuppelten Achsen gleichförmig rotieren, dagegen wird für das Getriebe zwischen Motor und Radsatz das übertragene Drehmoment konstant gesetzt. Diese Annahme wurde auch von G. M. Eaton¹⁾ in einer eingehenden Untersuchung der Beanspruchungs- und Abnutzungsverhältnisse an drei Typen von Lokomotiven mit Gestellmotoren gemacht. Dass so gewonnene Resultate unrichtig sein müssen, soll nachfolgende angenäherte Betrachtung darlegen.

In einem symmetrischen, mit Lagerspiel behafteten Getriebe nach Abbildung 1 seien nur die Stangen merklich deformierbar. Das Stangenlager mit übertrieben gezeichnetem Spiel sei in Abbildung 7 dargestellt. Das Spiel zwischen Zapfen und Schale ist im Ruhezustand allseitig $\frac{a}{2}$ und gibt im Betrieb Anlass zu einer Voreilung der treibenden Welle um

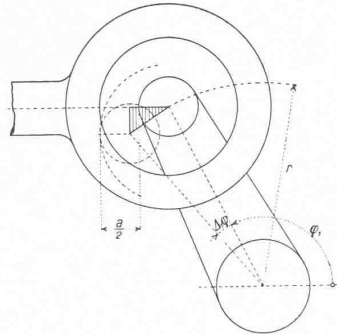


Abbildung 7.

$$\Delta \varphi = \frac{a}{2r \sin \varphi_1}$$

Wir nennen $\varphi_a = \frac{a}{r}$ den „Spielwinkel“; mit Berücksichtigung von Gl. (1a) gilt

$$\varphi_5 - \varphi_6 = \frac{\gamma_1 D_1}{\sin^2 \varphi_1} \pm \frac{\varphi_a}{\sin \varphi_1} + \beta_3 (D_1 + D_3)$$

$$\varphi_5 - \varphi_6 = \frac{\gamma_2 D_2}{\cos^2 \varphi_1} \pm \frac{\varphi_a}{\cos \varphi_1} + \beta_3 (D_1 + D_3)$$

Das Doppelzeichen des zweiten Gliedes ist des Zeichenwechsels im Nenner wegen nötig, da das Spiel die Voreilung beständig vergrößert. Wir benützen künftig nur das positive Vorzeichen, da wir nur den ersten Quadranten eines Umlaufes betrachten. Sind beide Stangen im Eingriff, so muss die Voreilung über beide Getriebeseiten gemessen gleich sein, woraus folgt

$\varphi_5 - \varphi_6 = \gamma (D_1 + D_3) + \beta_3 (D_1 + D_3) + \varphi_a (\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)$
 Nun suchen wir $\varphi_5 - \varphi_6$ für ein totales Drehmoment M und erhalten

a) für den Eingriff beider Stangen

$$\varphi_5 - \varphi_6 = (\gamma + \beta_3) \cdot M + \varphi_a (\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1)$$

b) für den Eingriff der hintern Stange

$$\varphi_5 - \varphi_6 = \beta_3 M + \frac{\gamma M}{\cos^2 \varphi_1} + \frac{\varphi_a}{\cos \varphi_1}$$

Durch eine graphische Darstellung von $\varphi_5 - \varphi_6$ überzeugt man sich, dass Amplituden und wesentlicher Verlauf dieser Kurvenzüge durch folgenden analytischen Ausdruck angenähert dargestellt werden:

$$\varphi_5 - \varphi_6 = (\gamma + \beta_3) M + 0,207 (1 - \cos 4 \varphi_1) \varphi_a$$

Da das frühere ψ^* hier den Wert

$$\psi^* = \frac{1}{\gamma + \beta_3} = \text{konst.}$$

annimmt, hat man es der Annäherung zufolge mit einer gewöhnlichen erzwungenen Schwingung zu tun. Es gilt wieder genügend genau $\cos 4 \varphi_1 = \cos 4 \omega t$ und somit ist nach zweimaligem Differenzieren

$$\varphi_5'' - \varphi_6'' = (\gamma + \beta_3) M'' + 16 \omega^2 \cdot \varphi_a \cdot 0,207 \cdot \cos 4 \omega t$$

Mit Berücksichtigung von Gl. (2) folgt

$$M'' (\gamma + \beta_3) + M \left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) = \frac{T}{\theta_1} + \frac{W}{\theta_2} - 16 \omega^2 \varphi_a 0,207 \cos 4 \omega t$$

Unter Annahme $T = W = \text{konstant}$ ergibt die Integration

¹⁾ G. M. Eaton, The mechanical Problem of the electric Locomotive, Transactions of the international Engineering Congress 1915.

$$M = T + \frac{0,207 \cdot \varphi_a \cdot k \cdot \cos 4 \omega t}{(\gamma + \beta_3) (k - 1)} + C \cos (\omega_0 t + \delta)$$

$$\text{worin } k = \frac{16 \omega^2}{\omega_0^2} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{(\gamma + \beta_3) \theta_1 \theta_2}$$

Für $k = 1$ ist offenbar Resonanz; die kritische Drehzahl ergibt sich also zu

$$\frac{30}{\pi} \cdot \omega = \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{30}{\pi}$$

Die mit den Integrationskonstanten C und δ auftretende Eigenschwingung vernachlässigen wir am besten ganz. Wir wissen nach Früherem ohnehin, dass sie nur an den Grenzen der Instabilitätsgebiete (die hier infolge der Näherung verloren gehen) streng periodisch und von grossem Ausschlag ist. Dann kann man eine „Schwankung des Drehmomentes“ definieren:

$$\Delta M = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{M_{\max} + M_{\min}} = \frac{0,207 \cdot \varphi_a}{(\gamma + \beta_3) \cdot T} \cdot \frac{k}{k - 1}$$

Für $y = \varphi_5 - \varphi_6$ kann eine ähnliche Differential-Gleichung gefunden werden:

$$y'' + \omega_0^2 y = T \left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) + \omega_0^2 \cdot 0,207 \cdot \varphi_a (1 - \cos 4 \omega t)$$

Nach erfolgter Integration erhält man analog eine „Schwankung der Voreilung“

$$\Delta \varphi = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{y_{\max} + y_{\min}} = \frac{0,207 \cdot \varphi_a}{0,207 \varphi_a + (\gamma + \beta_3) T} \cdot \frac{1}{1 - k}$$

Trägt man sich die Schwankungen ΔM und $\Delta \varphi$ auf, so erkennt man, dass die eine oberhalb, die andere unterhalb der kritischen Drehzahl überwiegt. Die Grenzwerte sind:

$$\omega < \frac{\omega_0}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta M = 0 \\ \Delta \varphi = \frac{0,207 \varphi_a}{0,207 \varphi_a + (\gamma + \beta_3) T} \end{array} \right.$$

$$\omega > \frac{\omega_0}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta M = \frac{0,207 \cdot \varphi_a}{(\gamma + \beta_3) T} \\ \Delta \varphi = 0 \end{array} \right.$$

Wir bestimmen jetzt für zwei Betriebszustände, unterhalb und oberhalb $\frac{\omega_0}{4}$, den Verlauf der Stangenkräfte:

I. Es sei unterhalb der kritischen Drehzahl

$$k = 0,6; \quad \frac{T(\gamma + \beta_3)}{\varphi_a} \cong 0,7, \quad \text{woraus } \Delta M = -0,44$$

$$\text{und } \frac{(\gamma + \beta_3) T}{\varphi_a} = 0,7 \mp 0,3$$

II. Es sei oberhalb der kritischen Drehzahl

$$k = 3; \quad \frac{T(\gamma + \beta_3)}{\varphi_a} \cong 0,7, \quad \text{woraus } \Delta M = +0,44$$

$$\text{und } \frac{(\gamma + \beta_3) T}{\varphi_a} = 0,7 \pm 0,3$$

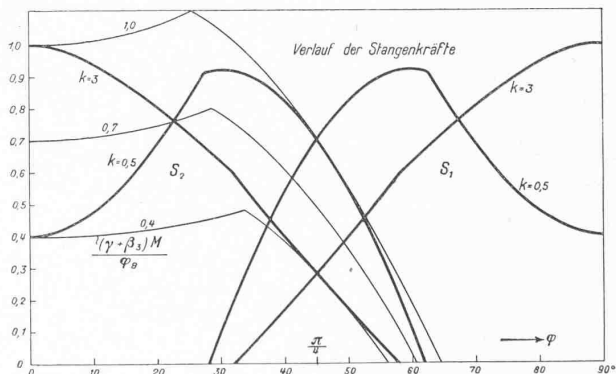
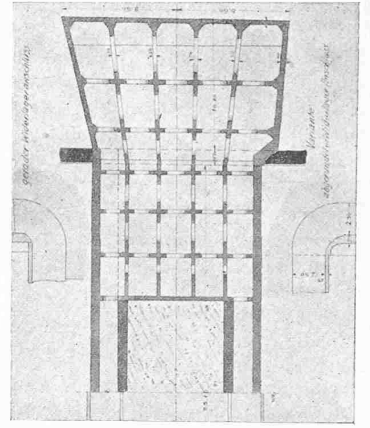
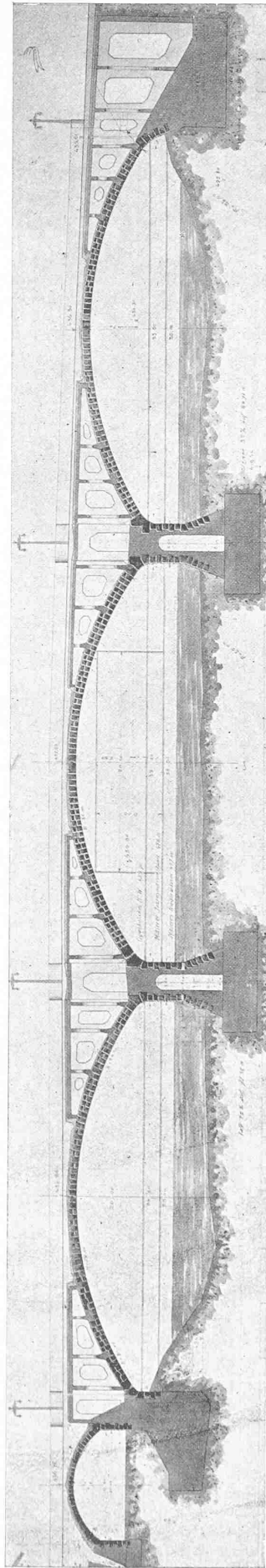
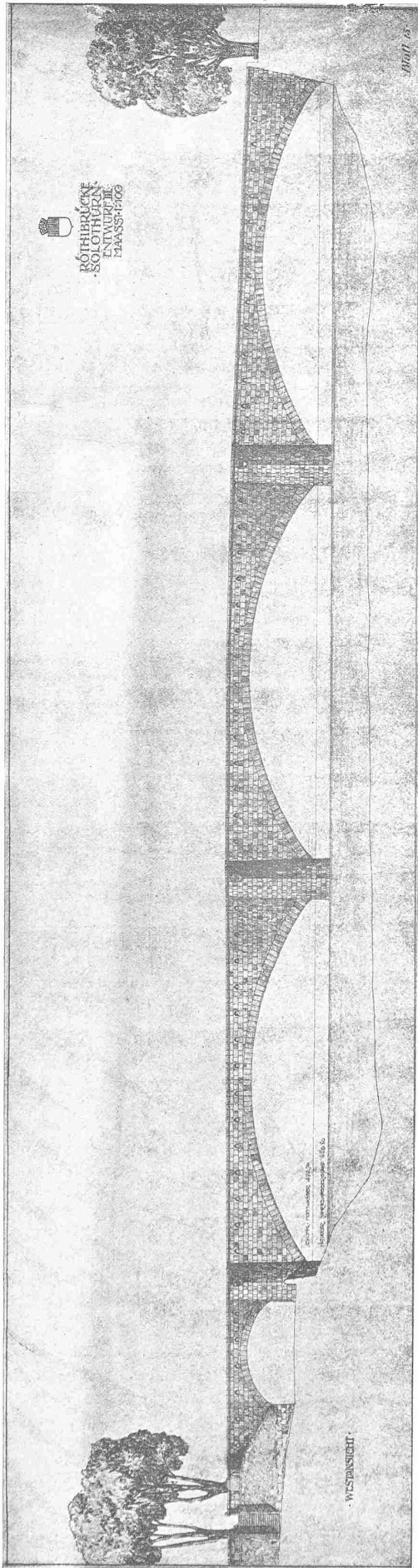


Abbildung 8.

Die Schwankung ist also für beide Betriebszustände absolut genommen dieselbe. In Abbildung 8 sind nun die Stangenkräfte dargestellt. Die Abbildung wurde erhalten, indem für drei konstante Drehmomente, die dem maximalen, mittleren und minimalen entsprechen, nach statischer Berechnung der Verlauf der hinteren Stangenkraft eingetragen wurde; aus dem bekannten zeitlichen Verlauf des Gesamtdrehmomentes sind dann die wirklichen Kräfte interpoliert worden. Es ist bemerkenswert, dass für die gewählten



II. Preis, Entwurf Nr. 1. — Verfasser: Ing. M. Schnyder (Burgdorf), Arch. Saritsberg (Berlin) und Arch.-Bureau Stuler & Amstein (Solothurn). — Ansicht 1 : 530, Längsschnitt und Horizontalschnitt über Widerlager rechts 1 : 500.

Verhältnisse die maximalen Beanspruchungen ungefähr die gleichen sind für beide Betriebszustände, der zeitliche Verlauf hingegen ein ganz verschiedener ist. Im einen Fall, der sich den Kurvenbildern von *L'Hoest*¹⁾ nähert, erfolgt der Eingriff der zweiten Stange nahezu ohne Unstetigkeit ($k = 3$). Es ist zu beachten, dass hier ein ziemlich grosses Drehmoment angenommen wurde. Bei höherer Drehzahl ist dieses jedoch bei Lokomotiven relativ klein; hätten wir $\frac{(\gamma + \beta_3)T}{\varphi_a} < 0,3$, so wären die

Kurven S_1 und S_2 für $k = 3$ so weit auseinander gerückt, dass in der Tat zeitweise überhaupt keine Stange in Eingriff käme. Da neuerdings mehrfach empfohlen wurde, die kritischen Drehzahlen durch geeignete Konstruktion möglichst tief zu legen, wäre unsere Bedingung eines Betriebszustandes oberhalb der kritischen Drehzahl häufig erfüllt. Eine Kenntnis der kritischen Drehzahlen erscheint also auch mit Rücksicht auf die Arbeitsweise des Kuppelstangentriebes wünschenswert. Je nachdem der zu untersuchende Betriebszustand oberhalb oder unterhalb der kritischen Drehzahl liegt, liefert die Annahme $\Delta\varphi = 0$, bzw. $\Delta M = 0$ eine erste Annäherung. Bei Lagerspiel erscheinen zu meist nur Schüttelgebiete bei $\frac{\omega_0}{2}$ und $\frac{\omega_0}{4}$; genauer ist daher zu sagen: $\Delta\varphi = 0$ gilt angenähert für Drehzahlen wesentlich oberhalb des zweifachen, $\Delta M = 0$ für Drehzahlen wesentlich unterhalb des vierfachen Schüttelgebietes. Nur in letzterem Fall stellt die statische Berechnung eine zulässige Näherung dar.

(Schluss folgt.)

¹⁾ G. L'Hoest, Note sur le fonctionnement des bielles d'accouplement, Bulletin des Internat. Eisenbahnkongressverbandes 1912, Bd. XXVI, S. 889 bis 902.