

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 73/74 (1919)
Heft: 12

Artikel: Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangentriebes
Autor: Müller, Karl E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35688>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INHALT: Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangentriebes. — Wettbewerb für die Röti-brücke in Solothurn. — Die Holzfeuerung der Lokomotiven. — Wettbewerb zur Ueberbauung des Obmannamt-Areals in Zürich. — Miscellanea: Mustergruppe von Kleinwohnhäusern in Zürich. — Elektrifizierung der Berliner Stadt-, Ring- und Vorort-Bahnen. Eine Ausstellung für Kleinwohnungsbau und Siedlungswesen. — Elektrifizierung der Arlbergbahn. Denzler-Stiftung. Die Ausstellung für Friedhofskunst

in Lausanne. — Konkurrenzen: Eisenbahnbrücke bei den Arsta-Inseln in Stockholm. Dekorativer Schmuck für den Museum-Neubau in St. Gallen. Grundsatzwidriger Wettbewerb. — Preisauftschreiben. Preisfragen der Schläfli-Stiftung. — Vereins-nachrichten: Bündnerischer Ingenieur- und Architekten-Verein. Gesellschaft ehem. Studierender: Geschäftsbericht des Generalsekretärs; Protokoll der XXXV. Generalversammlung mit 50-jähr. Jubiläum der G. e. P.; Stellenvermittlung.

Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangentriebes.

Von Dr. Karl E. Müller, Ingenieur, Zürich.

Das vorliegende Problem und seine Wichtigkeit für den Bau elektrischer Lokomotiven ist den Lesern dieser Zeitschrift durch verschiedene Aufsätze von Prof. Dr. W. Kummer¹⁾ bekannt, der auch die Untersuchungen, über die hier berichtet werden soll, angeregt hat. Es handelt sich um die Vorausbestimmung von Bereichen von gefährlichen Drehzahlen („Schüttelgebieten“), die an Parallel-Kurbelgetrieben oder Kuppelstangentrieben elektrischer Lokomotiven beobachtet wurden. Die gleichen Erscheinungen zeigte ein Versuchmodell, das die A.-G. Brown, Boveri & Cie. in Baden gebaut hat und das von J. Buchli²⁾ in qualitativer Hinsicht untersucht wurde. Die Firma war so freundlich, uns dieses Modell zwecks Vornahme von quantitativen Versuchen zur Verfügung zu stellen. Mit Rücksicht darauf musste die Theorie von Kummer verallgemeinert werden; dies führt auf Schwingungen eines Systems mit zeitlich veränderlicher Elastizität, für deren Behandlung E. Meissner³⁾ die nötige mathematische Belehrung gegeben hat. Der nachfolgende erste Abschnitt der theoretischen Entwicklungen, die wir der Mitteilung der Versuchsergebnisse vorausschicken, dürfte daher als technisches Beispiel für solche Schwingungen auch allgemeineres Interesse beanspruchen.

1. Die Instabilitätsgebiete des spielfreien Kuppelstangentriebes.

a) Ableitung der Differentialgleichung.

Wir betrachten zwei starre Massen mit den Trägheitsmomenten Θ_1 und Θ_2 (Abbildung 1), die federnd auf den als starr und spielfrei gelagert angenommenen elastischen Wellen befestigt sind. Jede Welle trägt zwei Kurbeln, die in spannungsfreiem Zustand des Getriebes um 90° gegenüber versetzt sind. Die verbindenden Stangen sollen massenlos (wie auch die Wellen) und deformierbar sein.

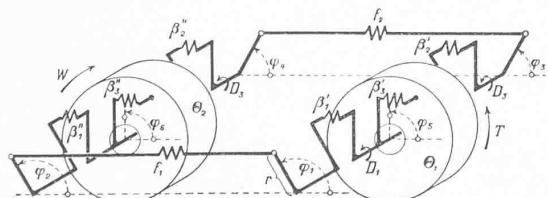


Abbildung 1.

Die elastische Deformierbarkeit ist in der Abbildung durch Federn schematisch angedeutet. Im Ruhezustand soll sein:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_5 = \varphi_6; \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$$

Ein treibendes Drehmoment T , an Θ_1 angreifend, dem im Stillstand ein widerstehendes, an Θ_2 angreifendes Drehmoment W das Gleichgewicht hält, deformiert nun die Konstruktionsteile folgendermassen:

¹⁾ Vergl. deren Zusammenfassung in Bd. LXVI, Seite 68 (7. Aug. 1915).

²⁾ J. Buchli, Studien über den Kuppelstangenantrieb bei elektrischen Lokomotiven E. T. Z. 1914, Seite 612; im Auszug wiedergegeben in Bd. LXIV, Seite 136 der „Schweiz. Bauzeitung“ (19. Sept. 1914).

³⁾ E. Meissner. Ueber Schüttlerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität. „Schweiz. Bauzeitung“, Band 72, 1918, Seite 95 bis 98.

Θ_1 eilt der Welle vor um $T \cdot \beta_3' = (D_1 + D_3) \cdot \beta_3'$ die Welle eilt Θ_2 vor um $T \cdot \beta_3'' = (D_1 + D_3) \cdot \beta_3''$ Verdrehung der vorderen Wellenstücke: $D_1 \beta_1'$ bzw. $D_1 \beta_1''$ Verdrehung der hinteren Wellenstücke: $D_3 \beta_2'$ bzw. $D_3 \beta_2''$ D_1 und D_3 bestimmen die Verteilung des Gesamtdrehmomentes auf die beiden Getriebehälften; es gilt stets

$$D_1 + D_3 = T$$

im Stillstand. Ferner bedeuten die Elastizitätskonstanten β die im Bogenmass ausgedrückte elastische Verdrehung der betreffenden Konstruktionsteile für ein Drehmoment 1 cmkg . Die Stangenkräfte S_1 und S_2 verlängern die Stangen um

$$\Delta l_1 = f_1 \cdot S_1 \text{ und } \Delta l_2 = f_2 \cdot S_2,$$

wodurch die Größen f definiert sind. Da ferner, wenn r den Kurbelradius bezeichnet, die Beziehungen bestehen:

$$D_1 = S_1 \cdot r \cdot \sin \varphi_1; D_3 = S_2 \cdot r \cdot \sin \varphi_3$$

so wird

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\Delta l_1}{r \sin \varphi_1} = \frac{D_1 \cdot f_1}{r^2 \sin^2 \varphi_1} = \frac{D_1 \cdot \gamma_1}{\sin^2 \varphi_1} \\ \varphi_3 - \varphi_4 &= \frac{\Delta l_2}{r \sin \varphi_3} = \frac{D_3 \cdot f_2}{r^2 \sin^2 \varphi_3} = \frac{D_3 \cdot \gamma_2}{\sin^2 \varphi_3} \\ \varphi_5 - \varphi_1 &= (D_1 + D_3) \beta_3' + D_1 \beta_1' \\ -\frac{\pi}{2} + \varphi_5 - \varphi_3 &= (D_1 + D_3) \beta_3' + D_3 \beta_2' \\ \varphi_2 - \varphi_6 &= (D_1 + D_3) \beta_3'' + D_1 \beta_1'' \\ +\frac{\pi}{2} + \varphi_4 - \varphi_6 &= (D_1 + D_3) \beta_3'' + D_3 \beta_2'' \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

worin man sich durch Einführung der neuen Konstanten γ_1 und γ_2 vom Kurbelradius r unabhängig macht. Wir möchten betonen, dass die Konstanten γ und β von allgemeinerer Bedeutung sind, als die schematische Abbildung erkennen lässt. Es sind vielmehr drei verschiedene Deformationen berücksichtigt, die der Stangenkraft, dem Drehmoment einer Getriebeseite und dem Gesamtdrehmoment proportional gesetzt werden. Beispielsweise könnte in γ die Durchbiegung der Lagerböcke mitgemessen werden.¹⁾

Es ist nun das Kennzeichen der statischen Betrachtungsweise, dass sie bei den Gleichungen (1) oder, je nach den konstruktiven Verhältnissen, bei analogen Beziehungen stehen bleibt; nach beliebiger Wahl von $D_1 + D_3$ findet man durch Probieren D_1 und D_3 so, dass diese Deformationsgleichungen erfüllt werden. Sobald jedoch das Getriebe in Bewegung ist, müssen richtigerweise Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden, die in unserem Falle lauten:

$$\left. \begin{aligned} T - (D_1 + D_3) &= \Theta_1 \frac{d^2 \varphi_5}{dt^2} \\ (D_1 + D_3) - W &= \Theta_2 \frac{d^2 \varphi_6}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

Nach Einführung der Abkürzungen

$$\beta_1 = \beta_1' + \beta_1''; \beta_2 = \beta_2' + \beta_2''; \beta_3 = \beta_3' + \beta_3''; \dots \quad (3)$$

gewinnt man aus den Gleichungen (1)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_5 - \varphi_6 &= D_1 \beta_1 + \beta_3 (D_1 + D_3) + \frac{\gamma_1 D_1}{\sin^2 \varphi_1} \\ \varphi_5 - \varphi_6 &= D_3 \beta_2 + \beta_3 (D_1 + D_3) + \frac{\gamma_2 D_3}{\sin^2 \varphi_3} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1a)$$

woraus ferner

¹⁾ Es waren allerdings die Wellen als starr gelagert vorausgesetzt; bei vorhandener Deformation der Lager muss daher gefordert werden, dass die dabei auftretenden Trägheitskräfte genügend klein bleiben.

nach Potenzen von ε geordnet; da die rechte Seite verschwindet, müssen die Koeffizienten jeder Potenz von ε einzeln verschwinden. Man erhält so eine Reihe von Bedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \alpha_0^2 \cdot a_0 \cdot y_0 &= 0 \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \alpha_0^2 \cdot a_0 \cdot y_1 &= -2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 y_0 - \alpha_0^2 y_0 (\alpha_1 \cos 2\tau + \alpha_2 \cos 4\tau) \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \alpha_0^2 \cdot a_0 \cdot y_2 &= -2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 y_1 - \alpha_0^2 y_1 (\alpha_1 \cos 2\tau + \alpha_2 \cos 4\tau) \\ &\quad - (\alpha_1^2 + 2\alpha_0 \alpha_2) y_0 - 2\alpha_0 \alpha_1 y_0 (\alpha_1 \cos 2\tau + \alpha_2 \cos 4\tau) \\ &\quad - \alpha_0^2 y_0 (\alpha_3 \cos 2\tau + \alpha_4 \cos 4\tau + \alpha_5 \cos 6\tau + \alpha_6 \cos 8\tau) \\ \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \alpha_0^2 \cdot a_0 \cdot y_3 &= -2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 y_2 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die sukzessive Berechnung dieser Gleichungen liefert die gesuchten Lösungen mit beliebiger Genauigkeit.

Die erste Annäherung folgt aus der ersten Gleichung mit

$$y_0 = A \cdot \cos(n\tau - \delta_0); \quad n^2 = \alpha_0^2 \cdot a_0. \quad (13)$$

worin A und δ_0 die Integrationskonstanten sind.

Nun muss nach Früherem gelten

für die periodische Lösung

$$y_0(\tau + \pi) = +y_0(\tau)$$

für die halbperiodische Lösung

$$y_0(\tau + \pi) = -y_0(\tau)$$

Um diese Bedingungen zu erfüllen, muss notwendig sein

$$n = 2, 4, 6, 8 \dots \text{ für die periodische}$$

$$n = 1, 3, 5, 7 \dots \text{ für die halbperiodische}$$

Eigenschwingung. Man erhält also alle Gebiete instabiler Schwingungen, wenn man n die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen lässt. In erster Annäherung ergeben sich statt der Bereiche instabiler Schwingungen nur kritische Drehzahlen, welche den Umlaufzeiten

$$\vartheta_n = \sim \alpha_0 = \sqrt{\frac{n^2}{a_0}} \quad \dots \quad (14)$$

entsprechen. Da die Eigenschwingung während eines Umlaufes des Kuppelstangentriebes im n ten Gebiet n Perioden durchmisst, bezeichnen wir sie im folgenden auch als die „Schwingung n -facher Frequenz“.

Die zweite Annäherung folgt aus der zweiten der Gleichungen (12) nach Einsetzen von (13). Man erhält so für y_1 die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + n^2 y_1 &= -2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 A \cdot \cos(n\tau - \delta_0) \\ &\quad - \frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{2} A \cdot \{ \cos[(n+2)\tau - \delta_0] + \cos[(n-2)\tau - \delta_0] \} \\ &\quad - \frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{2} A \cdot \{ \cos[(n+4)\tau - \delta_0] + \cos[(n-4)\tau - \delta_0] \} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Lösung besteht aus der Eigenschwingung

$$B \cdot \cos(n\tau - \delta_1)$$

mit B und δ_1 als Integrationskonstanten, und der erzwungenen Schwingung. Bezeichnet $R(\tau)$ die in Gl. (15) rechts stehende Störungsfunktion, so kann mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten für die erzwungene Schwingung der allgemeine Ausdruck

$$\frac{1}{n} \int_{\tau_0}^{\tau} R(\xi) \sin n(\tau - \xi) d\xi$$

gewonnen werden; den willkürlichen Wert τ_0 können wir $= 0$ setzen. Die Störungsglieder sind hier stets von der Form

$$\cos[(n \pm m)\tau - \delta]$$

Ein solches Glied gibt nach der angegebenen allgemeinen Formel zu folgender erzwungenen Schwingung Anlass:

$$\left. \begin{aligned} &- \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{\pm m} \left[\cos((n \pm m)\tau - \delta) - \cos(n\tau - \delta) \right] + \\ &+ \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n \pm m} \left[\cos[(n \pm m)\tau - \delta] - \cos(n\tau + \delta) \right] \end{aligned} \right.$$

Hier sind die Ausnahmefälle $m = 0$ und $2n \pm m = 0$ besonders zu behandeln; im ersten Ausnahmefall ändert sich der erste Term zu

$$+ \frac{1}{2n} \cdot \tau \cdot \sin(n\tau - \delta)$$

im zweiten Fall der zweite Term zu

$$+ \frac{1}{2n} \cdot \tau \cdot \sin(n\tau + \delta)$$

Nach dieser Vorbereitung kann das vollständige Integral jeweils sofort hingeschrieben werden. Für die zweite Annäherung ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= B \cos(n\tau - \delta_1) - 2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 A \cdot \frac{1}{2n} \cdot \tau \cdot \sin(n\tau - \delta_0) \\ &\quad - \frac{2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 A}{(2n)^2} \left[\cos(n\tau - \delta_0) - \cos(n\tau + \delta_0) \right] \\ &\quad + \cos[(n+2)\tau - \delta_0] \cdot \left(-\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\quad + \cos[(n-2)\tau - \delta_0] \cdot \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-2} \right) \\ &\quad + \cos[n\tau - \delta_0] \cdot \left(-\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} \right) + \\ &\quad + \cos[n\tau + \delta_0] \cdot \left(-\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-2} \right) \\ &\quad + \cos[(n+4)\tau - \delta_0] \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2n+4} \right) + \\ &\quad - \frac{\alpha_0^2 \alpha_2 A}{2 \cdot 2n} \left\{ \cos[(n-4)\tau - \delta_0] \cdot \left(+\frac{1}{4} + \frac{1}{2n-4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \cos[n\tau + \delta_0] \cdot \left(-\frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n-4} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

Mit Ausnahme des Gliedes

$$- 2 \alpha_0 \alpha_1 a_0 A \cdot \tau \cdot \sin(n\tau - \delta_0)$$

ist y_1 bereits halbperiodisch oder periodisch; somit muss $\alpha_1 = 0$

sein, wodurch nach Gl. (11) die zweite Annäherung für ein beliebiges n gefunden ist. Eine Ausnahme tritt ein für $n = 1$ und $n = 2$.

$n = 1$: Herrührend vom Term

$$-\frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{2} \cdot A \cdot \cos[(n-2)\tau - \delta_0]$$

erscheint in y_1 ein Ausdruck

$$-\frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{2} \cdot A \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \sin(\tau + \delta_0)$$

der ebenfalls τ explizite enthält und somit aus y_1 verschwinden muss. Also gilt

$$-\alpha_0 \alpha_1 a_0 A \tau \sin(\tau - \delta_0) - \frac{\alpha_0^2 \alpha_1}{2} A \cdot \frac{\tau}{2} \sin(\tau + \delta_0) = 0$$

woraus

$$\begin{aligned} \sin \tau \cos \delta_0 \cdot (-4 \alpha_0 \alpha_1 a_0 - \alpha_0^2 \alpha_1) \\ + \cos \tau \sin \delta_0 \cdot (+4 \alpha_0 \alpha_1 a_0 - \alpha_0^2 \alpha_1) = 0 \end{aligned}$$

Diese Beziehung kann dauernd nur für folgende zwei Fälle stattfinden:

$$1. \quad \delta_0 = 0 \quad \text{und} \quad -4 \alpha_0 \alpha_1 a_0 - \alpha_0^2 \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 = -\left(\frac{\alpha_1}{4 \alpha_0}\right) \cdot \alpha_0$$

$$2. \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad +4 \alpha_0 \alpha_1 a_0 - \alpha_0^2 \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 = +\left(\frac{\alpha_1}{4 \alpha_0}\right) \cdot \alpha_0$$

Setzt man den aus Gl. (14) bereits bekannten Wert von α_0 ein, so lautet nun die Umlaufszeit für die zweite Annäherung

$$\vartheta_1 = \sim \sqrt{\frac{1}{a_0}} \mp \varepsilon \cdot \frac{a_1}{4 a_0} \sqrt{\frac{1}{a_0}} \quad (16)$$

Die „kritische Drehzahl“ aus erster Annäherung verbreitert sich nun zu einem Gebiet, dessen Grenzen durch die beiden Werte von ϑ_1 angenähert gegeben sind. Zu beachten ist ferner, dass die Eigenschwingung an eine bestimmte Phase gegenüber ψ gebunden ist. ϑ_1 ist die kleinste Umlaufszeit, für die ein Instabilitätsgebiet auftreten kann; ihr entspricht die grösste Drehzahl und es handelt sich also um das gefährlichste Gebiet.

Das tiefer gelegene, nächste Instabilitätsgebiet mit $n = 2$ erfordert eine periodische Lösung. Ganz ähnlich findet man hierfür

$$\vartheta = \sim \sqrt{\frac{4}{a_0}} \mp \varepsilon \cdot \frac{a_2}{4 a_0} \sqrt{\frac{4}{a_0}} \quad (17)$$

Für ein allgemeines $n \neq 3, 4$ ergeben sich aus der dritten Annäherung trotz $a_2 \neq 0$ nur kritische Drehzahlen; dagegen spielen hier $n = 3$ und $n = 4$ eine ähnliche Ausnahmerolle wie $n = 1$ und $n = 2$ in der vorigen Annäherung. Nach dieser Darlegung des Rechnungsganges betrachten wir noch kurz folgende Spezialfälle:

Spezialfall I. Starre Wellen.

Es sei $\beta_1 = \beta_2 = 0$ und es wird

$$\psi = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) \cos 2 \omega t}{[2 \gamma_1 \gamma_2 + \beta_3 (\gamma_1 + \gamma_2)] + \beta_3 (\gamma_1 - \gamma_2) \cos 2 \omega t} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2}$$

Die allgemeinen Beziehungen vereinfachen sich, da $r = c = 0$ gesetzt werden kann. Hingegen wird für ein symmetrisches Getriebe $\gamma_1 = \gamma_2$, also

$$\psi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2} = \text{konst.}$$

und die harmonische Eigenschwingung hat die Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2 \pi} \cdot \sqrt{\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2}} \cdot \frac{1}{\gamma_1 + \beta_3}$$

Spezialfall II. Starre Stangen.

Es sei $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ und es können dann gegenüberliegende Wellenhälften als starr verbunden gelten. Man erhält

$$\psi = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \theta_2}}{\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_1} = \text{konst.}$$

und somit eine einzige kritische Drehzahl.

Spezialfall III. Symmetrisches Getriebe.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \end{aligned}$$

Die „Symmetrie“ der beiden Getriebeseiten braucht also nicht geometrisch aufgefasst zu werden; es genügt z. B. für $\beta_1 = \beta_2$, dass die Summe der D_1 proportionalen Deformationen gleich der Summe der D_2 proportionalen Deformationen ist, gleichgültig, wodurch diese im übrigen bedingt sein mögen. Zum Vergleich verschiedener Triebwerke führen wir zwei Verhältniszahlen ein:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\beta_1}{\gamma_1} \\ v_3 &= \frac{\beta_3}{\gamma_1} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right\} \quad (18)$$

Ausserdem eine mittlere Frequenz¹⁾

$$\nu^* = \frac{\omega^*}{2 \pi} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2} \cdot \frac{1}{\gamma_1 + \frac{\beta_1}{2} + \beta_3}} \quad (19)$$

Nun kann die Grösse ψ auf die Form gebracht werden

$$\begin{aligned} \psi &= \omega^{*2} \frac{a' + c' \cdot \cos 4 \omega t}{p' + r' \cdot \cos 4 \omega t} ; \quad a' = 8 + 6 v_1 + v_1^2 + v_3 (8 + 2 v_1) \\ &\quad p' = 8 + 8 v_1 + v_1^2 + v_3 (8 + 2 v_1) \\ &\quad c' = -[2 v_1 + v_1^2 + 2 v_1 v_3] \\ &\quad r' = -[2 v_1 v_3 + v_1^2] \end{aligned}$$

Die Reihenentwicklung vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{4 \pi^2} &= a_0 + \varepsilon \cdot a_2 \cos 4 \tau + \varepsilon^2 a_6 \cos 8 \tau + \varepsilon^3 \dots \\ a_0 &= g_0 + \varepsilon^2 a_6 + \dots \\ a_2 &= g_2 - g_0 g_4 \\ a_6 &= \frac{-g_4}{2} \cdot a_2 \end{aligned} \quad \text{worin} \quad \begin{cases} g_0 = \nu^{*2} \cdot \frac{a'}{p'} \\ \varepsilon g_2 = \nu^{*2} \cdot \frac{c'}{p'} \\ \varepsilon g_4 = \frac{r'}{p'} \end{cases} \quad (19a)$$

Um die periodischen und halbperiodischen Lösungen zu finden, muss man n die Reihe der geraden Zahlen durchlaufen lassen. Das Gebiet höchster Drehzahl berechnet sich nun mit $n = 2$ in der früher dargelegten Weise mit den Grenzen

¹⁾ ν^* umfasst die beiden Spezialfälle starrer Stangen und starrer Wellen.

$$\begin{cases} \theta_2' = \sqrt{\frac{4}{a_0}} \left(1 - \varepsilon \cdot \frac{a_2}{4 a_0} + \varepsilon^2 \frac{5 a_2^2}{64 a_0^2} - \dots \right) \\ \theta_2'' = \sqrt{\frac{4}{a_0}} \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{a_2}{4 a_0} - \varepsilon^2 \frac{9 a_2^2}{64 a_0^2} - \dots \right) \end{cases}$$

Da sich a_2 negativ herausstellt, entspricht die Phasenlage $\delta_0 = \delta_1 = \dots = \frac{\pi}{2}$ der Grenze höherer Drehzahl. Das nächste Instabilitätsgebiet mit $n = 4$ schrumpft schon beträchtlich zusammen und noch mehr jenes sechsfacher Frequenz. Es gilt:

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \sqrt{\frac{16}{a_0}} \left\{ 1 - \left[\frac{4}{6} \left(\frac{a_2}{4 a_0} \right)^2 \mp \left(\frac{a_6}{4 a_0} - 4 \left(\frac{a_2}{4 a_0} \right)^2 \right) \right] \cdot \varepsilon^2 + \dots \right\} \\ \theta_6 &= \sqrt{\frac{36}{a_0}} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \cdot \frac{8}{9} \left(\frac{a_2}{4 a_0} \right)^2 \mp \varepsilon^3 \cdot \frac{81}{32} \left(\frac{a_2}{4 a_0} \right)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Vergleichsgrösse ω^* schreiben wir die kritischen Winkelgeschwindigkeiten ω für die Grenzen der Instabilitätsgebiete wie folgt:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \pi}{\vartheta} = \omega^* \cdot \sqrt{\frac{a_0}{n^2}} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{a_1}{a_0} + \varepsilon^2 \frac{a_2}{a_0} + \dots} \\ \omega &= \frac{\omega^*}{n} \cdot K_n \text{ wo } K_n = \frac{\sqrt{a_0}}{1 + \varepsilon \frac{a_1}{a_0} + \varepsilon^2 \frac{a_2}{a_0} + \dots} \quad (20) \end{aligned}$$

K_n betrachten wir als einen Korrektionsfaktor, der Abb. 2 für verschiedene Kuppelstangentreibe entnommen werden kann. Als Abszisse ist $\frac{v_1}{1 + v_1}$ gewählt, um für ein beliebiges v_1 zwischen 0 und ∞ die Kurven im Endlichen zu haben.

